ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 7, с. 1109–1127

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ, РАЗРУШЕНИЕ И ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ. III. ЗАДАЧИ КОШИ[1)]

 М. О. Корпусов[1,*], Е. А. Овсянников[1,2,]**

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

[2] 115409 Москва, Каширское ш., 31, НИЯУ “МИФИ”, Россия

* e-mail: korpusov@gmail.com

** e-mail: evg.bud@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.
Переработанный вариант 03.03.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Рассматриваются три задачи Коши для уравнений соболевского типа из теории ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, объединенных общей линейной частью. Данные задачи сводятся к эквивалентным интегральным уравнениям. Для двух задач доказывается существование непродолжаемых решений, а для третьей — существование локального во времени решения. Для одной из задач модифицированным методом Х.А. Левина получены достаточные условия разрушения решения за конечное время и найдена оценка сверху на время разрушения решения. Для другой задачи методом нелинейной емкости С.И. Похожаева получен результат о разрушении решения за конечное время и два результата об отсутствии даже локальных решений, а также получена оценка сверху для времени разрушения решения. Библ. 5.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466923070074, **EDN:** VSVMLH

1. ЗАДАЧА КОШИ 1

Настоящая статья продолжает исследования, начатые в работах [1] и [2], и является их логическим продолжением. В этом разделе мы рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(\Delta u(x,t) - u(x,t)\big) + \sum_{j=1}^{3} \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{1.1}$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$,

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.2}$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (1.1), (1.2).

Определение 1. Функция $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0,T]\right)$ при $\beta_1 \geqslant 0$, удовлетворяющая задаче (1.1), (1.2) поточечно, называется *классическим решением задачи Коши*.

[1)]Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и программы стратегического академического лидерства РУДН.

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$
\begin{gathered}
u(x,t) = -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\frac{\partial u^2(y,\tau)}{\partial \tau}dyd\tau + \\
+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t}[\Delta_y u_0(y) - u_0(y)]dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)[\Delta_y u_1(y) - u_1(y)]dy.
\end{gathered} \tag{1.3}
$$

Сделаем в этом интегральном уравнении замену

$$
v(x,t) = (1+|x|^2)^{\beta_1/2}u(x,t), \quad \beta_1 \geqslant 0. \tag{1.4}
$$

Тогда интегральное уравнение (3) примет следующий вид:

$$
v(x,t) = -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1,2\beta_1}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t)}{\partial t}\mu(y)dy + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1,\beta_3}(x,y,t)\nu(y)dy, \tag{1.5}
$$

$$
G_{\beta_1,2\beta_1}(x,y,t-\tau) = \frac{\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2}}{\left(1+|y|^2\right)^{2\beta_1/2}}\mathscr{E}(x-y,t-\tau), \quad \beta_1 \geqslant 0,
$$

$$
G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t) = \frac{\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2}}{\left(1+|y|^2\right)^{\beta_2/2}}\mathscr{E}(x-y,t), \quad \beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0,
$$

$$
G_{\beta_1,\beta_3}(x,y,t) = \frac{\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2}}{\left(1+|y|^2\right)^{\beta_3/2}}\mathscr{E}(x-y,t), \quad \beta_3 \geqslant \beta_1 \geqslant 0,
$$

$$
\rho(x,t) = \frac{\partial v^2(x,t)}{\partial t}, \quad \mu(x) = \left(1+|x|^2\right)^{\beta_2/2}[\Delta_x u_0(x) - u_0(x)],
$$

$$
\nu(x) = \left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2}[\Delta_x u_1(x) - u_1(x)].
$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Если* $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ *при* $\alpha \in (0,1)$, *то* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ *и справедлива оценка*

$$
\sup_{t\in[0,T]} |\rho_2(x,t) - \rho_1(x,t)|_{\alpha} \leqslant h(R)\|v_2 - v_1\|_{1,\alpha,T}, \tag{1.6}
$$

$$
\|w\|_{1,\alpha,T} := \sup_{t\in[0,T]}\left[|w(x,t)|_{\alpha} + \left|\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{\alpha}\right],
$$

$$
h(R) = 4R, \quad R = \max\left\{\|v_1\|_{1,\alpha,T}, \|v_2\|_{1,\alpha,T}\right\}, \tag{1.7}
$$

$$
\rho_j(x,t) = \frac{\partial v_j^2(x,t)}{\partial t}, \quad j = 1,2.
$$

Доказательство. Шаг 1. Сначала докажем, что при условиях леммы $\rho(x,t) \in \mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$. Действительно, для любого $t \in [0,T]$ имеем

$$
\begin{gathered}
\rho(x,t) = 2v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}, \\
|\rho(x,t)|_{\alpha} \leqslant 2\sup_{t\in[0,T]}|v(x,t)|_{\alpha}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{\alpha} < +\infty.
\end{gathered} \tag{1.8}
$$

Справедлива следующая цепочка неравенств для любых $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$:

$$\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1) = 2v(x,t_2)\left(\frac{\partial v(x,t_2)}{\partial t} - \frac{\partial v(x,t_1)}{\partial t}\right) + 2\frac{\partial v(x,t_1)}{\partial t}[v(x,t_2) - v(x,t_1)],$$

из которой вытекает неравенство

$$\begin{gathered}|\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1)|_\alpha \leqslant 2\sup_{t\in[0,T]}|v(x,t)|_\alpha\left|\frac{\partial v(x,t_2)}{\partial t} - \frac{\partial v(x,t_1)}{\partial t}\right|_\alpha + \\ + 2\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_\alpha |v(x,t_2) - v(x,t_1)|_\alpha \to +0\end{gathered} \tag{1.9}$$

при $|t_2 - t_1| \to +0$. Из (1.8) и (1.9) вытекает, что $\rho(x,t) \in \mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{C}^\alpha\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$.

Шаг 2. Докажем неравенство (1.6). Действительно, справедливо равенство

$$\rho_2(x,t) - \rho_1(x,t) = 2v_2(x,t)\left(\frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}\right) + 2\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}[v_2(x,t) - v_1(x,t)],$$

из которого вытекает оценка

$$\begin{gathered}\sup_{t\in[0,T]}|\rho_2(x,t) - \rho_1(x,t)|_\alpha \leqslant 2\sup_{t\in[0,T]}|v_2(x,t)|_\alpha \sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}\right|_\alpha + \\ + 2\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}\right|_\alpha \sup_{t\in[0,T]}|v_2(x,t) - v_1(x,t)|_\alpha.\end{gathered} \tag{1.10}$$

С учетом определения нормы (1.7) из (1.10) вытекает оценка (1.6).

Справедлива следующая

Лемма 2. *В классе функций* $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^\alpha\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\min\{\beta_2,\beta_3\} \geqslant \beta_1 \geqslant 0$ *при условии, что* $\mu(x), \nu(x) \in \mathbb{C}^\alpha\left(\mathbb{R}^3\right)$, *правая часть интегрального уравнения* (1.5) *принадлежит классу* $\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^\alpha\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$. *Кроме того, справедливо равенство*

$$\begin{gathered}\frac{\partial H[v](x,t)}{\partial t} = -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial G_{\beta_1,2\beta_1}(x,y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dyd\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^2 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t)}{\partial t^2}\mu(y)dy + \int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial G_{\beta_1,\beta_3}(x,y,t)}{\partial t}\nu(y)dy, \\ H[v](x,t) := -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}G_{\beta_1,2\beta_1}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t)}{\partial t}\mu(y)dy + \int_{\mathbb{R}^3}G_{\beta_1,\beta_3}(x,y,t)\nu(y)dy.\end{gathered} \tag{1.11}$$

Доказательство основано на теоремах 1 и 2 статьи [2], а также на лемме 1.

Наконец, справедлива

Теорема 1. *Если* $\alpha \in (0,1)$, $\min\{\beta_2,\beta_3\} \geqslant \beta_1 \geqslant 0$, *то для любых* $\mu(x), \nu(x) \in \mathbb{C}^\alpha\left(\mathbb{R}^3\right)$ *найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(\mu,\nu) > 0$, *что для любого* $T \in (0,T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (1.5) *в классе* $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^\alpha\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в этом последнем случае справедливо предельное свойство*

$$\sup_{T\uparrow T_0}\|v\|_{1,\alpha,T} = +\infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Прежде всего заметим, что интегральное уравнение (1.5) можно переписать в виде

$$v(x,t) = H[v](x,t),$$

где оператор $H[v](x,t)$ определен равенством (1.11) и в силу результата леммы 2 действует следующим образом:

$$H[v](x,t):\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\to\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right). \tag{1.12}$$

Шаг 2. Заметим, что в силу оценки (1.4) теоремы 1 статьи [2] и оценки (1.6) леммы 1 справедлива оценка

$$\begin{gathered}\left\|H[v_1](x,t)-H[v_2](x,t)\right\|_{1,\alpha,T}\leqslant Td_0(T)\sup_{t\in[0,T]}\left|\rho_1(x,t)-\rho_2(x,t)\right|_{\alpha}\leqslant Td_0(T)h(R)\left\|v_1-v_2\right\|_{1,\alpha,T},\\ h(R)=4R,\quad R=\max\left\{\left\|v_1\right\|_{1,\alpha,T},\left\|v_2\right\|_{1,\alpha,T}\right\}.\end{gathered} \tag{1.13}$$

Шаг 3. Рассмотрим следующий шар:

$$B_R:=\left\{w(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right):\left\|w\right\|_{1,\alpha,T}\leqslant R\right\}.$$

Пусть $\mu(x),\nu(x)\in\mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$ – произвольные фиксированные. Тогда найдется настолько большое $R>0$, что справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\left\|f_0(x,t)\right\|_{1,\alpha,T}\leqslant\frac{R}{2},\\ f_0(x,t):=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t)}{\partial t}\mu(y)dy+\int_{\mathbb{R}^3}G_{\beta_1,\beta_3}(x,y,t)\nu(y)dy.\end{gathered} \tag{1.14}$$

Положим в оценке (1.13) $v_1(x,t)=v(x,t)\in B_R$ и $v_2(x,t)=0$. Тогда получим цепочку неравенств

$$\begin{gathered}\left\|H_1[v](x,t)\right\|_{1,\alpha,T}\leqslant Td_0(T)4\left\|v(x,t)\right\|^2_{1,\alpha,T}\leqslant Td_0(T)4R^2\leqslant\frac{R}{2},\\ H_1[v](x,t):=-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}G_{\beta_1,(q+1)\beta_1}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau\end{gathered} \tag{1.15}$$

при достаточно малом $T>0$ таком, что выполнено неравенство

$$Td_0(T)4R\leqslant\frac{1}{2}. \tag{1.16}$$

Из (1.14) и (1.15) при выполнении условия (1.16) с учетом (1.12) вытекает, что

$$H[v](x,t):B_R\to B_R.$$

Наконец, из оценки (1.13) при выполнении условия (1.16) получаем неравенство

$$\left\|H[v_1](x,t)-H[v_2](x,t)\right\|_{1,\alpha,T}\leqslant\frac{1}{2}\left\|v_1-v_2\right\|_{1,\alpha,T}$$

для любых $v_1(x,t),v_2(x,t)\in B_R$, т.е. оператор $H[v](x,t)$ является сжимающим на шаре B_R. Отсюда вытекает существование единственного решения $v(x,t)$ интегрального уравнения (1.5) в шаре $B_R\subset\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ при достаточно большом $R>0$ и для достаточно малого $T>0$.

Шаг 4. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (1.5) в классе $\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ (см., например, [3]), приходим к утверждению теоремы.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Если* $\alpha\in(0,1)$, $\min\{\beta_2,\beta_3\}\geqslant\beta_1\geqslant0$, *то для любых* $u_0(x)\in\mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3\right)$ *и* $u_1(x)\in\mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2};\mathbb{R}^3\right)$ *найдется такое максимальное* $T_0=T_0(u_0,u_1)>0$, *что для любого* $T\in(0,T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (1.3) *в классе*

$$u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2};\mathbb{R}^3\right)\right),$$

причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом последнем случае справедливо предельное свойство

$$\sup_{T\uparrow T_0}\left\|\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2} u(x,t)\right\|_{1,\alpha,T} = +\infty.$$

Наконец, справедлива следующая

Теорема 3. *Если* $\alpha \in (0,1)$, $\min\{\beta_2,\beta_3\} \geqslant \beta_1 \geqslant 0$, *то для любых* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3\right)$ *и* $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2};\mathbb{R}^3\right)$ *найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(u_0,u_1) > 0$, *что для любого* $T \in (0,T_0)$ *существует единственное классическое решение задачи Коши* (1.1), (1.2) *в смысле определения* 1 *в классе* $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2};\mathbb{R}^3\times[0,T]\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}\left([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в этом последнем случае справедливо предельное свойство*

$$\sup_{T\uparrow T_0}\left\|\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2} u(x,t)\right\|_{1,\alpha,T} = +\infty.$$

Доказательство. Заметим, что, с одной стороны, всякое классическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) в силу третьей формулы Грина (9.1) из [1] удовлетворяет интегральному уравнению (1.3). С другой стороны, решение интегрального уравнения единственно при указанных условиях на начальные функции в классе, сформулированном в условиях теоремы 2. Рассмотрим следующую функцию:

$$\rho_0(x,t) = \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t},$$

где $u(x,t)$ – решение интегрального уравнения (1.3). Поэтому в силу (1.4) справедливо равенство

$$\rho_0(x,t) = \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1}}\frac{\partial v^2(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1}}\rho(x,t),$$

причем для функции $\rho(x,t)$ справедливо утверждение леммы 1. Очевидно, что справедливо неравенство

$$2\beta_1 \geqslant \beta_1 \geqslant 0.$$

С учетом обозначений (1.90), (1.91) статьи [1] интегральное уравнение (1.3) можно представить в виде

$$u(x,t) = L(x,t),$$

где функция $L(x,t)$ определена равенством (1.106) из [1]. Но тогда в силу теоремы 5 статьи [2] приходим к выводу о том, что $u(x,t)$ является классическим решением задачи Коши (1.1), (1.2) в смысле определения 1. Из той же теоремы 5 из [2] найденное единственное классическое решение задачи Коши принадлежит к указанному в формулировке теоремы классу гладкости.

Теперь изучим вопрос о достаточных условиях, при которых в теореме 3 $T_0 < +\infty$, т.е. классическое решение рассматриваемой задачи Коши разрушается за конечное время. Справедлива следующая вспомогательная

Лемма 3. *Если* $\alpha \in (0,1)$ *и*

$$f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_4/2};\mathbb{R}^3\right), \quad u_0(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3\right)$$

при условиях

$$2\beta_2 \geqslant \beta_4 \geqslant \beta_3 \geqslant 0, \tag{1.17}$$

существует единственное решение линейного уравнения

$$\Delta u_1(x) - u_1(x) = -u_0^2(x) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.18}$$

в классе $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3\right)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что справедливо следующее неравенство:

$$\left|u_0^2(x_1) - u_0^2(x_2)\right| \leqslant 2\max\{|u_0(x_1)|, |u_0(x_2)|\}|u_0(x_1) - u_0(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3,$$

из которого и того, что $u_0(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$, получаем

$$u_0^2(x), \quad f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Поэтому в рассматриваемом классе дифференциальное уравнение (1.18) эквивалентно интегральному уравнению

$$u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|}\left[u_0^2(y) - f(y)\right]dy. \tag{1.19}$$

Интегральное уравнение (1.19) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2} u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2}}{\left(1+|y|^2\right)^{\beta_4/2}}\left[\left(1+|y|^2\right)^{\beta_4/2} u_0^2(y) - \left(1+|y|^2\right)^{\beta_4/2} f(y)\right]dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2}}{\left(1+|y|^2\right)^{\beta_4/2}}\left[v_0^2(y) - \left(1+|y|^2\right)^{\beta_4/2} f(y)\right]dy, \tag{1.20}$$

$$v_0(x) = \left(1+|x|^2\right)^{\beta_4/4} u_0(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right),$$

поскольку

$$\beta_2 \geqslant \frac{\beta_4}{2}.$$

Поэтому

$$v_0^2(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Кроме того,

$$\left(1+|x|^2\right)^{\beta_4/2} f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right).$$

В силу результата теоремы 9 статьи [2] из равенства (1.20) приходим к выводу о том, что при условиях (1.17) выполнено соотношение

$$\left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2} u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right), \quad \alpha \in (0,1),$$

т.е. справедливо утверждение леммы.

Теперь сделаем важное предположение для дальнейших рассуждений. Пусть выполнены неравенства

$$\beta_2 \geqslant \beta_1 > \frac{3}{2}, \quad 2\beta_2 \geqslant \beta_4 \geqslant \beta_3 \geqslant \beta_1 > \frac{3}{2}. \tag{1.21}$$

Нетрудно заметить, что такие β_1, β_2, β_3, β_4 существуют. Действительно, можно взять, например, следующий набор этих чисел:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 > \frac{3}{2} \Rightarrow 2\beta_2 > \beta_4 = \beta_3 = \beta_1.$$

Пусть выполнены все условия теоремы 3 при условиях (1.21). Тогда, в частности, существует классическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) в смысле определения 1 в классе

$$u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3 \times [0,T]\right), \quad T \in (0,T_0), \quad \beta_1 > \frac{3}{2}. \tag{1.22}$$

Тогда в этом классе можно проинтегрировать уравнение (1.1) по времени и с учетом того, что начальное условие $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2}; \mathbb{R}^3\right)$ определяется по начальному условию $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3\right)$ и произвольной функции $f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_4/2}; \mathbb{R}^3\right)$ как единственное решение уравнения (1.18), в результате получим следующее интегродифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u(x,t) - u(x,t)\right) + \sum_{j=1}^{3} \omega_j^2 \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x_j^2} d\tau + u^2(x,t) = f(x). \tag{1.23}$$

В классе (1.22) определены функционалы

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\|D_x u(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u(x,t)\|_2^2, \quad J(t) = \|D_x u'(x,t)\|_2^2 + \|u'(x,t)\|_2^2, \tag{1.24}$$

где

$$\|w(x,t)\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |w(x,t)|^p dx\right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

Справедлива следующая (см., например, [4])

Лемма 4. *Если функция $u(x,t)$ принадлежит классу* (1.22), *то для функционалов* (1.24) *справедливо обыкновенное дифференциальное неравенство*

$$(\Phi'(t))^2 \leqslant 2\Phi(t)J(t) \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \tag{1.25}$$

В классе (1.22) функций $u(x,t)$ умножим уравнение (1.23) на $u(x,t)$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}^3$. После интегрирования по частям получим равенство

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{3} \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_j}(x,t) u_{x_j}(x,\tau)\, dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} f(x)u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^3(x,t)dx. \tag{1.26}$$

Теперь в том же классе функций $u(x,t)$ умножим уравнение (1.23) на функцию $u'(x,t)$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}^3$. После интегрирования по частям получим равенство

$$J(t) + \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)u(x,t)dx + \sum_{j=1}^{3} \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u_{x_j}(x,\tau) u'_{x_j}(x,t)\, dx d\tau = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} u^3(x,t)dx. \tag{1.27}$$

Подставим выражение для

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^3(x,t)dx$$

из (1.26) в равенство (1.27) и в результате получим равенство

$$J(t) = \frac{1}{3}\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} \omega_j^2 \left\|D_{x_j} u\right\|_2^2 - \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} \omega_j^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u'_{x_j}(x,t) u_{x_j}(x,\tau)\, dx d\tau - \frac{2}{3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)u'(x,t)dx. \tag{1.28}$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} \omega_j^2 \left\|D_{x_j} u\right\|_2^2 \leqslant \omega_0^2 \frac{2}{3}\Phi(t), \quad \omega_0^2 = \sum_{j=1}^{3} \omega_j^2, \tag{1.29}$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}\omega_j^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}u'_{x_j}(x,t)u_{x_j}(x,\tau)dxd\tau \leqslant \omega_0^2\frac{2}{3}\int_0^t\|D_xu\|_2(\tau)\|D_xu'\|_2(t)d\tau \leqslant \\
\leqslant \omega_0^2\frac{2}{3}\left(\int_0^t\|D_xu\|_2^2(\tau)d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t\|D_xu'\|_2^2(t)d\tau\right)^{1/2} \leqslant \omega_0^2\frac{2}{3}t^{1/2}J^{1/2}(t)\left(2\int_0^t\Phi(\tau)d\tau\right)^{1/2} \leqslant \\
\leqslant \delta J(t)+\frac{1}{4\delta}\omega_0^4\left(\frac{2}{3}\right)^2 2T\int_0^t\Phi(\tau)d\tau = \delta J(t)+T\frac{1}{2\delta}\omega_0^4\left(\frac{2}{3}\right)^2\int_0^t\Phi(\tau)d\tau,
\end{gathered}
\tag{1.30}
$$

$$
-\frac{2}{3}\int_{\mathbb{R}^3}f(x)u'(x,t)dx \leqslant \frac{2}{3}\|u'\|_2\|f\|_2 \leqslant \delta J(t)+\frac{1}{4\delta}\left(\frac{2}{3}\right)^2\|f\|_2^2.
$$

Таким образом, из равенства (1.28) с учетом оценок (1.29), (1.30) вытекает неравенство

$$
\begin{gathered}
(1-2\delta)J(t) \leqslant \frac{1}{3}\Phi''(t)+\omega_0^2\frac{2}{3}\Phi(t)+ \\
+T\frac{1}{2\delta}\omega_0^4\left(\frac{2}{3}\right)^2\int_0^t\Phi(\tau)d\tau+\frac{1}{4\delta}\left(\frac{2}{3}\right)^2\|f\|_2^2 \quad \text{при} \quad \delta\in(0,1/2).
\end{gathered}
\tag{1.31}
$$

Из неравенств (1.25) и (1.31) при $\delta\in(0,1/2)$ вытекает неравенство

$$
\frac{3}{2}(1-2\delta)(\Phi'(t))^2 \leqslant \Phi(t)\Phi''(t)+2\omega_0^2\Phi^2(t)+T\frac{1}{\delta}\omega_0^4\frac{2}{3}\Phi(t)\int_0^t\Phi(\tau)d\tau+\frac{1}{\delta}\frac{1}{3}\|f\|^2\Phi(t). \tag{1.32}
$$

Перепишем интегродифференциальное неравенство (1.32) в следующем общем виде:

$$
\Phi(t)\Phi''(t)-\alpha(\Phi'(t))^2+\beta\Phi^2(t)+\gamma_1\Phi(t)+\gamma_2T\Phi(t)\int_0^t\Phi(s)ds \geqslant 0, \quad t\in[0,T], \tag{1.33}
$$

где

$$
\alpha=\frac{3}{2}(1-2\delta), \quad \beta=2\omega_0^2, \quad \gamma_1=\frac{1}{\delta}\frac{1}{3}\|f\|^2, \quad \gamma_2=\frac{1}{\delta}\omega_0^4\frac{2}{3}.
$$

Потребуем выполнения неравенства

$$
\alpha>1\Rightarrow\delta\in\left(0,\frac{1}{6}\right).
$$

В коэффициенты интегродифференциального неравенства (1.33) входит параметр δ, который нам нужно выбрать оптимальным. Выберем его таким образом, чтобы коэффициент

$$
\frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}
$$

принял минимальное значение. Справедливо следующее равенство:

$$
\frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}=\frac{2}{9}\|f\|_2^2\frac{1}{\delta(1-2\delta)}.
$$

Отметим, что минимальное значение функции

$$
g(x)=\frac{1}{x(1-2x)}
$$

достигается в точке $x=1/4$. Итак, выберем $\delta>0$ следующим образом:

$$
\delta=\frac{1}{6}-\delta_1,
$$

где $\delta_1 \in (0, 1/6)$ – сколь угодно мало. Потребуем выполнения неравенств

$$\Phi_0 := \Phi(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[u_0^2(x) + |D_x u_0(x)|^2\right]dx > 0, \tag{1.34}$$

$$\Phi_1 := \Phi'(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[u_0(x)u_1(x) + (D_x u_0(x), D_x u_1(x))\right]dx > 0. \tag{1.35}$$

Неравенство (1.34) выполнено для нетривиальной функции

$$u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3\right). \tag{1.36}$$

Более детально рассмотрим неравенство (1.35). В классе начальных функций (1.36) и

$$u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\lambda}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2};\mathbb{R}^3\right), \quad \lambda \in (0,\alpha),$$

при выполнении неравенств (1.21) и уравнения (1.17) справедливы равенства

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_0(x)[-\Delta u_1(x) + u_1(x)]dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\left[u_0^2(x) - f(x)\right]dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[u_0^3(x) - f(x)u_0(x)\right]dx > 0$$

при достаточно "большой" нетривиальной функции $u_0(x)$. Заметим, что в [4] доказана

Теорема 4. *Пусть* $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,T_0)$ *и удовлетворяет дифференциальному неравенству* (1.33) *и*

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi'(0) > 0, \quad \alpha > 1,$$

причем начальные условия $\Phi(0)$ *и* $\Phi'(0)$ *таковы, что существует* T_1 *– наименьший положительный корень уравнения*

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\alpha-1)^2}(\Phi(0))^2 + \frac{\beta+\gamma_2 T_1^2}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0). \tag{1.37}$$

Тогда $\Phi(t)$ *удовлетворяет следующему неравенству*:

$$\Phi(t) \geqslant \frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}t\right]^{1/(\alpha-1)}},$$

для всех $t \in [0,T_0)$ *и* $T_0 \leqslant T_1 < +\infty$, *где*

$$A := (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta+\gamma_2 T_1^2}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0)\right] > 0.$$

Чтобы воспользоваться результатом теоремы 4, необходимо убедиться, что уравнение (1.37) имеет единственное положительное решение $x = T_1^2$. С учетом обозначения $x = T_1^2$ уравнение (1.37) из теоремы 4 можно переписать в виде

$$\begin{gathered} ax^2 + bx + c = 0, \\ a = \frac{\gamma_2}{\alpha-1}\Phi_0^2, \quad b = \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi_0 + \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi_0^2 - \Phi_1^2, \quad c = \frac{1}{(\alpha-1)^2}\Phi_0^2. \end{gathered} \tag{1.38}$$

Нужно доказать, что квадратное уравнение (1.38) имеет положительное решение. Действительно, с этой целью возьмем вместо нетривиальной функции $u_0(x)$ функцию $Ru_0(x)$ при $R > 0$. Тогда при достаточно большом $R > 0$ имеем

$$\Phi_1 \sim R^3, \quad \Phi_0 \sim R^2.$$

Поэтому

$$\mathcal{D} = b^2 - 4ac > 0 \quad \text{и} \quad b < 0$$

при достаточно большом $R > 0$. Итак, квадратное уравнение (1.38) имеет положительное решение. Значит, выполнены все условия теоремы 4. Таким образом, доказана

Теорема 5. *Если* $\alpha \in (0,1)$, $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3\right)$, *а функция* $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_3/2};\mathbb{R}^3\right)$ *является единственным решением уравнения* (1.18) *для произвольной функции* $f(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_4/2};\mathbb{R}^3\right)$ *при выполнении условий*

$$\beta_2 \geqslant \beta_1 > \frac{3}{2}, \quad 2\beta_2 \geqslant \beta_4 \geqslant \beta_3 \geqslant \beta_1 > \frac{3}{2}$$

и при достаточно большой начальной функции $u_0(x)$, *в частности, при такой, что*

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[u_0^2(x) + |D_x u_0(x)|^2\right]dx > 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[u_0^3(x) - f(x)u_0(x)\right]dx > 0,$$

решение $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2};\mathbb{R}^3\times[0,T]\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}\left([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ *задачи Коши* (1.1), (1.2) *в смысле определения* 1 *не существует глобально во времени, и поэтому время* $T_0 = T_0(u_0, f) > 0$ *из теоремы* 3 *конечно, и справедливо предельное равенство*

$$\sup_{T\uparrow T_0}\left\|\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2} u(x,t)\right\|_{1,\alpha,T} = +\infty.$$

2. ЗАДАЧА КОШИ 2

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta u(x,t) - u(x,t)\right) + \sum_{j=1}^{3}\omega_j^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial|D_x u(x,t)|^2}{\partial t} = 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T], \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{2.2}$$

Дадим

Определение 2. Классическим решением задачи Коши (2.1), (2.2) называется функция $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}\left(\mathbb{R}^3\times[0,T]\right)$, которая удовлетворяет равенствам (2.1), (2.2) поточечно.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{gathered} u(x,t) = -\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho_0(y,\tau)dyd\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy + \int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\nu(y)dy, \\ \rho_0(x,t) = \frac{\partial|D_x u(x,t)|^2}{\partial t}, \\ \mu(x) = \Delta u_1(x) - u_1(x), \quad \nu(x) = \Delta u_0(x) - u_0(x). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Справедлива следующая

Лемма 5. *Если* $\alpha\in(0,1)$ *и* $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$, *то* $\rho_0(x,t)\in\mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ *и справедлива следующая оценка*:

$$\begin{gathered} \sup_{t\in[0,T]}|\rho_{02}(x,t) - \rho_{01}(x,t)|_\alpha \leqslant 12\max\left\{\|u_1\|_{1,1+\alpha,T}, \|u_2\|_{1,1+\alpha,T}\right\}\|u_2 - u_1\|_{1,1+\alpha,T}, \\ \|w\|_{1,1+\alpha,T} := \sup_{t\in[0,T]}\left[|w(x,t)|_{1+\alpha} + |w_t(x,t)|_{1+\alpha}\right], \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\rho_{0k}(x,t) = \frac{\partial\left|D_x u_k(x,t)\right|^2}{\partial t}, \quad u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

Доказательство. Шаг 1. Заметим, что при условиях леммы справедливо равенство

$$\rho_0(x,t) = \frac{\partial\left|z(x,t)\right|^2}{\partial t} = 2(z_t(x,t), z(x,t)), \quad z(x,t) = D_x u(x,t). \tag{2.5}$$

Пусть $t \in [0,T]$ – произвольное. Тогда верно равенство

$$\rho_0(x_2,t) - \rho_0(x_1,t) = 2\left(z_t(x_2,t), z(x_2,t) - z(x_1,t)\right) + 2(z(x_1,t), z_t(x_2,t) - z_t(x_1,t)),$$

из которого вытекает неравенство

$$\left|\rho_0(x_2,t) - \rho_0(x_1,t)\right| \leqslant 2\left|z_t(x_2,t)\right|\left|z(x_2,t) - z(x_1,t)\right| + 2\left|z(x_1,t)\right|\left|z_t(x_2,t) - z_t(x_1,t)\right|. \tag{2.6}$$

Из (2.6) вытекает оценка

$$\begin{gathered}[\rho(x,t)]_\alpha = \sup_{x_1\neq x_2}\frac{\left|\rho_0(x_2,t) - \rho_0(x_1,t)\right|}{\left|x_2 - x_1\right|^\alpha} \leqslant 2\left|z_t(x,t)\right|_0\left|z(x,t)\right|_\alpha + \\ + 2\left|z(x,t)\right|_0\left|z_t(x,t)\right|_\alpha = 2\left|D_x u_t(x,t)\right|_0\left|D_x u(x,t)\right|_\alpha + 2\left|D_x u(x,t)\right|_0\left|D_x u_t(x,t)\right|_\alpha < +\infty.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Из (2.5) получаем оценку

$$\left|\rho_0(x,t)\right|_0 \leqslant 2\left|D_x u_t(x,t)\right|_0\left|D_x u(x,t)\right|_0 < +\infty. \tag{2.8}$$

Таким образом, из (2.7) и (2.8) приходим к выводу о том, что

$$\left|\rho_0(x,t)\right|_\alpha < +\infty \quad \text{для любого} \quad t \in [0,T]. \tag{2.9}$$

Из равенства (2.5) вытекает следующая цепочка равенств для $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$:

$$\begin{gathered}[\rho_0(x_2,t_2) - \rho_0(x_1,t_2)] - [\rho_0(x_2,t_1) - \rho_0(x_1,t_1)] = \\ = 2(z_t(x_2,t_2), z(x_2,t_2) - z(x_1,t_2)) + 2(z(x_1,t_2), z_t(x_2,t_2) - z_t(x_1,t_2)) - \\ - 2(z_t(x_2,t_1), z(x_2,t_1) - z(x_1,t_1)) - 2(z(x_1,t_1), z_t(x_2,t_1) - z_t(x_1,t_1)) = \\ = 2(z_t(x_2,t_2), [z(x_2,t_2) - z(x_1,t_2)] - [z(x_2,t_1) - z(x_1,t_1)]) + \\ + 2(z_t(x_2,t_2) - z_t(x_2,t_1), z(x_2,t_1) - z(x_1,t_1)) + \\ + 2(z(x_1,t_2), [z_t(x_2,t_2) - z_t(x_1,t_2)] - [z_t(x_2,t_1) - z_t(x_1,t_1)]) + \\ + 2(z(x_1,t_2) - z(x_1,t_1), z_t(x_2,t_1) - z_t(x_1,t_1)),\end{gathered}$$

из которой вытекает оценка

$$\begin{gathered}[\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1)]_\alpha \leqslant 2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|z_{jt}(x,t)\right|_\alpha\left|z_j(x,t_2) - z_j(x,t_1)\right|_\alpha + \\ + 2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|z_j(x,t)\right|_\alpha\left|z_{jt}(x,t_2) - z_{jt}(x,t_1)\right|_\alpha + 2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|z_j(x,t)\right|_\alpha\left|z_{tj}(x,t_2) - z_{jt}(x,t_1)\right|_\alpha + \\ + 2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|z_{jt}(x,t)\right|_\alpha\left|z_j(x,t_2) - z_j(x,t_1)\right|_\alpha = 2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|D_{x_j}u_t(x,t)\right|_\alpha\left|D_{x_j}u(x,t_2) - D_{x_j}u(x,t_1)\right|_\alpha + \\ + 2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|D_{x_j}u(x,t)\right|_\alpha\left|D_{x_j}u_t(x,t_2) - D_{x_j}u_t(x,t_1)\right|_\alpha + \\ 2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|D_{x_j}u(x,t)\right|_\alpha\left|D_{x_j}u_t(x,t_2) - D_{x_j}u_t(x,t_1)\right|_\alpha + 2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|D_{x_j}u_t(x,t)\right|_\alpha\left|D_{x_j}u(x,t_2) - D_{x_j}u(x,t_1)\right|_\alpha \leqslant \\ \leqslant 24\left\|u\right\|_{1,1+\alpha,T}\left[\left|u(x,t_2) - u(x,t_1)\right|_{1+\alpha} + \left|u_t(x,t_2) - u_t(x,t_1)\right|_{1+\alpha}\right].\end{gathered} \tag{2.10}$$

С другой стороны, несложно доказать неравенство

$$\begin{gathered}\left|\rho_0(x,t_2)-\rho_0(x,t_1)\right|_0 \leqslant 2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|D_{x_j}u_t(x,t)\right|_0\left|D_{x_j}u(x,t_2)-D_{x_j}u(x,t_1)\right|_0+\\ +2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|D_{x_j}u(x,t)\right|_0\left|D_{x_j}u_t(x,t_2)-D_{x_j}u(x,t_1)\right|_0.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Из (2.10) и из (2.11) вытекает, что

$$\begin{gathered}\left|\rho(x,t_2)-\rho(x,t_1)\right|_\alpha \leqslant c_0\|u\|_{1,1+\alpha,T}\left[\left|u(x,t_2)-u(x,t_1)\right|_{1+\alpha}+\right.\\ \left.+\left|u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)\right|_{1+\alpha}\right]\to +0 \quad \text{при} \quad |t_2-t_1|\to +0.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Таким образом, из (2.9) и (2.12) приходим к выводу о том, что $\rho_0(x,t)\in\mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{C}^\alpha\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$.

Шаг 2. Пусть

$$\rho_{0k}(x,t)=\frac{\partial\left|D_x u_k(x,t)\right|^2}{\partial t},\quad u_k(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$$

при $k=1,2$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{gathered}\rho_{02}(x,t)-\rho_{01}(x,t)=2\sum_{j=1}^{3}D_{x_j}u_{2t}(x,t)\left[D_{x_j}u_2(x,t)-D_{x_j}u_1(x,t)\right]+\\ +2\sum_{j=1}^{3}D_{x_j}u_1(x,t)\left[D_{x_j}u_{2t}(x,t)-D_{x_j}u_{1t}(x,t)\right],\end{gathered}$$

из которого вытекает оценка

$$\begin{gathered}\sup_{t\in[0,T]}\left|\rho_{02}(x,t)-\rho_{01}(x,t)\right|_\alpha\leqslant 2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|D_{x_j}u_{2t}(x,t)\right|_\alpha\sup_{t\in[0,T]}\left|D_{x_j}u_2(x,t)-D_{x_j}u_1(x,t)\right|_\alpha+\\ +2\sum_{j=1}^{3}\sup_{t\in[0,T]}\left|D_{x_j}u_1(x,t)\right|_\alpha\sup_{t\in[0,T]}\left|D_{x_j}u_{2t}(x,t)-D_{x_j}u_{1t}(x,t)\right|_\alpha\leqslant 12\max\left\{\|u_1\|_{1,1+\alpha,T},\|u_2\|_{1,1+\alpha,T}\right\}\|u_2-u_1\|_{1,1+\alpha,T}.\end{gathered}$$

Наконец, справедлива

Теорема 6. *Если* $\alpha\in(0,1)$, *то для любых* $u_0(x),u_1(x)\in\mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$ *найдется такое максимальное* $T_0=T_0(u_0,u_1)>0$, *что для любого* $T\in(0,T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (2.3) *в классе* $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$, *причем либо* $T_0=+\infty$, *либо* $T_0<+\infty$, *и в этом последнем случае справедливо предельное свойство*

$$\sup_{T\uparrow T_0}\|u\|_{1,1+\alpha,T}=+\infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Прежде всего заметим, что интегральное уравнение (2.3) можно переписать в виде

$$u(x,t)=H[u](x,t),$$

где оператор $H[u](x,t)$ определен равенством

$$H[u](x,t)=-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho_0(y,\tau)dyd\tau+\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\nu(y)dy$$

и в силу результата теоремы 5 статьи [2] действует следующим образом:

$$H[u](x,t):\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\to\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

Шаг 2. Заметим, что в силу оценки (1.4) теоремы 1 статьи [2] и оценки (2.4) леммы 5 справедлива следующая оценка:

$$\begin{gathered}\|H[u_1](x,t) - H[u_2](x,t)\|_{1,1+\alpha,T} \leqslant Td_0(T) \sup_{t\in[0,T]} |\rho_1(x,t) - \rho_2(x,t)|_\alpha \leqslant Td_0(T)h(R)\|u_1 - u_2\|_{1,1+\alpha,T}, \\ h(R) = 12R, \quad R = \max\left\{\|u_1\|_{1,1+\alpha,T}, \|u_2\|_{1,1+\alpha,T}\right\}.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Шаг 3. Рассмотрим следующий шар:

$$B_R := \left\{w(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right) : \|w\|_{1,1+\alpha,T} \leqslant R\right\}.$$

Пусть $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$ – произвольные фиксированные. Тогда найдется настолько большое $R > 0$, что справедливо неравенство

$$\|f_1(x,t)\|_{1,1+\alpha,T} \leqslant \frac{R}{2},$$

$$f_1(x,t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\mu(y)dy + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\nu(y)dy.$$

Положим в оценке (2.13) $u_1(x,t) = u(x,t) \in B_R$ и $u_2(x,t) = 0$. Тогда получим цепочку неравенств

$$\begin{gathered}\|H_1[u](x,t)\|_{1,1+\alpha,T} \leqslant 12\|u(x,t)\|^2_{1,1+\alpha,T} \leqslant Td_0(T)12R^2 \leqslant \frac{R}{2}, \\ H_1[u](x,t) := -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho_0(y,\tau)dyd\tau\end{gathered} \tag{2.14}$$

при достаточно малом $T > 0$ таком, что выполнено неравенство

$$12Td_0(T)R \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.15}$$

Из (2.13) и (2.14) вытекает, что

$$H[u](x,t) : B_R \to B_R.$$

Наконец, из оценки (2.13) при выполнении условия (2.15) получаем неравенство

$$\|H[u_1](x,t) - H[u_2](x,t)\|_{1,1+\alpha,T} \leqslant \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{1,1+\alpha,T}$$

для любых $u_1(x,t), u_2(x,t) \in B_R$, т.е. оператор $H[u](x,t)$ является сжимающим на шаре B_R. Отсюда вытекает существование единственного решения $u(x,t)$ интегрального уравнения (2.3) в шаре $B_R \subset \mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ при достаточно большом $R > 0$ и для достаточно малого $T > 0$.

Шаг 4. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (2.3) в классе $\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ (см., например, [3]), приходим к утверждению теоремы.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Если* $\alpha \in (0,1)$, *то для любых* $u_0(x)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$ *найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(u_0,u_1) > 0$, *что для любого* $T \in (0,T_0)$ *существует единственное классическое решение задачи Коши* (2.1), (2.2) *в смысле определения* 2 *в классе* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}\left([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в этом последнем случае справедливо предельное свойство*

$$\sup_{T\uparrow T_0}\|u\|_{1,1+\alpha,T} = +\infty.$$

Из третьей формулы Грина (9.1) из [1] вытекает, что всякое классическое решение задачи Коши (2.1), (2.2) удовлетворяет интегральному уравнению (2.3), а всякое решение этого интегрального уравнения в силу теоремы 6 единственно в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ для любого

$T \in (0, T_0)$. С учетом результата леммы 5 осталось воспользоваться теоремой 5 статьи [2] при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

3. ЗАДАЧА КОШИ 3

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta u(x,t) - u(x,t)\right) + \sum_{j=1}^{3} \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x). \tag{3.2}$$

Дадим

Определение 3. Классическим решением задачи Коши (3.1), (3.2) называется функция $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}\left(\mathbb{R}^3 \times [0,T]\right)$, удовлетворяющая равенствам (3.1), (3.2) поточечно.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y, t-\tau)\rho_0(y,\tau)\,dy\,d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\nu(y)\,dy,$$

$$\rho_0(x,t) = \frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial t^2}, \tag{3.3}$$

$$\mu(x) = \Delta u_1(x) - u_1(x), \quad \nu(x) = \Delta u_0(x) - u_0(x).$$

Справедлива следующая

Лемма 6. *Если* $\alpha \in (0,1)$ *и* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}\left([0,T]; \mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$, *то* $\rho_0(x,t) \in \mathbb{C}\left([0,T]; \mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ *и справедлива оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\rho_{01}(x,t) - \rho_{02}(x,t)\right|_{\alpha} \leqslant c_0 \max\left\{\|u_1\|_{2,\alpha,T}, \|u_2\|_{2,\alpha,T}\right\} \|u_1 - u_2\|_{2,\alpha,T},$$

$$\rho_{0k}(x,t) = \frac{\partial^2 u_k^2(x,t)}{\partial t^2}, \quad k = 1,2, \tag{3.4}$$

$$\|w\|_{2,\alpha,T} = \sup_{t\in[0,T]} \left[|w(x,t)|_{\alpha} + |w_t(x,t)|_{\alpha} + |w_{tt}(x,t)|_{\alpha}\right].$$

Доказательство. Несложное доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Справедлива следующая

Теорема 8. *Если* $\alpha \in (0,1)$, *то для любого* $T > 0$ *найдутся такие малые* $R > 0$, $R_1 > 0$ *и* $R_2 > 0$, *что для любых* $u_0(x) \in B_{R_1} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $u_1(x) \in B_{R_2} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$ *существует единственное решение* $u(x,t) \in B_R \subset \mathbb{C}^{(2)}\left([0,T]; \mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ *интегрального уравнения* (3.3), *где*

$$B_{R_k} = \left\{w(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right) : |w(x)|_{2+\alpha} \leqslant R_k\right\}, \quad k = 1,2,$$

$$B_R = \left\{w(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}\left([0,T]; \mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right) : \|w\|_{2,\alpha,T} \leqslant R\right\}.$$

Доказательство основано на принципе сжимающих отображений и оценок (1.4) из [2] и (3.4).

Справедлива следующая

Теорема 9. *Если* $\alpha \in (0,1)$, *то для любого* $T > 0$ *найдутся такие малые* $R_1 > 0$ *и* $R_2 > 0$, *что для любых* $u_0(x) \in B_{R_1} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $u_1(x) \in B_{R_2} \subset \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$ *существует единственное классическое решение задачи Коши* (3.1), (3.2) $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}\left([0,T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ *в смысле определения* 3.

Доказательство основано на третьей формуле Грина (9.1) из [1], теореме 5 статьи [2] при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ и теореме 8.

Теперь мы рассмотрим вопрос об отсутствии локального во времени и глобального во времени классических решений задачи Коши (3.1), (3.2).

С этой целью перепишем уравнение (3.1) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)-\left(u(x,t)+\frac{1}{2}\right)^2\right)+\sum_{j=1}^{3}\omega_j^2\frac{\partial^2\left(u(x,t)+1/2\right)}{\partial x_j^2}=0.$$

Умножим обе части этого равенства на функцию $\phi(x,t)\in\mathbb{C}_0^{(2+2)}\left(\mathbb{R}^3\times[0,T]\right)$ и проинтегрируем в рамках классических решений $u(x,t)\in\mathbb{C}_b^{(2+2)}\left(\mathbb{R}^3\times[0,T]\right)$ по частям, тогда получим следующее равенство:

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left[(u(x,t)+1/2)\Delta_x\phi''(x,t)+(u(x,t)+1/2)\sum_{j=1}^{3}\omega_j^2\phi_{x_jx_j}(x,t)\right]dxdt+\\ +\int_{\mathbb{R}^3}\left[(u_0(x)+1/2)\Delta_x\phi'(x,0)-u_1(x)\Delta_x\phi(x,0)\right]dx+\\ +\int_{\mathbb{R}^3}\left[2(u_0(x)+1/2)u_1(x)\phi(x,0)-(u_0(x)+1/2)^2\phi'(x,0)\right]dx=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(u(x,t)+1/2)^2\phi''(x,t)dxdt.\end{gathered}\tag{3.5}$$

Дадим

Определение 4. Будем говорить, что функция $u_1(x)$ принадлежит классу B, если найдется такая ограниченная область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с гладкой границей, что $u_1(x)\in H^2(\Omega)$ и $\Delta_x u_1(x)\in\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ и

$$\Delta_x u_1(x)\not\equiv 0\quad \text{при}\quad x\in\Omega.$$

Справедлива следующая

Теорема 10. *Если* $\alpha\in(0,1)$ *и* $u_1(x)\in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)\cap\mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$ *и* $u_0(x)+1/2\in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)\cap\mathbb{C}^{2+\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)$, *то при выполнении условия*

$$\int_{\mathbb{R}^3}(u_0(x)+1/2)u_1(x)dx<0$$

время существования классического решения задачи Коши (3.1), (3.2) *конечно, и имеет место следующая оценка сверху:*

$$T\leqslant\frac{\int_{\mathbb{R}^3}(u_0(x)+1/2)^2dx}{-\int_{\mathbb{R}^3}(u_0(x)+1/2)u_1(x)dx}.$$

Если же $u_0(x)=-1/2$ и $u_1(x)\in B$, *то классическое решение задачи Коши* (3.1), (3.2) *отсутствует даже локально во времени.*

Доказательство этой теоремы основано на методе нелинейной емкости С.И. Похожаева из [5]. Нужно с помощью неравенства Гёльдера оценить слагаемые в равенстве (3.5). Возьмем в качестве функции $\phi(x,t)\in\mathbb{C}_0^{(2+2)}\left(\mathbb{R}^3\times[0,T]\right)$ следующую:

$$\phi(x,t)=\phi_R(x)\phi_T(t),$$

$$\phi_R(x)=\phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right),\quad \phi_0(s)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad 0\leqslant s\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{если}\quad s\geqslant 1,\end{cases}$$

$$\phi_0(s)\in\mathbb{C}_0^{\infty}[0,+\infty),\quad \phi_T(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.$$

Справедливы оценки

$$\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(u(x,t)+1/2)\Delta_x\phi''(x,t)dxdt\right| = \left|\frac{2}{T^2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(u(x,t)+1/2)\Delta_x\phi_R(x)dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2T^{1/2}}{T^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta_x\phi_R(x)|^2}{\phi_R(x)}dx\right)^{1/2} I_R^{1/2}, \quad I_R := \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(u(x,t)+1/2)^2\phi_R(x)dxdt,$$

$$\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(u(x,t)+1/2)\sum_{j=1}^3\omega_j^2\phi_{x_jx_j}(x,t)dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^T\phi_T^2(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\left|\sum_{j=1}^3\omega_j^2\phi_{Rx_jx_j}(x)\right|^2}{\phi_R(x)}dx\right)^{1/2} I_R^{1/2} = \left(\frac{T}{5}\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\left|\sum_{j=1}^3\omega_j^2\phi_{Rx_jx_j}(x)\right|^2}{\phi_R(x)}dx\right)^{1/2} I_R^{1/2}, \tag{3.6}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}(u_0(x)+1/2)\Delta_x\phi'(x,0)dx\right|\frac{2}{T}\left|\int_{\mathbb{R}^3}(u_0(x)+1/2)\Delta_x\phi_R(x)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{T}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta_x\phi_R(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_0(x)+1/2|^2dx\right)^{1/2},$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}u_1(x)\Delta_x\phi(x,0)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^3}u_1(x)\Delta_x\phi_R(x)dx\right| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^3}u_1^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta_x\phi_R(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Поскольку $u_0(x)+1/2 \in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ и $u_1(x) \in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$, то согласно теореме Лебега справедливо следующее предельное свойство:

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left[2(u_0(x)+1/2)u_1(x)\phi(x,0) - (u_0(x)+1/2)^2\phi'(x,0)\right]dx =$$

$$= 2\int_{\mathbb{R}^3}\left[(u_0(x)+1/2)u_1(x) + \frac{1}{T}(u_0(x)+1/2)^2\right]\phi_R(x)dx \to$$

$$\to 2\int_{\mathbb{R}^3}\left[(u_0(x)+1/2)u_1(x) + \frac{1}{T}(u_0(x)+1/2)^2\right]dx$$

при $R \to +\infty$. Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta_x\phi_R(x)|^2}{\phi_R(x)}dx = R^{3-4}\int_{1/2\leqslant|\xi|^2\leqslant1}\frac{\left|\Delta_\xi\phi_0\left(|\xi|^2\right)\right|^2}{\phi_0\left(|\xi|^2\right)}d\xi,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\left|\sum_{j=1}^3\omega_j^2\phi_{Rx_jx_j}(x)\right|^2}{\phi_R(x)}dx = R^{3-4}\int_{1/2\leqslant|\xi|^2\leqslant1}\frac{\left|\sum_{j=1}^3\omega_j^2\phi_{0\xi_j\xi_j}\left(|\xi|^2\right)\right|^2}{\phi_0\left(\|\xi\|^2\right)}d\xi, \tag{3.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta_x\phi_R(x)|^2dx = R^{3-4}\int_{1/2\leqslant|\xi|^2\leqslant1}\left|\Delta_\xi\phi_0\left(|\xi|^2\right)\right|^2d\xi.$$

Из равенства (3.5) и оценок (3.6), (3.7) вытекает неравенство

$$\frac{2T^{1/2}}{T^2}c_1R^{-1/2}I_R^{1/2}+\left(\frac{T}{5}\right)^{1/2}c_2R^{-1/2}I_R^{1/2}+\frac{2}{T}a_1R^{-1/2}+a_2R^{-1/2}+J_R\geqslant\frac{2}{T^2}I_R, \tag{3.8}$$

где

$$c_1:=\left(\int\limits_{1/2\leqslant|\xi|^2\leqslant 1}\frac{\left|\Delta_\xi\phi_0\left(|\xi|^2\right)\right|^2}{\phi_0\left(|\xi|^2\right)}d\xi\right)^{1/2},$$

$$c_2:=\left(\int\limits_{1/2\leqslant|\xi|^2\leqslant 1}\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{3}\omega_j^2\phi_{0\xi_j\xi_j}\left(|\xi|^2\right)\right|^2}{\phi_0\left(|\xi|^2\right)}d\xi\right)^{1/2},$$

$$a_1:=\|u_0(x)+1/2\|_2\left(\int\limits_{1/2\leqslant|\xi|^2\leqslant 1}\left|\Delta_\xi\phi_0\left(|\xi|^2\right)\right|^2d\xi\right)^{1/2},$$

$$a_2:=\|u_1(x)\|_2\left(\int\limits_{1/2\leqslant|\xi|^2\leqslant 1}\left|\Delta_\xi\phi_0\left(|\xi|^2\right)\right|^2d\xi\right)^{1/2},$$

$$J_R:=2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[(u_0(x)+1/2)u_1(x)+\frac{1}{T}(u_0(x)+1/2)^2\right]\phi_R(x)dx.$$

Далее, из (3.8) с помощью теоремы Беппо Леви приходим в пределе при $R=N\in\mathbb{N}\to+\infty$ к следующей априорной оценке:

$$T^2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[(u_0(x)+1/2)u_1(x)+\frac{1}{T}(u_0(x)+1/2)^2\right]dx\geqslant\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}(u(x,t)+1/2)^2dxdt,$$

из которой уже стандартным образом выводим утверждения теоремы. В частности, при $u_0(x)=-1/2$ имеем

$$u(x,t)=-1/2\quad\text{для почти всех}\quad(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T].$$

После подстановки этих равенств в равенство (3.5) приходим к равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}u_1(x)\Delta_x\phi(x,0)dx=0$$

для любых пробных функций $\phi(x,t)\in\mathbb{C}_0^{(2+2)}\left(\mathbb{R}^3\times[0,T]\right)$. Возьмем

$$\phi(x,t)=\phi_1(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^2,\quad\phi_1(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(\Omega),$$

где ограниченная область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям определения 4 класса B начальных функций $u_1(x)$. Тогда получим равенство

$$\int\limits_\Omega u_1(x)\Delta_x\phi_1(x)dx=0\Leftrightarrow\int\limits_\Omega\Delta_xu_1(x)\phi_1(x)dx=0\Rightarrow\Delta_xu_1(x)=0$$

для всех $x\in\Omega$, что противоречит определению класса B.

Теперь умножим уравнение (3.1) на функцию $\phi(x,t) \in \mathbb{C}_0^{(2+2)}\left(\mathbb{R}^3 \times [0,T]\right)$, проинтегрируем по частям и получим следующее равенство:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\Delta_x \phi''(x,t) - \phi''(x,t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x,t)\right] dxdt +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3} \left[u_0(x)\left[\Delta_x \phi'(x,0) - \phi'(x,0)\right] - u_1(x)\left[\Delta_x \phi(x,0) - \phi(x,0)\right]\right] dx +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3} \left[2u_0(x)u_1(x)\phi(x,0) - u_0^2(x)\phi'(x,0)\right] dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u^2(x,t)\phi''(x,t)dxdt.$$

Положим

$$\phi(x,t) = \phi_1(x)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \quad \phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}\left(\mathbb{R}^3\right), \quad \phi_1(x) \geqslant 0.$$

Тогда справедлива цепочка неравенств

$$\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\Delta_x \phi''(x,t) - \phi''(x,t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x,t)\right] dxdt\right| \leqslant c_1^{1/2} J^{1/2} \leqslant \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} c_1, \tag{3.9}$$

$$c_1 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\Delta_x \phi''(x,t) - \phi''(x,t) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \phi_{x_j x_j}(x,t)\right|^2}{\phi''(x,t)} dxdt,$$
$$J = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi''(x,t) u^2(x,t) dxdt. \tag{3.10}$$

Заметим, что в [5] доказано существование такой нетривиальной функции $\phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}\left(\mathbb{R}^3\right)$, что конечна емкость c_1. При этом справедливо выражение

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \left[u_0(x)\left[\Delta_x \phi'(x,0) - \phi'(x,0)\right] - u_1(x)\left[\Delta_x \phi(x,0) - \phi(x,0)\right]\right] dx +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3} \left[2u_0(x)u_1(x)\phi(x,0) - u_0^2(x)\phi'(x,0)\right] dx = \tag{3.11}$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T} u_0(x) + u_1(x)\right)\left[\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)\right] dx + 2\int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x)\left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x)\right] dx.$$

Пусть

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)u_1(x)\phi_1(x)dx < 0. \tag{3.12}$$

Тогда при этом условии найдется такое достаточно большое $T > 0$, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x)\left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x)\right] dx < 0. \tag{3.13}$$

Фиксируем такое $T > 0$. Теперь сделаем следующую замену в равенстве (3.11):

$$u_0(x) \mapsto Ru_0(x), \quad u_1(x) \mapsto Ru_1(x) \quad \text{при} \quad R > 0,$$

и в результате получим равенство

$$I = -R\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{T} u_0(x) + u_1(x)\right)\left[\Delta_x \phi_1(x) - \phi_1(x)\right] dx + 2R^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_1(x)\left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T} u_0^2(x)\right] dx. \tag{3.14}$$

Поскольку при выбранном и фиксированном $T > 0$ справедливо неравенство (3.13), то при достаточно большом $R > 0$ получаем из (3.14) неравенство

$$\frac{1}{2}c_1 + I < 0. \tag{3.15}$$

Теперь фиксируем такое $R > 0$. С учетом неравенства (3.9) и выражения (3.14) получим неравенство

$$\frac{1}{2}c_1 - R\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{2}{T}u_0(x) + u_1(x)\right)[\Delta_x\phi_1(x) - \phi_1(x)]\,dx + 2R^2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\phi_1(x)\left[u_0(x)u_1(x) + \frac{1}{T}u_0^2(x)\right]dx \geqslant \frac{1}{2}J \geqslant 0. \tag{3.16}$$

Неравенства (3.15) и (3.16) противоречат друг другу. Следовательно, нами доказана

Теорема 11. *Если нетривиальная функция* $\phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}\left(\mathbb{R}^3\right)$ *такова, что конечна нелинейная емкость* (3.10), *в которой*

$$\phi(x,t) = \phi_1(x)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2,$$

то при выполнении неравенства (3.12) *и при начальных функциях* $Ru_0(x)$ *и* $Ru_1(x)$ *при достаточно большом* $R > 0$ *классическое решение задачи Коши* (3.1), (3.2) *не существует глобально во времени.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Локальная разрешимость, разрушение и гельдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 10. С. 1639–1661.
2. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Локальная разрешимость, разрушение и гельдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. II. Теория потенциала // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 96–130.
3. *Панин А.А.* О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // Матем. заметки. 2015. Т. 97. № 6. С. 884–903.
4. *Корпусов М.О.* Разрушение и глобальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши для формально гиперболического уравнения с некоэрцитивным источником // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 5. С. 119–150.
5. *Похожаев С.И., Митидиери Э.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.