

## О внутренних волнах в непрерывно стратифицированном океане

В работе исследуются с учетом действия силы Кориолиса внутренние волны, возникающие в неоднородной жидкости под действием периодических атмосферных возмущений. Плотность жидкости непрерывно изменяется с глубиной по закону, соответствующему двухслойной модели со стратифицированным верхним и однородным нижним слоями.

**П Р И М Н О Г О Ч И С Л Е Н Н Ы Х** исследованиях динамических процессов в океане плотность воды предполагается постоянной. Однако в реальных условиях плотность, являющаяся важнейшей характеристикой морских бассейнов, представляет собой сложную функцию глубины. Поэтому ответить на вопрос, насколько соответствуют действительности океанографические данные, получаемые путем измерений, невозможно без изучения явления внутренних волн, обусловленных плотностной стратификацией, так как несомненно их влияние на результаты наблюдений.

1. Исследуем внутренние волны, возникающие под действием периодических атмосферных возмущений вида

$$\rho_0 = a \rho(x, y) \cos bt, \quad (1.1)$$

в безграничной в горизонтальных направлениях жидкости, плотность которой в невозмущенном состоянии является непрерывной функцией глубины бассейна.

В линейной постановке задача сводится к решению системы уравнений движения

$$\begin{aligned} u_t - 2\omega v &= -\rho^{-1} \rho_x', & v_t + 2\omega u &= -\rho^{-1} \rho_y', \\ w_t + g\rho^{-1} \rho_z' + \rho^{-1} \rho_z'' &= 0, & \rho_z' + \rho_z w &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0$$

с граничными условиями

$$\rho(x, y, \zeta, t) = \rho_0, \quad \zeta_t = w(x, y, 0, t), \quad w(x, y, -H, t) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho$  - полное давление;  $\rho = \rho(z)$  - плотность воды в невозмущенном состоянии;  $\rho'(x, y, z, t)$  и  $\rho''(x, y, z, t)$  - динамические добавки давления и плотности;  $2\omega$  - параметр Кориолиса;  $H$  - глубина бассейна;  $\zeta$  - отклонение свободной поверхности от невозмущенного состояния; ось  $z$  направлена вертикально вверх; начало координат выбрано на невозмущенной свободной поверхности; индексы  $x, y, z, t$  означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Исследование внутренних волн проведем методом интегральных преобразований для распределения плотности вида

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1 \exp(-kz) & -H_1 \leq z \leq 0 \\ \rho_2 \exp(kH_1) & -H \leq z \leq -H_1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Такая зависимость  $\rho(z)$  соответствует двухслойной модели жидкости с неоднородным верхним и однородным нижним слоями.

Исключив громоздкие промежуточные выкладки, приведем лишь конечные формулы вида вертикальной составляющей скорости жидкости

$$w = \begin{cases} w_1 & -H_1 \leq z \leq 0 \\ w_2 & -H \leq z \leq -H_1, \end{cases}$$

а также вида отклонения свободной поверхности  $\zeta_1$  и поверхности раздела слоев  $\zeta_2$  от невозмущенного состояния. Пусть

$$\sigma > 2\omega, \quad \sigma > \sqrt{kg}. \quad (1.5)$$

На некотором удалении от области давлений получаем

$$\eta_j = \sigma \mathcal{A}_j(r_0, z) \cos \alpha_0, \quad \zeta_j = -\mathcal{A}_j(r_0, z_j) \sin \alpha_0, \quad (1.6)$$

где  $\mathcal{A}_j$  и  $\alpha_0$  в осесимметричном случае ( $\rho(x, y) = \rho(R)$ ,  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) определяются формулами

$$\mathcal{A}_j = \frac{a}{\rho_1 g} \sqrt{\frac{2x}{R}} \frac{q}{\Delta'(r)} r^{1/2} \bar{f}(r) \mathcal{A}_j, \quad \alpha_n = r_n R - \sigma t - \frac{\pi}{4}, \quad (1.7)$$

$$\bar{f}(r) = \int_0^\infty R \rho(R) J_0(rR) dR,$$

а в плоском случае ( $\rho(x, y) = \rho(x)$ ) - формулами

$$\mathcal{A}_j = \frac{\sqrt{2x}}{\rho_1 g \Delta'(r)} q \bar{f}(r) \mathcal{A}_j, \quad \alpha_n = r_n x - \sigma t, \quad (1.8)$$

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-irx) dx.$$

При этом

$$\Delta = \left[ \frac{\sigma^2}{g} (\Delta_1 \operatorname{ch} \eta H_1 + \gamma) + \eta \Delta_2 \right] \operatorname{ch} \eta H_1,$$

$$\Delta_1 = \left( 1 - \frac{kg}{\sigma^2} \right) \eta \operatorname{ch} \eta H_2 + \frac{k}{2}, \quad \Delta_2 = \left( \frac{k}{2} \operatorname{ch} \eta H_1 - \gamma \right) \operatorname{ch} \eta H_2 - \eta \operatorname{ch} \eta H_1,$$

$$\alpha_1 = \left[ \left( \eta - \frac{k}{2} \operatorname{ch} \eta H_2 \right) \operatorname{sh} \eta (z + H_1) + \gamma \operatorname{ch} \eta H_2 \operatorname{ch} \eta (z + H_1) \right] \exp\left(\frac{k}{2} z\right),$$

$$\alpha_2 = \gamma (\Delta \operatorname{ch} \eta H_2)^{-1} \operatorname{sh} \eta (z + H_1), \quad \gamma = \left[ \frac{k^2}{4} + (1 - kg/\sigma^2) \eta^2 \right]^{1/2},$$

$$\eta = r \sigma (\sigma^2 - 4\omega^2)^{-1/2}, \quad z = 0, \quad z_2 = -H_1, \quad j = 1, 2. \quad (1.9)$$

$r_0$  - единственный положительный корень уравнения  $\Delta(r) = 0$ ; штрих означает производную по  $r$ .

При  $\sigma^2 H_2 g^{-1} \gg 1$  (короткие волны) для корня  $r_0$  найдем выражение

$$r_0 = \sigma g^{-1} (\sigma^2 - 4\omega^2)^{1/2},$$

а при  $[(\sigma^2 - 4\omega^2) H_1 / g]^{1/2} < 1$  (длинные волны) и малых  $\varepsilon = k H_1$  - выражение

$$r_0 = (\sigma^2 - 4\omega^2)^{1/2} (g H_1)^{-1/2} \left( 1 + \frac{1}{4} \varepsilon \right). \quad (1.10)$$

Для выяснения влияния неоднородности жидкости на элементы образующихся плоских и цилиндрических волн были проведены численные расчеты для ряда конкретных функций  $f(x)$  и значений параметров  $\varepsilon$ ,  $H_{1,2}$  (м),  $\sigma$  (сек<sup>-1</sup>), изменяющихся в пределах

$$0 \leq \varepsilon \leq 10^{-2}, \quad 50 \leq H_1 \leq 10^2, \quad 5 \cdot 10^2 \leq H_2 \leq 2 \cdot 10^3, \quad 5 \cdot 10^2 \leq \sigma \leq 3 \cdot 10^3.$$

Анализ расчетов показал, что при выполнении условия (1.5) в неоднородной жидкости возникают только поверхностные волны, скорость  $(v = \frac{\sigma}{r_0})$ , длина  $(\lambda = \frac{2\pi}{r_0})$  и амплитуда которых мало (меньше 1%) отличаются от соответствующих значений в жидкости однородной.

В табл. 1 для иллюстрации приведены численные значения  $v$  и  $\lambda$  для  $H_1 = 60$  м,  $H_2 = 2020$  м в однородной и неоднородной жидкостях.

Пусть

$$2\omega < \sigma < \sqrt{kg}. \quad (1.11)$$

Тогда

$$w_j = \sigma \sum_{n=0}^{\infty} f_j(r_n, z) \cos \alpha_n, \quad \zeta_j = - \sum_{n=0}^{\infty} f_j(r_n, z_j) \sin \alpha_n, \quad (1.12)$$

где  $r_n$  - положительные корни уравнения  $\Delta(r) = 0$ ;  $f_j$  и  $\alpha_n$  определяются в пространственном случае формулами (1.7), а в плоском случае - формулами (1.8) с заменой  $f$  на

$f_j = [(kg/b^2 - 1)r^2 - \frac{r^4}{b}]^{1/2}$  и гиперболических функций, содержащих в аргументе множитель  $y$ , соответствующими тригонометрическими функциями.

При  $\epsilon \ll 1$  корень  $r_0$  с ошибкой порядка  $\epsilon^2$  определяется из выражения (1.10), а корни  $r_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) - по формуле

$$r_n = (-\sigma \text{trcbg} \sqrt{kg/b^2 - 1 + \pi n}) (b^2 - 4\omega^2)^{1/2} (kg/b^2 - 1)^{-1/2} b^{-1} n^{-1}.$$

Ряды (1.12) абсолютно сходятся при условии, что  $f(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  как  $r^{-\nu}$ , где  $\nu > \frac{3}{2}$  в пространственном и  $\nu > 1$  в плоском случаях.

Из выражения (1.12) видно, что как плоские, так и цилиндрические возмущения свободной поверхности и нижней границы верхнего слоя жидкости представляют собою бесконечную сумму прогрессивных волн. Скорость и длина этих волн равны соответственно  $v_n = \frac{\sigma}{r_n}$ ,  $\lambda_n = \frac{2\pi}{r_n}$ .

Для малых значений  $\epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ ) нулевая гармоника  $w^0$ , отвечающая корню  $r_0$ , представляет собою поверхностную волну. Гармоники  $w^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) представляют собою чисто внутренние волны. Каждая гармоника  $w^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеет внутри верхнего стратифицированного слоя жидкости  $n-1$  ноль и  $n$  примерно равных по модулю экстремумов, один из которых находится на поверхности раздела слоев  $z = -H_1$ . В нижнем слое жидкости  $w^n(z)$  затухают по закону, близкому к линейному.

На рис. 1, 2 с точностью до множителя  $a(10^5 \rho, g)^{-1}$  изображена зависимость  $w^n(z)$  ( $n = 1, 2, 3$ ) для функции

$$f^n(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{x}{2\ell} x & |x| \leq \ell \\ 0 & |x| > \ell \end{cases} \quad (1.13)$$

и значений

$$H_1 = 60 \text{ м}, \quad H_2 = 2020 \text{ м}, \quad \ell = 10^4 \text{ м},$$

$$x = 3 \cdot 10^5 \text{ м}, \quad y = 30^\circ \quad (1.14)$$

$$\text{при } t = 0 \quad b = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}.$$

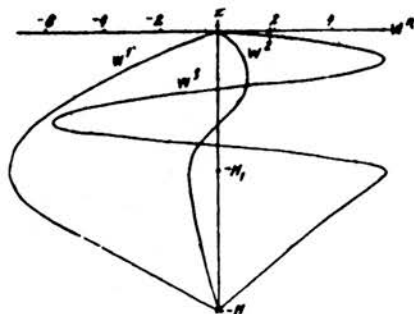


Рис. 1. Гармоники  $w^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) при  $\epsilon = 10^{-3}$

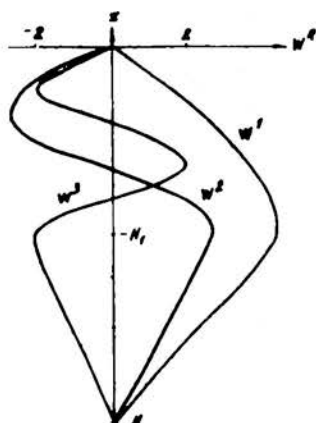


Рис. 2. Гармоники  $w^q$  ( $q = 1, 2, 3$ ) при  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon = 10^{-3}$  (рис. 1),  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$  (рис. 2).

Из сравнения рис. 1 и 2 видно, что изменение  $\varepsilon$  существенно образом влияет на распределение  $w^q$  по глубине жидкости. Зависимость  $\nu_0$  и  $\lambda_0$  от  $\varepsilon$  примерно такая же, как и при выполнении условия (1.5). С увеличением  $\varepsilon$  скорость и длина нулевой гармоники незначительно уменьшаются, в то время как  $\nu_n$  и  $\lambda_n$  при этом существенно увеличиваются. Например, при  $N_1 = 60$  м,  $N_2 = 2020$  м,  $\sigma = 10^{-3}$  сек $^{-1}$  (табл. 2) увеличение  $\varepsilon$  в 5 раз приводит к увеличению  $\nu_n$  и  $\lambda_n$  более чем в 2,2 раза.

2. Для выяснения зависимости  $w$  от  $z$  при условии (1.11) были проведены численные расчеты плоских волн. Эти расчеты проводились за период колебаний  $\tau$  с ошибкой, не превышающей 1% в определении экстремальных значений  $w(z)$  для ряда значений  $\varepsilon$  и  $\sigma$  функции  $f(x)$  вида (1.13) и значений параметров (1.14).

Некоторые результаты расчетов приведены (с точностью до множителя  $\frac{\alpha}{10^3 \beta, \theta}$ ) для  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  на рис. 3, 5, 6 и для  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$  - на рис. 4. На этих рисунках кривая с номером 1 отвечает значению  $\tau = \tau_1 = 8$  час, а кривая с номером 2 - значению  $\tau = \tau_2 = 12$  час.

Анализ расчетов показал, что при  $\tau < 10$  мин и  $10^{-3} \leq \varepsilon \leq 5 \cdot 10^{-3}$  основной вклад в  $w$  вносит нулевая гармоника

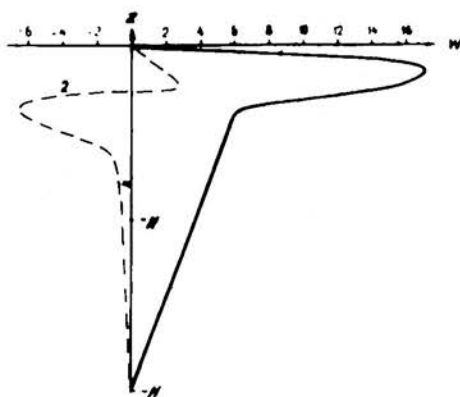


Рис. 3. Зависимость  $w$  от  $z$  при  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$

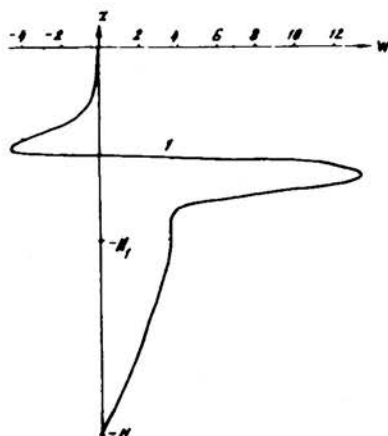


Рис. 4. Зависимость  $w$  от  $z$  при  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$

$w_0$ , так как амплитуды гармоник  $w^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) в этом случае незначительны. Поэтому вертикальная составляющая скорости короткопериодных колебаний ведет себя с глубиной примерно так же, как и в однородной жидкости.

При  $\tau > 105$  мин и  $10^{-3} \leq \epsilon \leq 5 \cdot 10^{-3}$  основные возмущения жидкости представляют - собою чисто внутренние волны. Распределение  $w(z)$  в этом случае существенно зависит от частоты колебаний и относительной разности плотности на границах верхнего слоя жидкости.

На рис. 3 изображена зависимость  $w(z)$  для момента времени, отвечающего максимальному по модулю значению  $w$  за период колебаний при  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ . Аналогичная зависимость  $w(z)$  при  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$  изображена на рис. 4.

На рис. 3 видно, что  $\max |w(z)|$  достигается за период  $\tau$  внутри верхнего слоя жидкости, в то время как в жидкости однородной  $w$  принимает максимальное значение на свободной поверхности. Для  $\tau = \tau_1$ ,  $\max |w(z)|$  достигается на глубине 10 м, а для  $\tau = \tau_2$  - на глубине 20 м. Кроме того, при  $\tau = \tau_1$  имеется одно экстремальное значение  $w(z)$  а при  $\tau = \tau_2$  - два экстремальных и одно нулевое значение (подвижный узел). Положение этого узла смещается за период  $\tau$  от глубины 12 до 22 м. Экстремальные значения  $w(z)$  наблюдаются за период  $\tau$  для  $\tau = \tau_1$  на глубинах 6-20 м и для  $\tau = \tau_2$  - на глубинах 10-25 м.

Сравнивая между собой кривые 1 на рис. 3 и 4 видим, что эпюры  $w$  для  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  и  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$  при одном и том же  $\tau = \tau_1$  принципиально отличаются друг от друга. При  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  имеется одно экстремальное значение  $w$  расположенное на глубине 10 м, а при  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$  - два экстремума, расположенных на глубинах 30 и 40 м. Максимальное значение  $w$  уменьшилось в 1,3 раза с ростом  $\epsilon$  от  $2 \cdot 10^{-3}$  до  $5 \cdot 10^{-3}$ .

Зависимость амплитуды  $A(\max |w(z)|)$  за период  $\tau$  на данной глубине) вертикальной составляющей скорости как функции от  $z$  приведена на рис. 5. Сравнивая кривые 1 и 2, видим, что с уменьшением  $\tau$  от  $\tau = \tau_2$  до  $\tau = \tau_1$ , максимальное значение амплитуды  $A$  увеличилось в 2,7 раза. При этом положение  $\max A(z)$  смещается с глубины 10 до 20 м.

На рис. 6 приведена зависимость  $\bar{A}(z)$  представляющая собою оценку максимально возможного значения амплитуды  $w(z)$ , справедливую при любом  $x$  на заданной глубине. Отсюда видно, что  $\max \bar{A}(z)$  достигается на нижней границе стратифицированного слоя жидкости. Отметим при этом, что деформация  $\bar{A}(z)$  за счет изменения  $\epsilon$  от  $2 \cdot 10^{-3}$  до

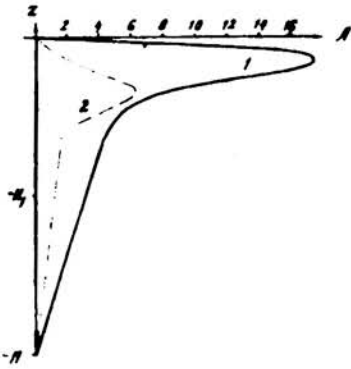


Рис. 5. Зависимость амплитуды вертикальной составляющей скорости от глубины жидкости

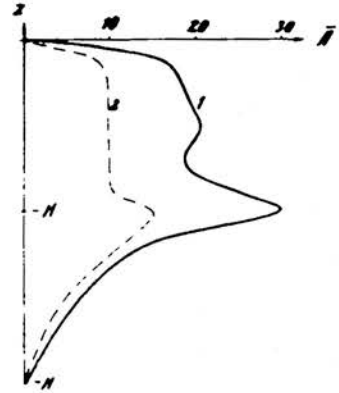


Рис. 6. Распределение  $\bar{A}$  по глубине жидкости

$5 \cdot 10^{-3}$  меньше 1%. Кроме того, в рассматриваемых случаях справедливо соотношение  $\max \bar{A}(z) = \frac{a \theta}{\rho, g}$ .

Следовательно, вертикальная составляющая скорости длиннопериодных колебаний принимает свое максимальное значение внутри стратифицированного слоя жидкости.

Проводились также расчеты горизонтальной составляющей скорости плоских волн для  $\tau = 6$  час,  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $f(x)$  вида (1.13) и значений параметров (1.14). Результаты расчетов приведены с точностью до множителя  $\frac{a}{10^2 \rho, g}$  на рис. 7.

Причем значения  $u$  даны только в верхнем слое ( $-H_1 \leq z < 0$ ), так как в нижнем слое амплитуда мала по сравнению с амплитудой на свободной поверхности и мало меняется с глубиной. На границе раздела слоев ( $z = -H_1$ ) амплитуда горизонтальной составляющей скорости примерно на 6% превышает амплитуду  $u$  на данной глубине в случае однородной жидкости. На этом рисунке кривая с номером 1 соответствует моменту времени, при котором достигается максимальное значение  $u$  за период  $\tau$  в области  $-H \leq z < 0$ , кривая с номером 2 выражает зависимость амплитуды горизонтальной составляющей скорости от глубины в фиксированной точке  $x$ , а кривая 3 представляет собою максимально возможное значение амплитуды  $u$  на заданной глубине в любой точке  $x$ .

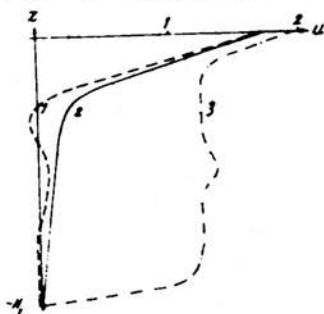


Рис. 7. Распределение горизонтальной составляющей скорости по глубине верхнего стратифицированного слоя жидкости

Из рис. 7 видно, что амплитуда горизонтальной составляющей скорости принимает максимальное значение на свободной поверхности жидкости.

Таким образом, неоднородность морской воды существенно влияет на горизонтальную составляющую скорости частиц жидкости у свободной поверхности двухслойного моря с

непрерывным изменением плотности, в то время как влияние стратификации на вертикальную составляющую скорости у свободной поверхности весьма мало.

3. Приведем теперь результаты исследования внутренних волн, возникающих под действием периодических перемещающихся давлений вида

$$p_0 = a f(x) \cos(\alpha y - \beta t). \quad (3.1)$$

Пусть выполняется условие (1.5). Для  $w_j$  и  $\zeta_j$  получим при  $r_0 > \alpha$  формулы (1.8), (1.9), где

$$A_j = \frac{\sqrt{2x} a}{\beta_j g \Delta'(m)} \eta r m^{-1} f'(m) \varphi_j, \quad (3.2)$$

$m_0 = (r_0^2 - \alpha^2)^{1/2}$ ,  $\alpha_0 = r_0 x^0 - \beta t$  направление  $o x^0$  составляет угол  $\beta_0$  ( $\lg \beta_0 = \alpha m_0^{-1}$ ) с осью  $x$  штрих означает производную по  $m$ . В этом случае зависимость  $w$  от  $z$  качественно такая же, как и в однородной жидкости, а влияние изменения  $\epsilon$  на  $w$  не превосходит 1%.

При  $r_0 < \alpha$  незатухающие с расстоянием волны не возникают. Пусть выполняется условие (1.11). Тогда

$$w_j = \beta \sum_{n=N}^{\infty} A_j(m_n, z) \cos \alpha_n, \quad \zeta_j = - \sum_{n=N}^{\infty} A_j(m_n, z_j) \sin \alpha_n, \quad (3.3)$$

где  $m_n = (r_n^2 - \alpha^2)^{1/2}$ ,  $\alpha_n = r_n x^n - \beta t$ ,  $N$  - номер наименьшего корня, удовлетворяющего неравенству  $r_n > \alpha$  ( $N > 0$ ), направление  $o x^n$  составляет угол  $\beta_n$  ( $\lg \beta_n = \alpha m_n^{-1}$ ) с осью  $x$ ,  $A_j$  определяются формулой (3.2),  $\Delta$  и  $\varphi_j$  такие же, как в выражении (1.12).

Из формул (3.3) видно, что свободная поверхность и поверхность раздела слоев ( $z = -H_j$ ) представляют собою суперпозицию бесконечного числа волн. Длины и скорости этих волн, а также углы  $\beta_n$  ограничены сверху величинами  $\lambda_n = 2x r_n^{-1}$ ,  $v_n = \beta r_n^{-1}$ ,  $\beta_n = \arctg \alpha m_n^{-1}$ . Зависимость  $v_n$  и  $\lambda_n$  ( $n = N, N+1, \dots$ ) от  $\epsilon$  такая же, как и в случае давлений (1.1) (табл.1). Величины углов  $\beta_n$  увеличиваются с ростом  $\epsilon$ . Например, при  $\beta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$ ,  $\alpha = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  и значениях параметров (1.14) изменение  $\epsilon$  от  $10^{-3}$  до  $5 \cdot 10^{-3}$  привело к увеличению  $\beta_1$  с  $8^{\circ}15'$  до  $23^{\circ}05'$ , а  $\beta_2$  с  $3^{\circ}15'$  до  $8^{\circ}$ .

Гармоники  $w^n$  ведут себя с глубиной качественно (при  $r_n \gg \alpha$  и количественно) так же, как и гармоники в плоском случае давлений (1.11) (рис.1,2).

Отметим, что при  $r_0 > \alpha$  ( $N=0$ ) волновое движение представляет собою сумму поверхностных и внутренних волн, а при  $r_0 < \alpha$



( $N \geq 1$ ) - только сумму внутренних волн, так как гармоники с номерами, меньшими  $N$ , в волновом движении отсутствуют.

Таблица 1

Влияние неоднородности жидкости на скорость и длину поверхностных волн

$U^M/\text{сек}$	$\lambda_m$	$\varepsilon$	$b \text{ сек}$
130,17	16349	0	$5 \cdot 10^{-3}$
130,16	16348	$10^{-3}$	
118,17	10601	0	$7 \cdot 10^{-3}$
118,16	10600	$10^{-3}$	

При длине волны давлений  $\bar{\lambda} = \frac{2x}{\alpha}$ , близкой к длине волны  $N$ -й гармоники  $\lambda_n = \frac{2x}{r_n}$ , основной вклад в волновое движение будет давать  $w^n(z)$ , так как амплитуда этой гармоники пропорциональна множителю  $\left[1 - \left(\frac{\lambda_n}{\bar{\lambda}}\right)^2\right]^{-1/2} (\bar{\lambda} > \lambda_n)$ . Таких резонансных длин волн давлений  $\bar{\lambda}$  на одной частоте существует бесконечное число, в то

время как в однородной жидкости для данного значения  $b$  имеется только одна резонансная длина волны давлений. В случае давлений (1.1) при аналогичных условиях резонансных явлений не наблюдается.

Для  $\tau_0 \gg \alpha$  картина изменения  $w$  по глубине жидкости будет примерно такой же, как и в плоском случае давлений (1.1).

4. Пусть теперь по свободной поверхности перемещается периодическая система давлений вида

$$p_0 = a \cos(rx - bt). \quad (4.1)$$

Тогда

Таблица 2

Зависимость скорости и длины внутренних волн от изменения плотности ( $\varepsilon$ ) в верхнем слое

$$\begin{aligned} w_j &= b A_j(r, z) \sin(rx - bt), \\ \zeta_j &= A_j(r, z_j) \cos(rx - bt), \\ A_j &= \frac{a}{\rho_j g} q \Delta^{-1} \varepsilon_j, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$n$	$U_n^M/\text{сек}$	$\lambda_n \text{ м}$	$\varepsilon$
0	143,061	898426	$10^{-3}$
	143,060	898425	$5 \cdot 10^{-3}$
1	0,4644	2,916,8	$10^{-3}$
	1,1067	8702,3	$5 \cdot 10^{-3}$
2	0,1599	1004,4	$10^{-3}$
	0,3618	2272,0	$5 \cdot 10^{-3}$

где при выполнении условия (1.5)  $\Delta$  и  $\varepsilon_j$  определяются формулами (1.9), а при выполнении условия (1.11) - те же, что и в выражении (1.12).

Амплитуды волн (4.2) пропорциональны множителю  $\Delta^{-1}(r)$ . Если волновое число давлений совпадает со значением корня уравнения  $\Delta(r) = 0$ , то имеет место явление резонанса. При  $b$ , удовлетворяющих условию (1.5), существует только одна

резонансная длина волны давлений  $\bar{\lambda}$ , так как уравнение  $\Delta(\pi) = 0$  при таких значениях  $\sigma$  имеет только один корень  $\tau_0 > 0$ . Вертикальная составляющая скорости  $w$  при  $\sigma > 2\omega$ ,  $\sigma > \sqrt{kg}$ , как и в однородной жидкости непрерывно затухает с глубиной, а влияние неоднородности на амплитуду меньше 1%.

При условии (1.11) уравнение  $\Delta(\pi) = 0$  имеет бесконечное число положительных корней  $\tau_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Поэтому существует и бесконечный спектр резонансных длин волн давлений. Распределение  $w(z)$  по глубине жидкости в этом случае существенно зависит от длины волны давлений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л.Н. О направленном излучении волн из области, подверженной внешнему давлению. ПММ, т.20, № 3, 1956.
2. Войт С.С. Волны на поверхности раздела двух жидкостей, возникающие от перемещающейся периодической системы давлений.- Тр. МГИ АН СССР, т.17, 1958.
3. Черкесов Л.В. Волны в неоднородной жидкости от периодических поверхностных возмущений. "Изв. АН СССР", Физика атмосферы и океана, т. 1, № 5, 1965.
4. Тер-Крикоров А.М. О внутренних волнах в неоднородной жидкости. ПММ, т.26, № 3, 1962.
5. Тареев Б.А. К динамике внутренних гравитационных волн в непрерывно стратифицированном океане. "Изв. АН СССР", Физика атмосферы и океана, т.2, № 10, 1966.
6. Марчук Г.И., Каган Б.А. К динамике внутренних гравитационных волн в непрерывно стратифицированном океане. "Изв. АН СССР", Физика атмосферы и океана, т.6, № 4, 1970.
7. Абрашина Н.Н., Черкесов Л.В. Внутренние волны от периодических поверхностных возмущений в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью. В кн.: Морские гидрофизические исследования, № 2(48). Севастополь, изд. МГИ АН УССР 1970.
8. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Внутренние волны от периодических поверхностных возмущений. "Изв. АН СССР", Физика атмосферы и океана, т. 7, № 6, 1971.
9. Fjeldstad I.E. Interne Wellen. Geofysiske Publikasjoner, 10, 6, 1933.

10. Krauss W. *Interne Wellen in einem exponentiell geschichteten Meer*. Kieler Meersforsch., 20, 2, 1964.

A.E.BUKATOV

ON INTERNAL WAVES IN A CONTINUOUSLY  
STRATIFIED OCEAN

The paper presents an investigation of internal waves arising in a non-uniform fluid under the action of periodic atmospheric disturbances, Coriolis force being taken into account. Density of fluid continuously changes with depth according to the law corresponding to a two-layer model with the stratified upper layer and the uniform lower layer.