

А.Е. Букатов, Д.Д. Завьялов

Вызванное ветром движение воды в мелководных замкнутых бассейнах

На основе метода конечных элементов выполнено исследование движения воды, вызванного касательными напряжениями ветра в круглом бассейне конечной глубины. Выполнен анализ зависимости вертикальных смещений поверхности бассейна и поля горизонтальных волновых течений от формы рельефа дна и направления ветра. Рассмотрена трансформация сформированного ветром возмущения после прекращения действия ветра.

Введение

Гидродинамические процессы в ограниченных бассейнах представляют интерес при решении ряда океанологических задач. Исследованию этой проблемы посвящено значительное количество публикаций. В частности, вызванные ветром возмущения воды в ограниченном бассейне малой постоянной глубины рассмотрены в [1]. В работе построена численная модель, предназначенная для решения дифференциальных уравнений, определяющих неустановившийся приливной поток в мелких прибрежных районах и вызванную ветром циркуляцию воды в озерах и резервуарах. В приближении теории длинных волн сейшевые колебания в Азовском море изучались в [2], где найдены периоды сейш и приведены картины пространственного распределения их амплитуд. В настоящей работе на основе уравнений мелкой воды выполнено исследование зависимости вызванной ветром динамики в круглом бассейне переменной глубины от рельефа дна и направления ветра. Для решения задачи применен метод конечных элементов, который в отличие от метода конечных разностей дает возможность использовать более гибкую расчетную сетку и существенные преимущества при удовлетворении граничных условий.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о динамике воды в замкнутых водоемах переменной глубины. За основу математической модели примем проинтегрированные по вертикали уравнения движения мелкой воды, записанные через две компоненты горизонтального потока количества жидкости $q_{1,2}$ и сумму H отклонения свободной поверхности ζ от невозмущенного уровня и глубины h бассейна [3]:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_1^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right) = B_1,$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_2^2}{H} \right) = B_2,$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= fq_2 + \gamma^2 \rho_a W^2 \cos \theta - \left(\frac{g}{c^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}{H^2} - \rho g H \frac{\partial(H-h)}{\partial x} - H \frac{\partial P_a}{\partial x}, \\
 B_2 &= -fq_1 + \gamma^2 \rho_a W^2 \sin \theta - \left(\frac{g}{c^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}{H^2} - \rho g H \frac{\partial(H-h)}{\partial y} - H \frac{\partial P_a}{\partial y}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Уравнение неразрывности будет иметь вид

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} = 0.
 \tag{2}$$

Здесь $q_1 = \rho \int_{-h}^{\zeta} v_x dz$, $q_2 = \rho \int_{-h}^{\zeta} v_y dz$ (v_x , v_y – мгновенные скорости жидких частиц); g – ускорение силы тяжести; f – параметр Кориолиса; c – коэффициент трения (или коэффициент Шези); γ – коэффициент ветрового напряжения; W – скорость ветра, θ – угол между осью x и направлением ветра; P_a – атмосферное давление на поверхности воды; ρ и ρ_a – плотность воды и воздуха соответственно. Для решения полученной системы дополним ее граничными и начальными условиями. На твердой границе зададим условие не протекания

$$q_n = 0.
 \tag{3}$$

Начальные условия могут быть записаны в виде

$$H(x, y, t = 0) = H_0, \quad q_1(x, y, t = 0) = q_{01}, \quad q_2(x, y, t = 0) = q_{02}.
 \tag{4}$$

Конечно-элементная формулировка

Сформулируем рассматриваемую задачу в рамках метода конечных элементов [3,4]. Для этого запишем уравнения (1)–(4) в виде

$$\begin{aligned}
 \iint \left\{ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_1^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right) - B_1 \right\} \delta q_1 dA &= 0, \\
 \iint \left\{ \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_2^2}{H} \right) - B_2 \right\} \delta q_2 dA &= 0, \\
 \iint \left\{ q_1 \frac{\partial \delta H}{\partial x} + q_2 \frac{\partial \delta H}{\partial y} - \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} \delta H \right\} dA &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

применив процедуру метода взвешенных невязок и проинтегрировав по частям уравнение неразрывности. Здесь δq_1 , δq_2 , δH – вариации, удовлетворяющие граничным условиям для массового расхода и возвышения свободной поверхности. Исходя из того, что для $q_{1,2}$ и H применяются одни и те же интерполяционные функции φ , т.е.

$$q_1 = \varphi^T \mathbf{q}_1^n, \quad q_2 = \varphi^T \mathbf{q}_2^n, \quad H = \varphi^T \mathbf{H}^n,$$

запишем (5) для одного элемента A в матричном виде

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_1^{n,T} \left(\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{q}_1^n}{\partial t} - \mathbf{F}_1 \right) &= 0, \\ \delta \mathbf{q}_2^{n,T} \left(\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{q}_2^n}{\partial t} - \mathbf{F}_2 \right) &= 0, \\ \delta \mathbf{H}^{n,T} \left(\mathbf{M}^* \frac{\partial \mathbf{H}^n}{\partial t} - \mathbf{F}_H \right) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \iint \varphi \varphi^T dA; \quad \mathbf{M}^* = \iint \rho \varphi \varphi^T dA, \\ \mathbf{F}_1 &= \iint (\varphi B_1 - \varphi A_1) dA, \\ \mathbf{F}_2 &= \iint (\varphi B_2 - \varphi A_2) dA, \\ \mathbf{F}_H &= \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} q_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} q_2 \right) dA, \end{aligned} \quad (7)$$

A_1 и A_2 – конвективные части полных производных

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_1^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right), \quad A_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_2^2}{H} \right). \quad (8)$$

Знак T означает транспонирование. Объединив (6) в общую систему для всей области, получим

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{F}(\mathbf{L}_0). \quad (9)$$

Через \mathbf{M} обозначена матрица массы для всей области, $\dot{\mathbf{L}}$ – производные по времени от массового расхода и возвышения поверхности во всех узлах. Все другие члены включены в \mathbf{F} и вычисляются при $t = t_0$ или при использовании итераций в конце временного шага их значения получаются по предыдущей итерации. Для интегрирования по времени уравнения (9) применим метод трапеций, который приводит к следующим формулам [1]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{L}), \\ \mathbf{L}_{t+\Delta t} - \mathbf{L}_t &= \mathbf{M}^{-1} \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{L}_{t+\Delta t}) + \mathbf{F}(\mathbf{L}_t)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Неизвестное значение $\mathbf{L}_{t+\Delta t}$ на следующем шаге по времени находим итерационной процедурой

$$\mathbf{L}_{t+\Delta t}^{j+1} = \mathbf{L}_t + \mathbf{M}^{-1} \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{L}_{t+\Delta t}^j) + \mathbf{F}(\mathbf{L}_t)]. \quad (11)$$

Сходимость итерационного процесса контролировалась изменением евклидовых норм для возвышения поверхности и векторов скорости

$$\|L_{t+\Delta t}^{i+1} - L_{t+\Delta t}^i\| / L_{t+\Delta t}^{i+1} < 0,01. \quad (12)$$

Численный анализ вынужденных возмущений

На основе изложенной теоретической схемы проведены численные эксперименты, моделирующие вызванные воздействием ветра волновые процессы в круглом бассейне конечной глубины. Величина атмосферного давления P_a принималась постоянной. Поле касательных напряжений ветра считалось однородным на всей поверхности бассейна. Скорость ветра полагалась равной 5 м/с, коэффициент ветрового напряжения $\gamma^2 = 0,0026$ [5], придонное трение не учитывалось. Радиус бассейна R составлял 1000 м. Глубина бассейна варьировалась от 10 до 20 м. Были рассмотрены несколько вариантов морфологии дна.

Плоское дно:

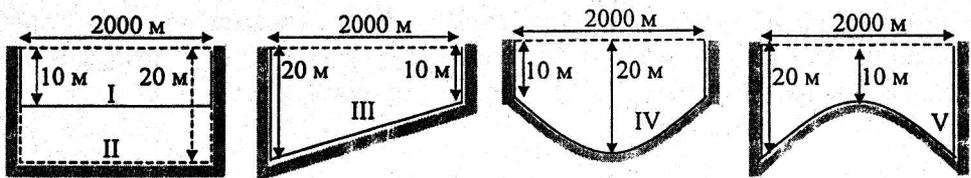
$$h(x, y) = h_1 + x \frac{\Delta h}{2R}, \quad \Delta h = h_2 - h_1;$$

- а) при постоянной глубине $h_{1,2} = 10$ м (вариант I) и $h_{1,2} = 20$ м (вариант II);
 б) плоское наклонное дно (вариант III), когда глубины бассейна у двух противоположных сторон водоема составляют соответственно $h_1 = 20$ м и $h_2 = 10$ м.

Параболическое дно:

$$h(x, y) = \frac{\Delta h}{|\Delta h|} \left\{ \left[(x - R) \frac{\sqrt{|\Delta h|}}{R} \right]^2 + \left[(y - R) \frac{\sqrt{|\Delta h|}}{R} \right]^2 \right\} - h_u, \quad \Delta h = h_u - h_b;$$

- в) параболическое вогнутое дно (вариант IV), при котором глубина в центре водоема $h_u = 20$ м, а по краям $- h_b = 10$ м;
 г) параболическое выпуклое дно (вариант V), при котором глубина бассейна в центре водоема $h_u = 10$ м, а по его краям $- h_b = 20$ м.

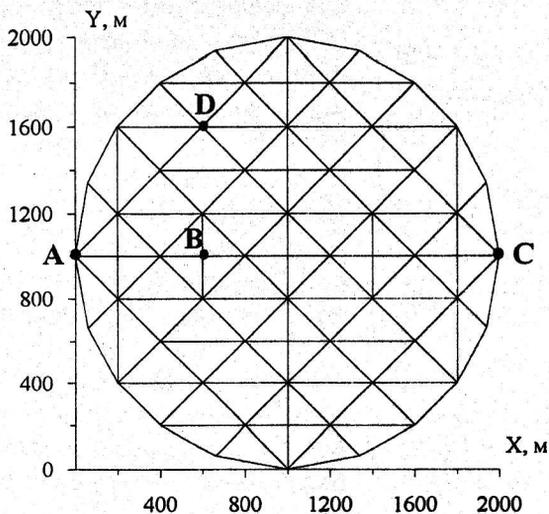


Р и с. 1. Модельные профили рельефа дна (варианты I - V)

При расчетах в уравнениях равновесия были отброшены конвективные члены (8), что оправданно во многих задачах циркуляции воды в мелководных бассейнах [3]. В связи с относительно небольшими линейными размерами бассейна влияние вращения Земли не учитывалось. Модельные профили дна (в разрезе) даны на рис 1. Расчетная область (рис. 2) представлена 100 треугольными элементами и содержит 61 узловую точку. Для определения шага по времени был использован следующий критерий [5]:

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\sqrt{2C}} \approx 38 \text{ с, где } C = \sqrt{gh}.$$

В связи с этим был выбран временной шаг $\Delta t = 10$ с.



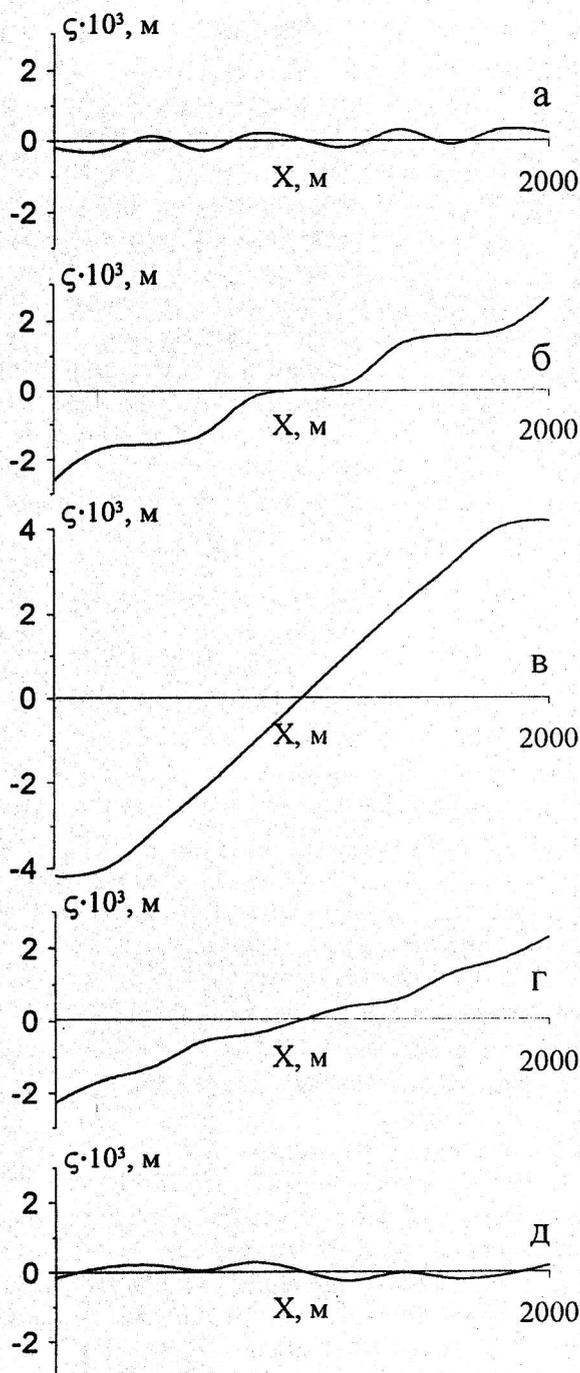
Р и с. 2. Расчетная сетка

Расчеты, проведенные для вариантов I, II, показали, что воздействие касательных напряжений ветра на водную поверхность приводит к периодическим колебаниям уровня и возвратно-поступательному характеру горизонтальных движений воды вдоль направления ветра. Причем с подветренной стороны уровень воды всегда ниже, а с наветренной – выше своего невозмущенного состояния. Чем меньше глубина бассейна, тем больше амплитуда колебаний и их период. Расчетные периоды одноузловых колебаний для вариантов I, II составили

5,74 и 4,05 мин соответственно. Профили возвышения свободной поверхности (вариант I) вдоль линии AC (вдоль направления ветра) изображены на рис. 3. Кривая на рис. 3,а иллюстрирует форму поверхности после воздействия на нее ветра в течение одного основного периода T собственных колебаний бассейна. На каждом из последующих рисунков (3, б-д) представлены кривые, построенные для следующего промежутка времени, отличающегося от предыдущего примерно на $T/4$. Возвышения свободной поверхности в точках A, B, и D (рис. 2) бассейна представлены на рис. 4, а-в как функции времени, в течение которого дул ветер. Сплошные, штриховые и пунктирные линии иллюстрируют расчетные амплитуды $\zeta(t)$ для вариантов I, IV, V соответственно. Отметим, в частности, что распределения ζ по t в точках A и C, расположенных у противоположных берегов бассейна, симметричны относительно невозмущенного уровня.

Сходная картина колебаний наблюдается в бассейне с наклонным плоским дном (вариант III), когда ветер дует в направлении увеличения (уменьшения) глубины. При этом в глубоководной части бассейна горизонтальные волновые движения менее интенсивны, а профиль возвышения более пологий, чем со стороны мелководья. Если же ветер дует под углом к направлению перепада глубин, то его воздействие приводит к колебаниям уровня и циркуляционному характеру движения воды в бассейне. На рис. 5, а представлено поле средних по глубине скоростей V течений, обусловленных направленным под прямым углом к линии наклона дна ветром продолжительностью 10 мин. В этом случае наибольшие скорости течений, направленных в сторону ветра, реализуются у мелководного берега, а направленных против

ветра – у глубоководного. С ростом t центр циркуляционной зоны имеет тенденцию к смещению в направлении центра бассейна.

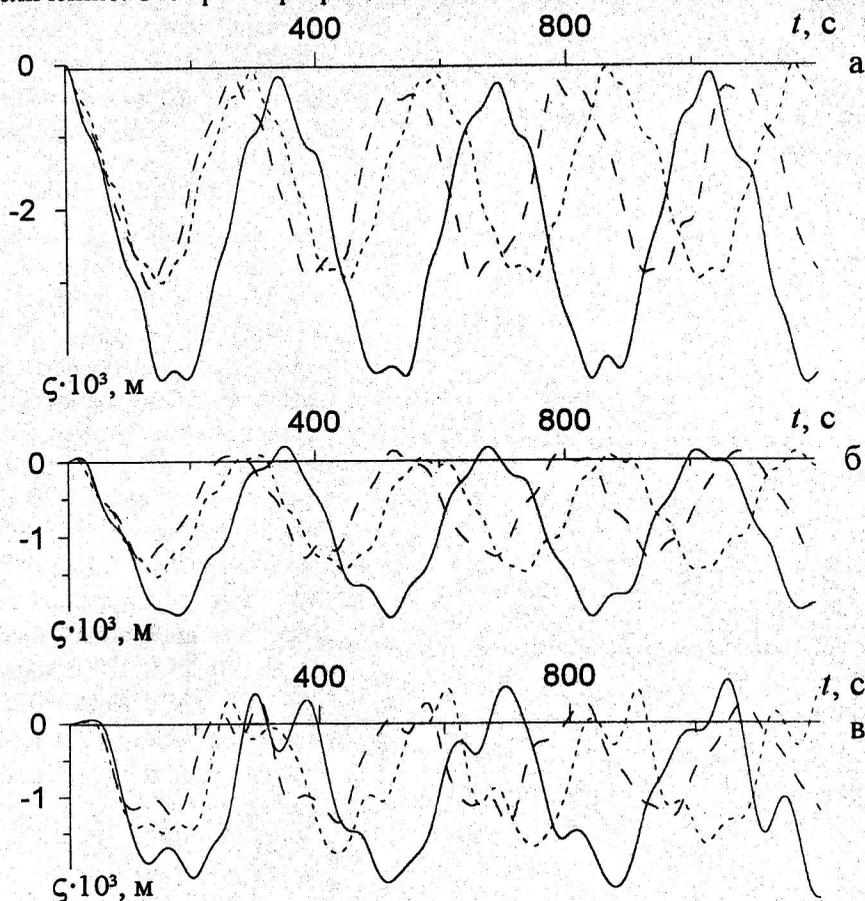


Р и с. 3. Профили возвышения поверхности вдоль диаметра бассейна постоянной глубины

В случае вогнутого дна (вариант IV) вода в бассейне под воздействием ветра образует два круговорота. По мелководью вдоль береговой черты вода течет от подветренного к наветренному берегу и возвращается обратно по глубоководной части водоема. Это видно из представленного на рис. 5, б поля течений, сформировавшегося за 10 мин. Как для варианта III, так и для варианта IV интенсивность течений в центральной части бассейна много меньше, чем у его берегов.

Если глубина в центральной части бассейна меньшая, чем у берега (вариант V), то под действием касательных напряжений ветра вода в мелководной центральной части водоема течет в направлении ветра и возвращается к подветренной стороне по глубоководной области вдоль береговой черты. При этом также образуются два круговорота, что показано на рис. 5, в при $t = 10$ мин. Однако эти круговороты имеют противоположную по сравнению с вариантом IV направленность. В отличие от рассмотренных вариантов III, IV интенсивные волновые течения здесь наблюдаются не только вдоль берега, но и в центре водоема. Минимальные значения горизонтальных волновых скоростей имеют место по обе стороны

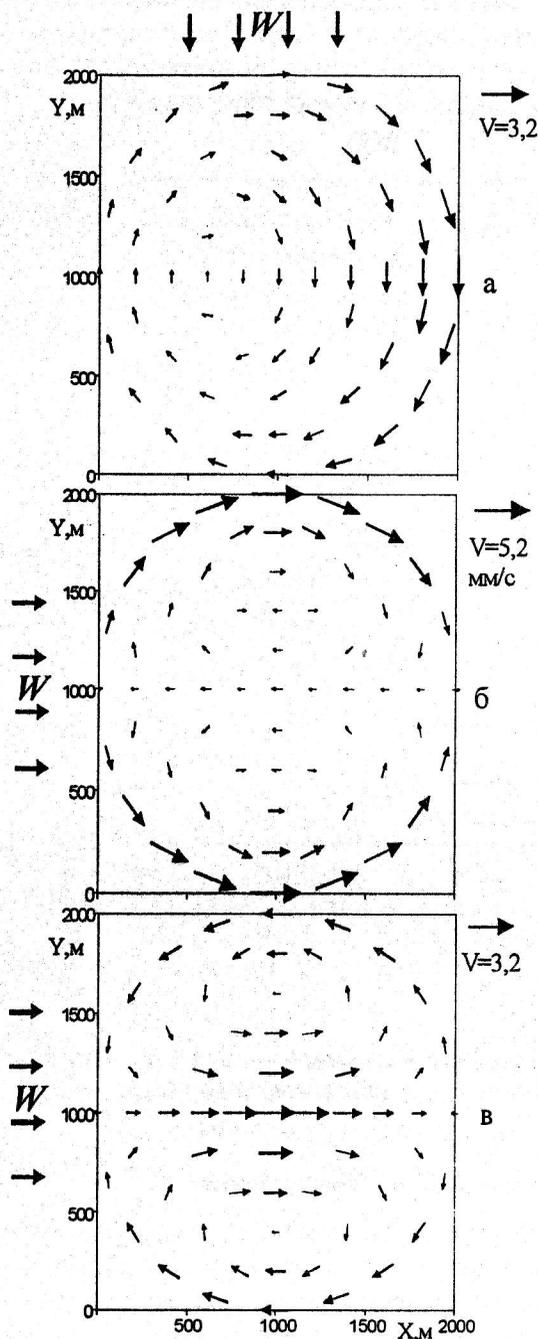
линии, проходящей через центр бассейна и соединяющей подветренный и наветренный берега. Отметим, что при непрерывном ветре среднее по времени значение скорости течения в циркуляционных зонах [6] имеет тенденцию к увеличению. Этот рост прекращается после окончания действия ветра.



Р и с. 4. Возвышение свободной поверхности как функция времени в точках *A* (*a*), *B* (*б*), *D* (*в*) для бассейна с горизонтальным (сплошная), вогнутым (штриховая) и выпуклым (пунктир) рельефом дна

Динамика вызванного ветром начального возмущения

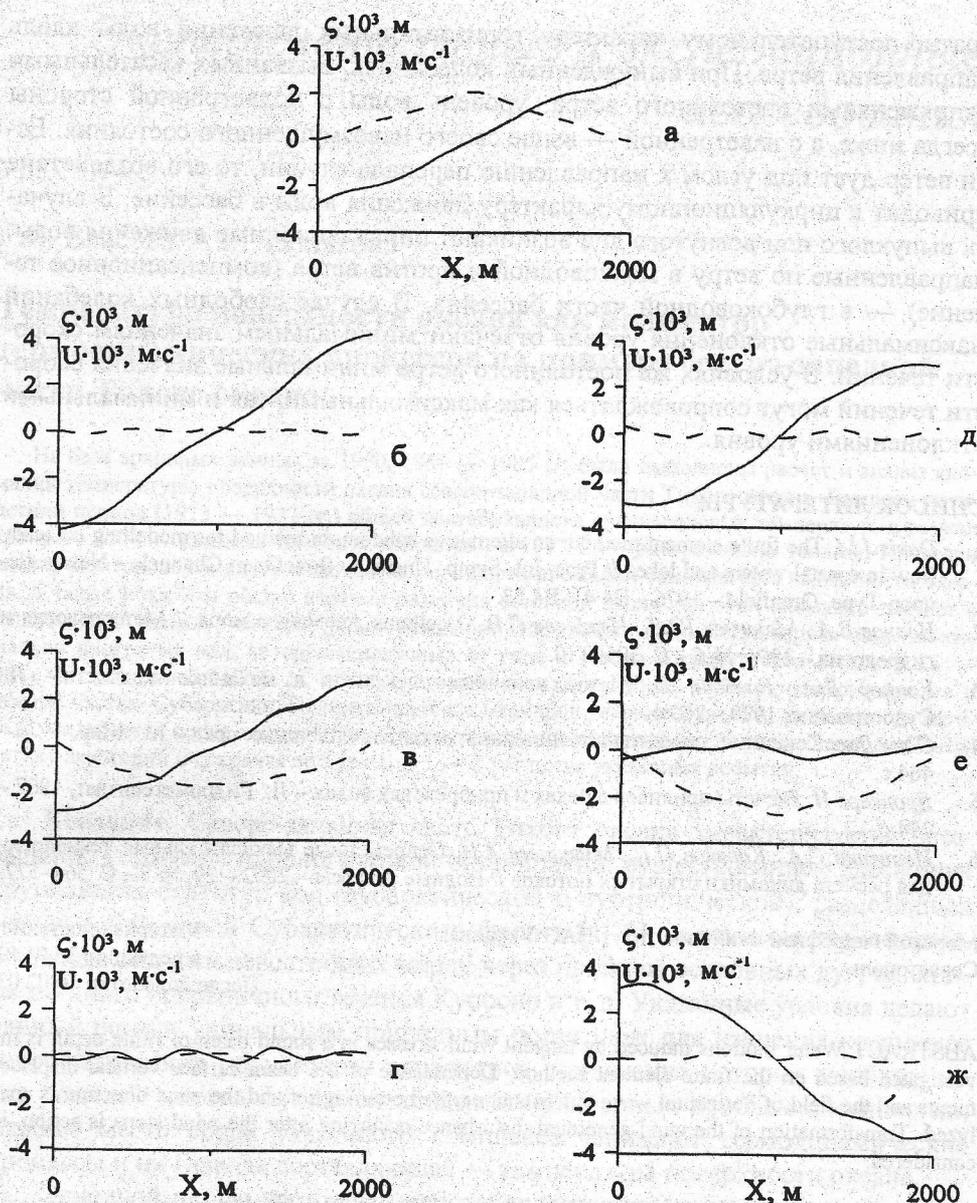
Рассмотрим теперь динамику начального возмущения в замкнутом бассейне. В качестве начальных условий примем отклонение уровня и поле горизонтальных волновых скоростей, сформировавшиеся под воздействием ветра. Будем считать, что воздействие ветра ограничено во времени и прекращается по прошествии некоторого заданного временного интервала. В этом случае в бассейне установятся свободные (сейшевые) колебания с тем же периодом, что и при постоянно действующем ветре. Колебания у противоположных берегов будут характеризоваться попеременными поднятиями и опусканиями воды относительно невозмущенного уровня. Напомним, что в случае непрерывного ветра у подветренного берега наблюдаются колебания уровня преимущественно ниже, а у наветренного — выше его невозмущенного



Р и с 5. Поле скорости горизонтальных течений в бассейне с наклонным (а), вогнутым (б) и выпуклым (в) дном

ждаться как максимальными (рис. 6, б), так и минимальными (рис. 6, г) отклонениями уровня.

состояния. Высота смещения уровня при свободных колебаниях увеличится по отношению к высоте смещения вынужденных колебаний примерно вдвое. После прекращения ветра меняется и характер горизонтальных волновых движений. На рис. 6 приведены возвышения свободной поверхности ζ (сплошные кривые) и скорости V течений (штриховые кривые) вдоль линии AC в случае выпуклого дна (вариант V). Рис. 6, а характеризует отклонение уровня $\zeta(x)$ и скорость $V(x)$ течения, сформировавшиеся под воздействием ветра за 98 с. Эволюция этих распределений при продолжающемся ветре для временных интервалов 170; 293; 339 с дана на рис. 6, б-г. Аналогичные распределения для свободных колебаний после действия ветра продолжительности 98 с (рис. 6, а) даны на рис. 6, д-ж при $t = 134; 215; 309$ с соответственно. Отметим, что моменты времени выбраны из условия синфазности изменений скорости для вынужденных и свободных колебаний. Видно, что в случае свободных колебаний максимальные отклонения уровня отвечают минимальным значениям скорости течений (рис. 6, д, ж). В условиях же постоянного ветра минимальные значения скорости течений могут сопровождаться как максимальными (рис. 6, б), так и минимальными (рис. 6, г) отклонениями уровня.



Р и с. 6. Профили возвышения свободной поверхности и горизонтальной скорости в бассейне с выпуклым дном: при постоянно действующем ветре (а - з); после прекращения действия ветра (д - ж) в момент времени (а)

Если под воздействием ветра в бассейне переменной глубины (варианты III-V) сформировались циркуляционные зоны, то после прекращения ветра (при отсутствии трения) такая циркуляция может чередоваться в течение периода колебаний с горизонтальным движением воды, для которого линии тока будут не замкнутыми.

Выводы

Воздействие касательных напряжений ветра на водную поверхность бассейна с плоским дном приводит к периодическим колебаниям уровня и воз-

вратно-поступательному характеру горизонтальных движений воды вдоль направления ветра. При вынужденных колебаниях, вызванных касательными напряжениями постоянного ветра, уровень воды с подветренной стороны всегда ниже, а с наветренной — выше своего невозмущенного состояния. Если ветер дует под углом к направлению перепада глубин, то его воздействие приводит к циркуляционному характеру движения воды в бассейне. В случаях выпуклого или вогнутого дна возникают циркуляционные движения воды, направленные по ветру в мелководной и против ветра (компенсационное течение) — в глубоководной части бассейна. В случае свободных колебаний максимальные отклонения уровня отвечают минимальным значениям скорости течений. В условиях же постоянного ветра минимальные значения скорости течений могут сопровождаться как максимальными, так и минимальными отклонениями уровня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Davis J.M.* The finite element method: an alternative subdomain method for modelling unsteady flow in coastal waters and lakes // Proc. Int. Symp. Unsteady flow Open Channels.— Newcastle-upon-Tyne, Granfield.— 1976.— В4 41—В4 53.
2. *Иванов В.А., Манилюк Ю.В., Черкесов Л.В.* О сейшах Азовского моря // *Метеорология и гидрология.*— 1994, № 6.— С. 105—110.
3. *Коннор Дж., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости.— Л.: Судостроение, 1970.— 269 с.
4. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.— 464 с.
5. *Дронкерс Й.* Расчеты приливов в реках и прибрежных водах.— Л.: Гидрометеиздат, 1967.— 294 с.
6. *Иваненко С.А., Корявов П.П., Милитеев А.Н.* Современные вычислительные технологии для расчета динамики открытых потоков // *Водные ресурсы.*— 2002.— 29, № 5.— С. 564—577.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 25.01.03
После доработки 10.02.03

ABSTRACT Water motions induced by tangent wind stresses in a round basin of finite depth is investigated based on the finite element method. Dependence of the basin surface vertical displacements and the field of horizontal wave currents upon the bottom relief and the wind direction is analyzed. Transformation of the wind-generated disturbance occurring after the wind stops is action, is considered.