

А. Е. БУКАТОВ

К вопросу о внутренних волнах в непрерывно стратифицированном море

Исследуются внутренние волны, генерируемые в неоднородной жидкости периодическими колебаниями участка дна бассейна. Плотность жидкости непрерывно изменяется с глубиной по закону, соответствующему двухслойной модели со стратифицированным верхним и однородным нижним слоями.

1. РАССМОТРИМ неограниченный в горизонтальных направлениях слой идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. В невозмущенном состоянии плотность жидкости непрерывно изменяется с глубиной по закону

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 \exp(-\kappa z) & -H_1 \leq z \leq 0 \\ \rho_0 \exp(\kappa H_1) & -H \leq z \leq -H_1, \end{cases} \quad (1.1)$$

соответствующему двухслойной плотностной модели. Исходя из линеаризованной системы уравнений движения [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \rho^{-1} p_1 &= -\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial z}, & \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} w &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

проведем исследование внутренних волн, генерируемых пе-

риодическими колебаниями участка дна бассейна, происходящими с вертикальной скоростью

$$w^* = af(x, y) \cos \sigma t. \quad (1.3)$$

Здесь p и ρ - возмущения давления и плотности под влиянием движения; u, v, w - составляющие вектора скорости; 2ω - параметр Кориолиса. Решение системы (1.2), удовлетворяющее граничным условиям

$$\rho_0 g \zeta - p(x, y, 0, t) = 0, \quad \zeta_t = w(x, y, 0, t) \quad (1.4)$$

на свободной поверхности и

$$w(x, y, -H, t) = w^* \quad (1.5)$$

на дне, а также условию непрерывности давления и вертикальной составляющей скорости на границе раздела слоев ($z = -H$), найдем методом интегральных преобразований аналогично тому, как это проделано в работе [3], где исследуются волны от периодических поверхностных давлений. В результате этого при выполнении условий

$$\sigma^2 > \kappa g, \quad \sigma > 2\omega \quad (1.6)$$

найдем в осесимметричном случае ($f(x, y) = f(R), R = \sqrt{x^2 + y^2}$) при больших R такие формулы вида вертикальной составляющей скорости, возмущенного давления, свободной поверхности ζ и поверхности раздела ζ_1 :

$$\begin{aligned} w &= A(r_0, z) \sin d_0, \quad p = \sigma \rho(z) \zeta^{-2}(r_0) A_z(r_0, z) \cos d_0, \\ \zeta &= \sigma^{-1} A(r_0, 0) \cos d_0, \quad \zeta_1 = \sigma^{-1} A(r_0, -H) \cos d_0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$A(r, z) = a, \beta \frac{\psi(r, z)}{\Delta'(r) \operatorname{ch} \gamma H_2} f^*(r),$$

$$\gamma = \tau \beta (\sigma^2 - 4\omega^2)^{-1/2}, \quad d_0 = r_0 R - \sigma t - \frac{\pi}{4}, \quad a, \tau = -\alpha \sqrt{2\pi}, \quad \beta = (r/R)^{1/2},$$

$$\psi(r, z) = \begin{cases} \psi_1 & -H_1 \leq z \leq 0 \\ \psi_2 & -H \leq z \leq H_1, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\psi_1 = [\gamma \operatorname{ch} \gamma z - (\frac{\kappa}{2} - \gamma D) \operatorname{sh} \gamma z] \exp [\frac{\kappa}{2} (z + H_1)] ,$$

$$\psi_2 = [\Delta_1(\tau, z) \operatorname{sh} \gamma H_1 + \gamma \operatorname{ch} \gamma H_1 + D \Delta_2(\tau, z)] \operatorname{ch} \gamma (z + H_1) ,$$

$$\Delta_1(\tau, z) = \frac{\kappa}{2} - (1 - \kappa g / \sigma^2) \gamma \operatorname{th} \gamma (z + H_1) , \quad D = 2g / \sigma^2 ,$$

$$\Delta_2(\tau, z) = (\gamma \operatorname{ch} \gamma H_1 - \frac{1}{2} \kappa \operatorname{sh} \gamma H_1) \operatorname{th} \gamma (z + H_1) - \gamma \operatorname{sh} \gamma H_1 ,$$

$$\gamma = [(1 - \kappa g / \sigma^2) \gamma^2 + \kappa^2 / 4]^{1/2} , \quad f^*(\tau) = \int_0^\infty R f(R) J_0(\tau R) dR , \quad \Delta(\tau) = \psi_2(\tau, -H) \operatorname{ch} \gamma H_2 ,$$

τ_0 - действительный положительный корень уравнения

$$\Delta_1(\tau, H) \operatorname{sh} \gamma H_1 + \gamma \operatorname{ch} \gamma H_1 + D \Delta_2(\tau, -H) = 0 , \quad (1.9)$$

штрих означает производную по τ .

При условии

$$2\omega < \sigma < \sqrt{\kappa g} \quad (1.10)$$

получим

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=0}^{\infty} A(\tau_n, z) \sin d_n , \quad P = \sigma p(z) \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n^{-2} A(\tau_n) A_z(\tau_n, z) \cos d_n , \\ \gamma &= \sigma^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A(\tau_n, 0) \cos d_n , \quad \gamma_1 = \sigma^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A(\tau_n, -H_1) \cos d_n . \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь

$$\varphi_1 = [\gamma_1 \cos \gamma_1 z - (\frac{\kappa}{2} - \gamma D) \sin \gamma_1 z] \exp [\frac{\kappa}{2} (z + H_1)] ,$$

$$\varphi_2 = [\Delta_1(\tau, z) \sin \gamma_1 H_1 + \gamma_1 \cos \gamma_1 H_1 + D \Delta_2(\tau, z)] \operatorname{ch} \gamma (z + H_1) ,$$

$$\Delta_2 = (\gamma_1 \cos \gamma_1 H_1 - \frac{1}{2} \kappa \sin \gamma_1 H_1) \operatorname{th} \gamma (z + H_1) - \gamma \sin \gamma_1 H_1 ,$$

$$\gamma_1 = [(\kappa g / \sigma^2 - 1) \gamma^2 - \kappa^2 / 4]^{1/2} ,$$

r_n - положительные корни уравнения

$$\Delta_1(r, -H) \sin \gamma_1 H_1 + \gamma_1 \cos \gamma_1 H_1 + D \Delta_2(r, -H) = 0, \quad (1.12)$$

а все остальные обозначения те же, что и в формулах (1.8).

Если $w = \alpha f(x) \cos \beta t$, то для w , ρ и $\gamma_{1,2}$ справедливы формулы (1.7) при условии (1.8) и формулы (1.11) при условии (1.10) с той только разницей, что

$$d_n = r_n x - \beta t, \quad \beta = 1, \quad f^*(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i r x) dx.$$

Горизонтальную составляющую скорости плоских волн определим при условии (1.8) по формуле

$$u = r_0^{-1} A_z(r_0, z) \cos d_0, \quad (1.13)$$

а при условии (1.10) по формуле

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{-1} A_z(r_n, z) \cos d_n. \quad (1.14)$$

Сходимость рядов (1.11), (1.14) обеспечивается соответствующим выбором функции $f(x)$.

2. Из формул (1.7)-(1.14) видно, что условия генерации поверхностных и внутренних волн такие же, как и при периодических поверхностных давлениях. При $\beta > 2\omega$, $\beta > \sqrt{kg}$ периодические колебания участка дна бассейна генерируют в непрерывно стратифицированной жидкости, плотность которой изменяется с глубиной по закону (1.1), только одну поверхностную волну. Амплитуда ее, как и в случае периодических поверхностных давлений, непрерывно убывает с глубиной, принимая максимальное значение на свободной поверхности. Деформация элементов этой волны за счет неоднородности жидкости не превышает 1%.

При условии (1.10) периодические колебания дна бассейна генерируют в непрерывно стратифицированной жидкости бесконечный спектр волн-гармоник. Волна с номером $n = 0$ представляет собою обычную поверхностную волну. Влияние неоднородности на элементы этой волны не превышает 1%. Волны с номерами $n \geq 1$ - чисто внутренние волны, обусловленные наличием плотностной стратификации. Они отвечают вещественным корням r_n ($n = 1, 2, \dots$) уравнения (1.12). Распределение корней этого уравнения по частотному спектру и по коэффициенту стратификации $\varepsilon = \kappa H$, аналогично распределению при периодических поверхностных давлениях. Приближенная формула для определения r_n получена в работе [3]. Эта формула дает достаточно хорошую степень точности, возрастающую с ростом номера n .

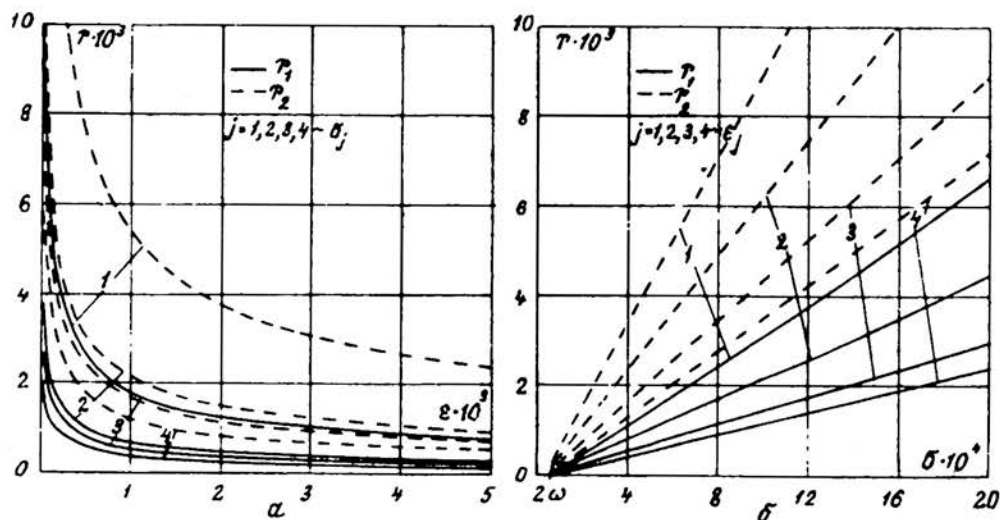


Рис. 1. Зависимость r_1 и r_2 от перепада плотности и частоты колебаний

Например, при $\delta = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$, $H = 60 \text{ м}$, $H_2 = 2020 \text{ м}$ и $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$ ошибка в определении корней r_1 и r_2 составляет соответственно 1,2 и 0,7%. С увеличением δ ошибка уменьшается и при $\delta = 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$ не превышает 0,1%. На рис. 1 изображена зависимость r_1 и r_2 от ε и δ при $H_1 = 60 \text{ м}$, $H = 2080 \text{ м}$, полученная в результате численного решения уравнения (1.12). При этом $\delta_j \cdot 10^4 (\text{сек}^{-1})$ принимались соответственно равными 8,7; 3,625; 2,9; 2,175, а $\varepsilon_j \cdot 10^3$ - равными 0,5; 1; 2; 3. При $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированном δ функции $r_{1,2}(\varepsilon) \rightarrow \infty$, а при $\varepsilon \rightarrow \infty$ $r_{1,2}(\varepsilon) \rightarrow 0$. Это же имеет место и для r_n при $n = 3, 4, \dots$. Зависимость $r_{1,2}$ от δ при фиксированном ε линейная. Причем угол между сплошной и штриховой линиями, отвечающими одному j уменьшается с ростом ε_j , что говорит об уплотнении волнового спектра с ростом перепада плотности.

Анализ показал, что качественная зависимость волнгармоник от z аналогична зависимости при периодических поверхностных давлениях. Для вертикальной составляющей скорости и периодических поверхностных давлений эта зависимость исследована в работе [3]. Число узлов гармоники ω_k ($k \geq 1$) при $0 \leq z < H$ определяется ее номером n . Причем j -й узел n -й гармоники ($j \leq n$) от свободной поверхности находится на глубине

$$z = - \frac{\pi(j-1) + \psi(r_n)}{\delta_1(r_n)}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta_1}{2D - \kappa/2}$$

Фазовые скорости и длины волн-гармоник равны соответственно $v_n = b/r_n$, $\lambda_n = 2\pi/r_n$.

Для выяснения влияния неоднородности жидкости на характер распределения ω , u и p плоских волн по глубине проводились численные расчеты по формулам (1.11), (1.14) для $f(x)$ вида

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 \pi x / 2\ell & |x| \leq \ell \\ 0 & |x| > \ell \end{cases} \quad (1.15)$$

и значений

$$2\omega = 6,6 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}, \ell = 10^4 \text{ м}, H_1 = 60 \text{ м}, H = 2080 \text{ м}, 0 \leq \epsilon \leq 5 \cdot 10^{-3}, 2\omega < b \leq \sqrt{\kappa g}. \quad (1.16)$$

Вычислялись оценки максимально возможных значений вертикальной и горизонтальной составляющих скорости, а также давления p , справедливые на заданном горизонте при любом значении x . Эти величины обозначены соответственно через $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. На рис. 2 приведены зависимости

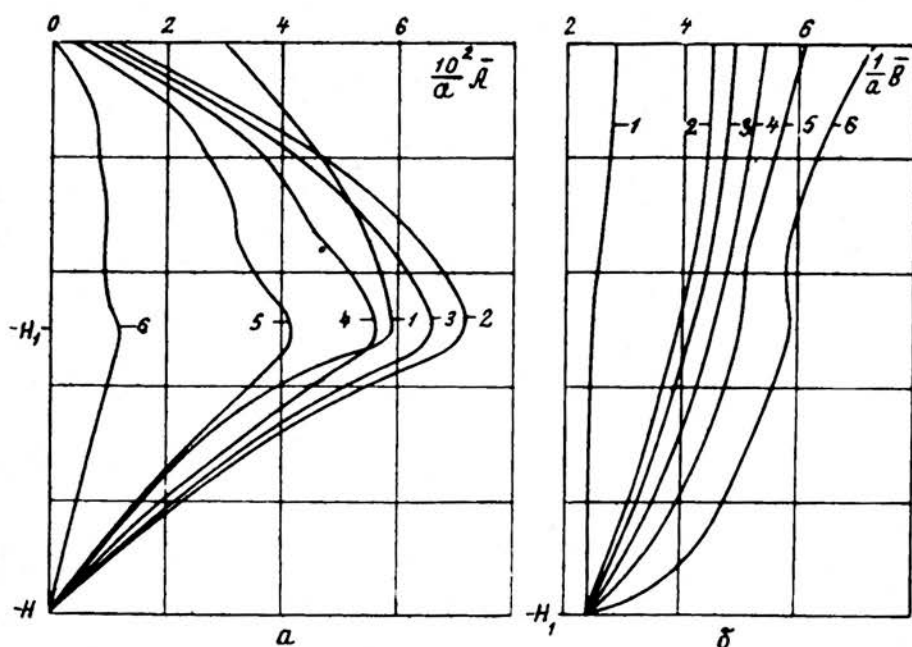


Рис. 2. Распределение $\bar{A}$ и $\bar{B}$ по глубине жидкости

ти $\bar{A}(z)$ и $\bar{B}(z)$ при $\varepsilon = 10^{-3}$, где линии 1, 2, ..., 6 отвечают значениям $10^4 \bar{b}$ (сек $^{-1}$), соответственно равным 8,7; 3,625; 2,9; 2,175; 1,45; 7,25. Видно, что в верхнем стратифицированном слое $\bar{A}(z)$ растет с глубиной, а в нижнем однородном убывает. Максимум $\bar{A}(z)$ достигается на границе раздела слоев. Значение $\bar{A}$ на свободной поверхности ($z = 0$) с точностью до 1% совпадает со значением $\bar{A}(0)$ в однородной жидкости. Качественно такая же картина распределения $\bar{A}$ по глубине имеет место и при генерации волн периодическими поверхностными давлениями. Однако для одних и тех же значений параметров отношение $\max \bar{A}(z)/\bar{A}(0)$ в случае периодических поверхностных давлений значительно больше, чем в случае придонных возмущений. В частности, при $\bar{b} = 1,45 \cdot 10^{-4}$ сек $^{-1}$ и $\varepsilon = 10^{-3}$ это отношение в первом случае больше 50, а во втором равно 7,4. Оценка горизонтальной составляющей скорости $\bar{B}(z)$ в верхнем слое убывает с глубиной, а в нижнем слое остается постоянной. Причем увеличение $\bar{B}(-H_1)$ за счет неоднородности при изменении параметров в пределах (1.6) не больше 2%.

На рис. 3 изображена зависимость $\max \bar{A}(z) = \bar{A}^*$ и $\max \bar{B}(z) = \bar{B}^*$ как функции параметра ε . Линии 1, 2, ..., 6 на этом рисунке отвечают тем же значениям $\bar{b}$, что и линии 1, 2, ..., 6 на рис. 2. На рис. 3 видно, что каждому фиксированному значению

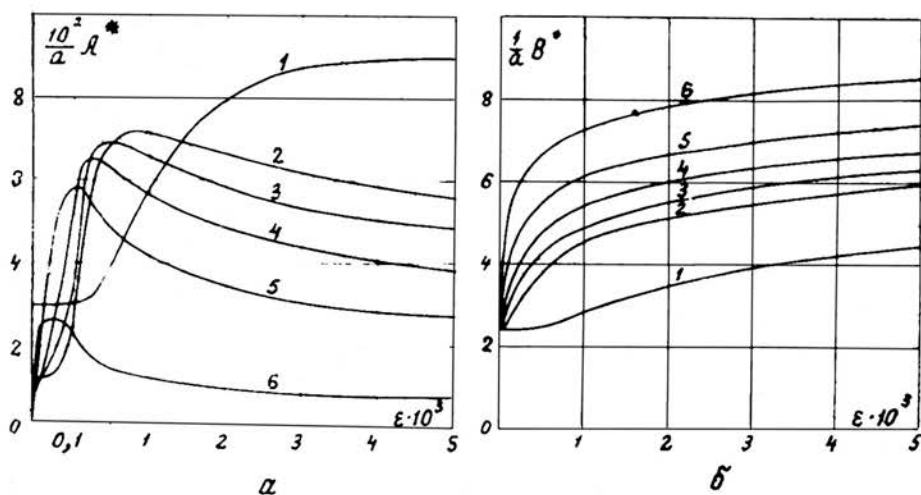


Рис. 3. Зависимость $\bar{A}^*$ и $\bar{B}^*$ от перепада плотности

частоты колебаний ω отвечает свое значение $\varepsilon = \varepsilon^*$, при котором функция A^* принимает максимальное значение.

Большому ω соответствует и большее ε^* . Причем в области $\varepsilon < \varepsilon^*$ функция $A^*(\varepsilon)$ резко возрастает. Отношение $A^*(\varepsilon^*)/A^*(0)$ для частот, отвечающих кривым 1, 2, ..., 6, равно соответственно 2,9; 5,6; 6,9; 9; 13,2; 26,5. Это говорит о том, что с увеличением периода колебаний наличие плотностной стратификации может привести к значительному увеличению амплитуды колебаний, генерируемых внутри жидкости периодическими колебаниями участка дна.

Функция $B^*(\varepsilon)$ при фиксированном ω растет на всем отрезке $0 \leq \varepsilon \leq 5 \cdot 10^{-3}$, но в области $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ и $2\omega < \omega \leq 3,625 \cdot 10^{-4}$ сек $^{-1}$ она растет значительно быстрее, чем при $\varepsilon > 10^{-3}$. При этом большому периоду колебаний при фиксированном ε соответствует и большее значение $\partial B^*/\partial \varepsilon$. Отметим, что при $\varepsilon = 0$ значения B^* для всех рассматриваемых ω фактически совпадают между собой (рис. 3,б).

На рис. 4 приведена зависимость A^* и B^* от частоты колебаний ω при различных значениях перепада плотности ε . Отсюда видно, что при $\varepsilon \geq 5 \cdot 10^{-4}$ максимальные расстояния от кривых $A^*(\omega)$ с номерами 2, 3, ..., 8 до линии с номером 1, отвечающей однородной жидкости ($\varepsilon = 0$), примерно одинаковые. Следовательно, при различных $\varepsilon \geq 5 \cdot 10^{-4}$ в неоднородной жидкости могут возникать внутренние волны с одинаковыми амплитудами. Однако диапазон частотного спектра, на котором могут возникать внутренние волны с амплитудами, близкими к $\max A^*(\omega)$, изменяется с увеличением перепада плотности. Например, при $\varepsilon = 10^{-3}$ значение, равное $1/2 \max A^*(\omega)$, принимается на интервале частот ($10^4 \omega$ сек $^{-1}$), равном (1, 6), а при $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ — на интервале (2, 18,5). В области низких частот меньшему перепаду плотности соответствует более сильное изменение $A^*(\omega)$.

Несмотря на то, что внутренние волны-гармоники генерируются при $2\omega < \omega < \sqrt{\kappa g}$, влияние неоднородности жидкости на волновое движение заметно сказывается лишь на периодах, значительно превышающих $2\pi/N$ ($N = \sqrt{\kappa g}$ — частота Вайсяля). В частности, линиям 2, 3, ..., 8 на рис. 4 отвечают значения $10^2 N$ (сек $^{-1}$), равные соответственно 0,4;

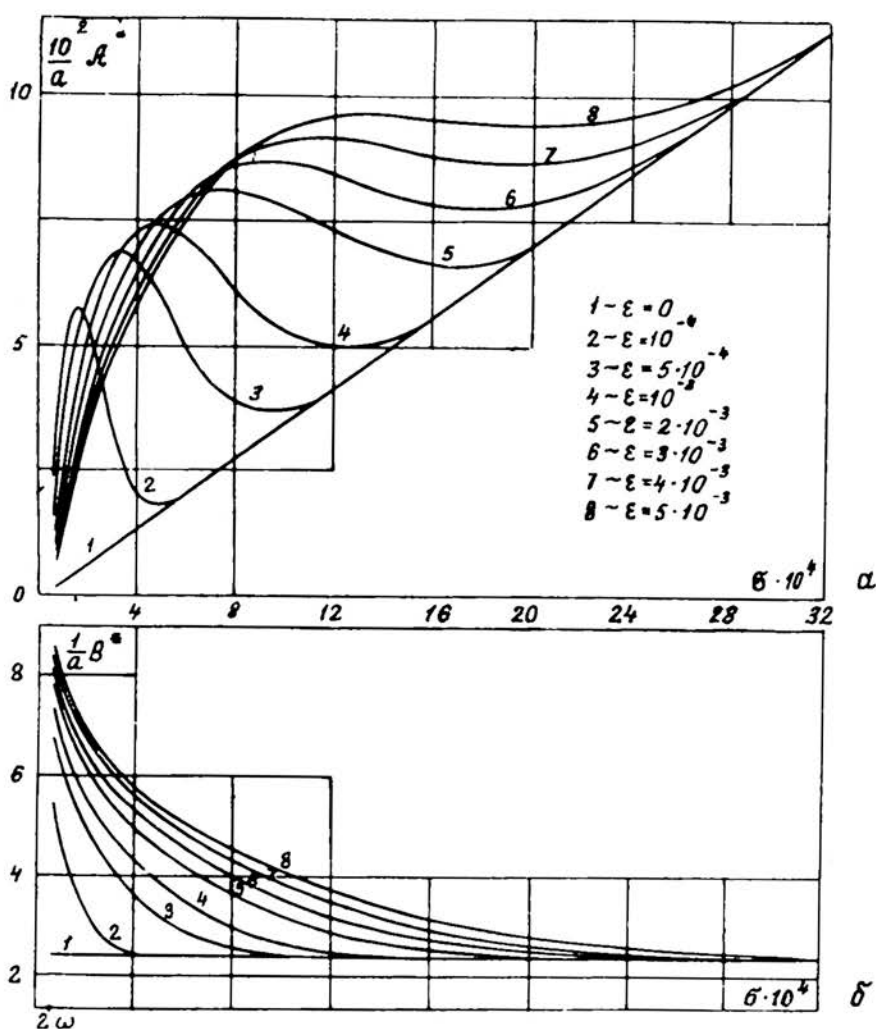


Рис. 4. Распределение A^* и B^* по частотному спектру

0,9; 1,28; 1,81; 2,21; 2,55; 2,85. Однако для рассматриваемых ϵ уже при частотах $N_1 = 10^4 \text{ б} (\text{сек}^{-1})$, равных соответственно 6; 11,5; 15,5; 21,5; 25; 28; 31, линии 2, 3, ..., 8 совпадают с линией 1, т.е. величины A^* фактически совпадают со значением в однородной жидкости. Сравнивая величины N и N_1 , видим, что вклад неоднородности в волновое движение заметен лишь на частотах, более чем в 10 раз превышающих частоту Вайсяля-Брента.

Функция $B^*(b)$, как видно на рис. 4, б, для рассматриваемых перепадов плотности убывает до значения амплитуды горизонтальной составляющей скорости в однородной жидкости (линия 1) при изменении b в интервале $2\omega < b < N_1$.

Влияние стратификации на распределение C^* , характеризующее собою оценку возмущенного давления для рассматриваемых значений параметров, не превышает 1%. В частности, при $\delta = 10^{-4}$ сек⁻¹ изменение ε от 0 до $5 \cdot 10^{-3}$ приводит к увеличению C^* на 0,9%. Причем с ростом δ влияние неоднородности на C^* уменьшается. Следовательно, распределение C^* по частотному спектру для $0 < \varepsilon < 5 \cdot 10^{-3}$ близко к распределению $C^*(\delta)$ в однородной жидкости, исследованному в работе [5].

3. Предположим теперь, что на свободной поверхности жидкости плавает ледяной покров. Рассматривая лед как тонкую упругую пластинку и принимая уравнение колебания ее в качестве граничного условия на поверхности лед-вода, получим аналогично предыдущему для ω , u , p вида поверхности лед-вода ζ и поверхности раздела слоев ζ_1 формулы (1.7), (1.13) при $\delta > 2\omega$, $\delta > \sqrt{\kappa g}$ и формулы (1.11), (1.14) при $2\omega < \delta < \sqrt{\kappa g}$. Все обозначения в этих формулах остаются в силе, за исключением D , которое определяется выражением

$$D = g\delta^{-2}(1 - \alpha_1 + \alpha_1 n^4),$$

$$\alpha_1 = \delta^2 \alpha / \rho_0 g, \quad \alpha = \rho_1 h, \quad \alpha_1 = \alpha / \rho_0 g, \quad \alpha = E h^3 / 12 (1 - \nu^2).$$

Здесь ρ_1 , h , E , ν - плотность, толщина, модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона льда.

Анализ показал, что ледяной покров существенно влияет лишь на короткие поверхностные волны. Влияние льда на внутренние и длинные поверхностные волны незначительно. Аналогичная картина имеет место и при генерации волн периодическими поверхностными давлениями [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М., ОНТИ, 1936.
2. Вайт С.С. Волны на свободной поверхности и поверхности раздела от периодически действующего источника. - Труды МГИ АН СССР, т. 24. М., 1960.

3. Букатов А.Е. О внутренних волнах в непрерывно стратифицированном океане. - В кн.: "Морские гидрофизические исследования", № 6(56). Севастополь, изд. МГИ АН УССР, 1971.
4. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние неоднородности жидкости на колебания тонкой упругой пластинки. - "Прикладная механика", 1972, т. 8, в. 6.
5. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Генерация внутренних волн придонными возмущениями. - В кн.: "Морские гидрофизические исследования", № 1(60). Севастополь, изд. МГИ АН УССР, 1973.

A.E.BUKATOV

ON INTERNAL WAVES IN A CONTINUALLY STRATIFIED SEA

Internal waves generated in a nonuniform fluid by periodic oscillations of a basin bottom section are investigated. Density of the fluid changes continually with depth according to the law corresponding to a two-layer model with the stratified upper layer and the uniform lower one.