

«Утверждаю»

Первый проректор –
проректор по научной работе
Российского университета
дружбы народов



Н.С. Кирабаев

2017 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации

на диссертационную работу Пахомовой Анастасии Сергеевны «Отношения типа Штейнера метрических пространств», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Диссертационная работа Пахомовой Анастасии Сергеевны посвящена изучению одной из классических геометрических оптимизационных задач — задачи о минимальных сетях в метрических пространствах, а также исследованию отношений типа Штейнера метрических пространств. В диссертационной работе рассматриваются три класса минимальных сетей: минимальные остовные деревья, минимальные деревья Штейнера и минимальные заполнения конечных метрических пространств. Отношения типа Штейнера — это характеристики метрического пространства, позволяющие оценить, насколько «хорошими» приближениями друг для друга служат минимальные сети из разных классов. Универсальные методы для нахождения значений отношений типа Штейнера в настоящее время не разработаны. Вычисление значения отношения типа Штейнера в каждом конкретном случае является отдельной содержательной задачей. Много работ российских и зарубежных авторов посвящены оценкам

отношений типа Штейнера метрических пространств с теми или иными заданными свойствами. Только иногда удается вычислить точное значение отношений типа Штейнера для конкретных пространств. Несмотря на интерес, который представляют отношения типа Штейнера для теоретических и прикладных исследований, их свойства еще недостаточно хорошо изучены. Ввиду вышесказанного тематика диссертации является актуальной.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка публикаций по теме диссертации и списка литературы.

Во введении автор описывает историю вопроса и обосновывает актуальность темы исследования. Приводятся сведения об использованных методах исследования и сведения об апробации работы и публикациях автора по теме диссертации.

В первой главе диссертационной работы вводятся необходимые определения и обозначения. Даются определения отношения Штейнера, отношения Штейнера-Громова и суботношения Штейнера – ключевых объектов исследования диссертационной работы. Также сформулированы определения n -точечных аналогов этих отношений для фиксированного натурального n . Во втором разделе первой главы сформулированы некоторые вспомогательные утверждения, которые используются в последующих главах.

Во второй главе изучается вопрос о возможных значениях отношений типа Штейнера произвольного метрического пространства. Одним из основных результатов второй главы является теорема о точных оценках для отношений типа Штейнера. Доказано, что отношение типа Штейнера всегда не меньше $\frac{1}{2}$ и не больше 1. Вторым значимым результатом главы является теорема существования метрического пространства с заданным значением отношения типа Штейнера. В ходе доказательства теоремы показано, как для данного $s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ построить метрическое пространство, для которого отношение типа Штейнера равно s . В последнем разделе второй главы приведено много примеров и интересных следствий. Показано, что n -точечное отношение Штейнера-Громова для

пространств, содержащих правильный симплекс с n вершинами, равно минимально возможному значению. Вычислено значение отношения Штейнера-Громова для пространств l_p и l_∞ , для пространства непрерывных функций с супремум-нормой и интегральной нормой и для некоторых других пространств.

Третья глава посвящена изучению метрических пространств, значение Штейнера-Громова которых равно максимально возможному значению, то есть единице. Эти пространства представляет особый интерес для исследования, так как в таких пространствах все рассматриваемые классы минимальных сетей совпадают. Это обстоятельство позволяет изучать только простейший класс сетей, минимальные остовные деревья, распространяя их свойства на два других класса. Ключевым результатом главы является теорема классификации данных пространств. Показано, что все такие пространства либо изометричны подмножеству евклидовой прямой, либо изометричны четырехточечному пространству определенного вида.

В четвертой главе рассматривается пространство классов изометрий всех компактных метрических пространств, снабженное метрикой Громова-Хаусдорфа. Отношения типа Штейнера рассматриваются как функции, сопоставляющие компактному метрическому пространству значение его отношения типа Штейнера. Изучается вопрос непрерывности этих функций. Первым значимым результатом четвертой главы является теорема, гласящая, что любое отношение типа Штейнера является полунепрерывным сверху во всех точках. Вторым значимым результатом четвертой главы является критерий непрерывности отношений типа Штейнера. Показано, что компактное метрическое пространство является точкой непрерывности отношения типа Штейнера в том и только том случае, если значение отношения типа Штейнера для данного пространства равно $\frac{1}{2}$. Аналогичные теоремы сформулированы и доказаны для n -точечных отношений типа Штейнера. В последнем разделе четвертой главы изучается вопрос о мощности множества точек непрерывности. Показано, что множество точек непрерывности отношения Штейнера и

отношения Штейнера-Громова всюду плотно в пространстве Громова-Хаусдорфа. Для суботношения Штейнера доказано более слабое утверждение: множество его точек непрерывности либо пусто, либо всюду плотно в пространстве Громова-Хаусдорфа.

Диссертация хорошо оформлена, содержит исчерпывающий обзор предыдущих результатов и возможных направлений дальнейшего исследования. Все утверждения строго доказаны. В работе приведено большое количество примеров и интересных конструкций. Отдельно хочется отметить результаты, полученные в последней главе. Так, например, из теоремы 29 и теоремы 30 следует, что в окрестности любого метрического компакта существует компакт, отношение типа Штейнера которого равно $\frac{1}{2}$. Это, по-видимому, объясняет, почему так трудно дается вычисление отношений в промежуточных случаях, то есть для пространств, отношение типа Штейнера которых строго больше $\frac{1}{2}$ и строго меньше 1. Полученные в диссертации результаты являются новыми.

Результаты диссертации прошли необходимую апробацию, докладывались на российских и международных конференциях. По теме диссертации опубликованы три статьи в журналах из списка ВАК, а также несколько тезисов. Результаты диссертации могут быть интересны для специалистов в области метрической геометрии, дифференциальной геометрии, дискретной геометрии, геометрических оптимизационных задач, вариационного исчисления, теории минимальных сетей, дискретной математики и теории графов. Диссертационная работа соответствует специальности 01.01.04 (геометрия и топология).

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Имеются некоторые замечания.

1. В тексте диссертации тридцать одно утверждение названо теоремой. Было бы естественнее выделить в теоремы только пять-шесть основных результатов диссертации (см. стр. 8), а остальные утверждения назвать как-нибудь по-другому (следствия, предложения, леммы и т.д.)

2. В формулировке теоремы 28 (стр. 51) допущены две опечатки. Во-первых, неверно написано слово «обозначает», а во-вторых вместо функции r указана функция с индексом r_n .

3. В работе имеются и другие опечатки. Например, на стр. 52 допущена опечатка в слове «непрерывности» (9 строка сверху), в слове «возникает» (13 строка сверху) и т.д.

Высказанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы.

Таким образом, диссертационная работа А.С. Пахомовой «Отношения типа Штейнера метрических пространств» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям, а ее автор Анастасия Сергеевна Пахомова заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры нелинейного анализа и оптимизации факультета физико-математических и естественных наук ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» 4 апреля 2017 г., протокол № 0200-02-04/8.

Декан факультета физико-математических
и естественных наук РУДН



Л.Г. Воскресенский

Заведующий кафедрой нелинейного анализа
и оптимизации РУДН



А.В. Арутюнов