

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени АЛЕКСАНДРА ГРИГОРЬЕВИЧА и НИКОЛАЯ
ГРИГОРЬЕВИЧА СТОЛЕТОВЫХ
Институт прикладной математики, физики и информатики

Худайбергганов Тимур Алиевич

**НЕЛИНЕЙНЫЕ И КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В
НИЗКОРАЗМЕРНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ
СИСТЕМАХ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ЛАЗЕРНЫМ
ИЗЛУЧЕНИЕМ ЭКСИТОННЫХ ПОЛЯРИТОНОВ**

Специальность:

1.3.19 – Лазерная физика

Диссертация, на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор С.М. Аракелян

Москва – 2023

Оглавление

Введение.....	3
ГЛАВА 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР	9
1.1. ЭКСИТОННЫЕ ПОЛЯРИТОНЫ В НИЗКОРАЗМЕРНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СИСТЕМАХ	10
1.2. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ И МЕТОДЫ ИХ ОПИСАНИЯ	25
1.3. УРАВНЕНИЕ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ ДЛЯ ПОЛЯРИТОННОГО КОНДЕНСАТА	33
1.4. САМОЛОКАЛИЗАЦИЯ ПОЛЯРИТОННОГО КОНДЕНСАТА ПРИ НАГРЕВЕ РЕШЕТКИ КВАНТОВОЙ ЯМЫ	35
Глава 2. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННОЙ СИСТЕМЕ.....	36
2.1. Экситон-поляритонная модель с резонансной когерентной накачкой.....	36
2.2. Анализ стационарных состояний экситон-поляритонной системы в микрорезонаторе, в квазиклассическом приближении.....	37
2.3. Спектр квантовых флуктуаций	41
2.4. Квантовый анализ стационарных решений.....	48
2.5. Вывод квантовых корреляционных функций первого и второго порядков для экситонной моды.....	50
2.6. Вывод квантовых корреляционных функций первого и второго порядков для фотонной моды	51
2.7. Квантовая фаза экситонных поляритонов.....	52
2.8. Влияние квантовых флуктуаций на эффект бистабильности	54
2.9. Функция Вигнера в бистабильной экситон-поляритонной системе.....	60
2.10. Эффекты сверхгруппировки и антигруппировки в области тройного резонанса	61
2.11. Квантовая статистика LP-поляритонов	65
2.12. Обсуждение неклассических состояний экситонных-поляритонов в области тройного резонанса	69
2.13. Квантовая статистика поляритонов в микрорезонаторном димере.....	72
Глава 3. КВАНТОВЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННОЙ СИСТЕМЕ.....	77
3.1. Управляющие уравнения в модели квантового стохастического резонанса.....	77
3.2. Стохастический резонанс в системе экситонных поляритонов	79
3.3. Эффект квантового стохастического резонанса под действием внешнего квантового шума	82
3.4. Квантовый поляритонный триггер.....	84
Глава 4. САМОЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННОГО КОНДЕНСАТА	89
4.1. УПРАВЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ НА ПОЛЯРИТОННЫЙ КОНДЕНСАТ В СЛУЧАЕ НАГРЕВА РЕШЕТКИ КВАНТОВОЙ ЯМЫ.....	89
4.2. Стационарное однородное решение	95
4.3. Анализ устойчивости однородного решения.....	98
4.4. Численное моделирование уравнений.....	101
4.5. Физические процессы образования светлого солитона из стоковых солитонов	106
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	110
Приложение П1. Вывод уравнения Фоккера-Планка.....	112
Приложение П2. Решение уравнения Фоккера-Планка	115
Приложение П3. Расчет функции Вигнера.....	119
Приложение П4. Вывод основного кинетического уравнения Линдблада в базисе фоковских состояний	120
ЛИТЕРАТУРА.....	122

ВВЕДЕНИЕ

Квантовые свойства света, взаимодействующего с нелинейной средой, представляют собой фундаментальную проблему квантовой оптики. Экситон-поляритонные системы представляют интерес с этой точки зрения. С одной стороны, микрорезонаторы (в которых формируются экситонные поляритоны) обеспечивают сильную связь между фотонами и экситонами, с другой стороны экситонная составляющая дает нелинейность третьего порядка. Особый интерес представляет квантовая статистика излучения столбцового микрорезонатора (микростолбце) в условиях резонансной когерентной накачки и узким световым конусом, когда можно выделить из континуума определенную моду.

Взаимодействие нелинейных эффектов и квантовых свойств приводит к возникновению таких явлений, как квантовый стохастический резонанс, диссипативные фазовые переходы и фотонная или поляритонная блокада. Значимость этого исследования заключается в роли квантового шума в экситон-поляритонной системе, в частности, его влияние на систему в бистабильном режиме. Квантовый шум приводит к эффекту квантового стохастического резонанса в экситонно-поляритонной системе, позволяя внешним сигналам усиливать отклик нелинейной системы при определенных условиях. Следовательно, предлагается модель поляритонного логического триггерного устройства, способного обрабатывать как классические, так и квантовые входные сигналы при работе в этих условиях.

Актуальность выбранной темы диссертации, которая посвящена нелинейным и квантовым эффектам в низкоразмерных полупроводниковых системах, многогранна и охватывает различные области современной физики, технологии и потенциальных применений в квантовой оптике, в квантовых информационных технологиях. Интерес к исследованию поляритонов в полупроводниковых средах связан с характерными для таких систем сильным межчастичным взаимодействием и способностью поляритонов спонтанным

образом переходить в макроскопическое когерентное состояние. В экситонно-поляритонных системах были обнаружены различные явления, включая бистабильность, образование квантовых вихрей, распространение солитонов и сверхтекучесть. Представляет интерес, статистический анализ отклика полупроводниковых систем с поляритонным резонансом при его возбуждении лазерным излучением. Важно отметить, что статистический анализ излучение микростолбцового микрорезонатора в режиме сильной накачки в адиабатическом приближении (когда интенсивность накачки много больше диссипаций в системе) проводится в рамках настоящей работы, насколько известно, впервые.

Степень разработанности темы говорит о необходимости теоретического исследования вопросов квантовой статистики поляритонов и фотонного излучения микростолбца в режиме сильной накачки.

Предмет исследования – квантовые и нелинейные эффекты в низкоразмерных полупроводниковых микрорезонаторных системах при возбуждении лазерным излучением экситонных поляритонов, и разработка на этой основе новых физических принципов с возможностью их практических приложений.

Объект исследования – экситонные поляритоны, формируемые в низкоразмерных микрорезонаторных структурах.

Целью диссертационной работы является исследование для светового излучения в таких объектах, во-первых, нелинейных эффектов – бистабильности, поляритонно-подобного режима распространения поляритонного конденсата, стохастического резонанса; во-вторых, квантовых эффектов – группировки и антигруппировки поляритонных фотонов, а также анализ влияния квантовых шумов на классические состояния в экситон-поляритонной системе в бистабильном режиме.

В соответствии с поставленной целью решались следующие **научные задачи**.

1. Разработка математической квантовой модели экситон-поляритонной системы с учетом нелинейности и диссипаций в рамках методов квантовой оптики – с записью соответствующих Гамильтониана системы и основного кинетического уравнения на матрицу плотности. Решение такого уравнения находится использованием методов квантовых фазовых пространств.

2. Анализ состояний открытой квантовой экситон-поляритонной системы в квантовом фазовом пространстве (c -чисел) с помощью квазивероятности – P -функции. Вывод уравнения Фоккера-Планка на P -функцию и стохастических дифференциальных уравнений на c -числа с соответствующим аналитическим решением в адиабатическом приближении для первого случая и численном решении (методом Эйлера) для второго случая.

3. На основе полученной P -функции для стационарных режимов, вычисление корреляционных функций стационарного процесса с экситонными переменными. С учетом связи квантовых флуктуаций фотонного поля с экситонными состояниями.

4. Моделирование поляритонного конденсата с учетом нагревания кристаллической решетки поляритонным конденсатом.

Научная новизна

Научная новизна работы состоит в следующем.

1. Получены нетривиальные статистические свойства фотонного излучения микростолбика и предсказаны эффекты гигантской группировки и антигруппировки поляритонных фотонов. Существенный эффект антигруппировки был обнаружен как в режиме слабой накачки (по сравнению с параметрами диссипаций в поляритонной системе), так при сильной накачки, при которой среднее значение числа фотонов (излучения) $\langle n \rangle = 1$.

2. Разработана модель управления стохастической динамикой внутри микростолбика, работающего в бистабильном режиме и управляемого как классическими, так и квантовыми внешними сигналами/шумами. Физической основой функционирования данного устройства является эффект квантового

стохастического резонанса в бистабильной поляритонной системе с квантовым шумом в квазиadiaбатическом режиме.

3. Обнаружено явление самолокализации в динамике поляритонного конденсата Бозе-Эйнштейна при определенных условиях, характеризующихся наличием стоячей нелинейной волны в результате теплового расширения решетки квантовой ямы в микрорезонаторе из-за нагрева, вызванного лазерным излучением когерентной накачки.

Теоретическая и практическая значимость

1. Полученные данные по влиянию квантового шума на стационарные бистабильные состояния экситон-поляритонной системы приводят к детерминированным ограничениям на работу поляритонных логических элементов, основанных на явлении бистабильности.

2. Обнаруженный эффект сильной антигруппировки фотонов свидетельствует о явлении фотонной блокады, что может быть использовано для создания поляритонного источника одиночных поляритонных фотонов (фотонов на поляритонных частотах) в фоковском состоянии излучения.

3. Результаты работы используются в научно-образовательном процессе в ВлГУ, в том числе – и в рамках ряда научно-технических программ федерального уровня.

Методы исследования. В проведенных исследованиях применялись теоретические подходы с использованием методов квантовой оптики, в частности, метода P -представления в формализме квантовых фазовых пространств. При этом для численных расчетов нахождения решения стохастических дифференциальных уравнений использовался метод Эйлера и метод физического расщепления для решения уравнения Гросса-Питаевского для волновой функции поляритонного конденсата. Компьютерное моделирование выполнялось с помощью современных программных средств MATLAB и Mathematica, а также программирования на Python.

Положения, выносимые на защиту

1. В системе экситонных поляритонов, формируемых в микрорезонаторном микростолбце условиях, где частота накачки близка к собственным частотам экситонной и фотонной моды, был предсказан эффект антигруппировки и сверхгруппировки.
2. В микрорезонаторном димере – паре близко расположенных микрорезонаторов, связанных туннельными фотонами, предсказано явление поляритонной блокады в условиях, когда параметр нелинейности поляритонной моды меньше характерного параметра диссипации поляритонов.
3. Управление границей диссипативного фазового перехода внешним квантовым шумом одновременно с эффектом квантового стохастического резонанса. Это позволяет реализовывать логические элементы с использованием внешнего шума как переключателя в логических устройствах, основанных на эффекте поляритонной бистабильности.
4. Обнаружен эффект самолокализации поляритонного конденсата в одномерной квантовой яме при фононно-стимулированном вынужденном рассеивании экситонов в поляритонный конденсат, что нагревает решетку квантовой ямы.

Личный вклад автора состоит в самостоятельной разработке и реализации квантовых математических моделей; проведении на их основе математического анализа с выводом и решением, в том числе, численном соответствующих управляющих уравнений с использованием современных аналитических и численных методов, компьютерного моделирования. Анализ полученных физических результатов проводился совместно с соавторами научных работ. Автором была проведена значительная работа над текстом статей, а также представление их в архив и редакции журналов и переписка с редакторами и рецензентами.

Апробация работы

Основные положения диссертационной работы докладывались, обсуждались и рассматривались для перспективных совместных работ с разными участниками на международных научно-практических конференциях: XV Международной научной школе «Наука и инновации 2020»; International Conference on Materials Physics, Building Structures and Technologies in Construction, Industrial and Production Engineering (MPCPE-2020); на стендовой секции в первой научно-образовательной школы по квантовым коммуникациям в 2019г. в городе Сочи на базе образовательного Фонда «Талант и успех»; VI Международной конференции «Современные нанотехнологии и нанофотоника для науки и производства»; 18th International Conference on Laser Optics ICLO 2018; X International Conference of Young Scientists and Specialists «Optics2017». Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 26 работах, в том числе в 7 научных изданиях, опубликованных в журналах Scopus, WoS.

ГЛАВА 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Микрорезонаторы способны удерживать в своей полости (микронных размеров) фотоны оптической длины волны. Микрорезонаторы обладают высокой добротностью, что позволяет манипулировать электромагнитными волнами и обрабатывать их так, как это невозможно с другими типами резонаторов. Микрорезонаторы используются во многих областях физики, и являются важной экспериментальной платформой для поляритоники. Размещая в полость микрорезонатора некую активную среду – квантовую яму или квантовую точку, можно изучать взаимодействие фотонов с экситонами. При определенных условиях возможно образование новой квазичастицы – экситонного-поляритона. Эти квазичастицы интересны, тем, что позволяют осуществлять высокотемпературную Бозе-Эйнштейновскую конденсацию экситонных поляритонов.

Существует множество различных типов конфигурации микрорезонаторов, наиболее популярным типом является столбцовый микрорезонатор (микростолбец). Обладая высокой добротностью и узким оптическим конусом, столбчатая геометрия полости, позволяет осуществлять взаимодействие одиночных фотонов с квазичастицами активной среды. В такой системе возможна квантовая фотонная блокада, когда излучение парами подавлено, и микростолбец излучает одиночные фотоны. Коммерческим представителем источника одиночных фотонов является eDelight Quandela [1], состоящая из микростолбца и квантовой точки, помещенной в полости микростолбца.

В литературном обзоре представлена теория экситонных поляритонов, формируемых в микростолбцах. Дан обзор нелинейных и квантовых эффектов в экситон-поляритонной системе. Дан обзор методов, используемых в диссертации для решения модельной задачи на экситонные поляритоны – как двух взаимодействующих осциллятора, один из которых накачивается

внешним когерентным стационарным лазерным излучением, а во втором учтена нелинейность третьего порядка.

1.1. ЭКСИТОННЫЕ ПОЛЯРИТОНЫ В НИЗКОРАЗМЕРНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

Конденсированные среды представляют собой ансамбль сильно взаимодействующих структурных однопородных частиц (таких как атомы, электроны и др.) Для них характерно кооперативное поведение, согласованная динамика компонент системы. Примерами таких сред являются ферми-жидкости, Бозе-конденсаты, кристаллы и др. В тоже время на фоне однородности такой среды выделяется ряд отдельных групп частиц, вступающих в свои кооперации и совершающие свои индивидуальные движения. Это есть элементарные возбуждения конденсированной среды. Каждая такая группа частиц обладает своей энергией, и, соответственно, подобные образования могут быть выявлены в спектрах элементарных возбуждений. Эти группы объединённых частиц называют квазичастицами. Такое происходит, если образование подобных квазичастиц понижает свободную энергию системы.

Квазичастицы могут, в свою очередь, взаимодействовать друг с другом и образовывать новые композитные квазичастицы. Примером такой композитной квазичастицы является экситон, образованный кулоновским притяжением электрона в зоне проводимости и дырки в валентной зоне.

Поляритонами называют квазичастицы, образованные при взаимодействии фотонов с другими частицами или квазичастицами: плазмон-поляритоны [2], фононные поляритоны [3], экситонные поляритоны [4-6] и т.д. Экситонный поляритон представляет собой композитную квазичастицу [7], состоящую из фотона и экситона, что приводит к модификации оптического спектра [8]. В работе Пекара (1957г.) [5], изменение в оптическом отклике около экситонных линий поглощения (при взаимодействии со светом) было интерпретировано как дополнительная волна в кристалле. Термин поляритон

появился почти одновременно в работах Аграновича [6] и Хопфилда [7]. В 1992 г. Научной группой Вейсбуха было экспериментально продемонстрировано образование экситонных-поляритонов, в планарных микрорезонаторах с квантовыми ямами (КЯ) GaAs [8].

Экситонные поляритоны были обнаружены для различных микрорезонаторных структур (планарных, микропроводах и микростолбцов) с разными активными средами – квантовыми ямами [9], квантовыми точками [10]. В данной диссертации, рассматриваются образование экситонных поляритонов в полупроводниковых низкоразмерных структурах: столбцовой формы полупроводниковом микрорезонаторе – микростолбце [11,12,13] и микропроводе [14].

Для образования экситонных поляритонов необходимо чтобы экситоны непрерывно взаимодействовали с когерентными фотонами и энергия этого взаимодействия, превышала бы энергию диссипаций в системе. Для этого используют микрорезонаторы – резонаторы Фабри-Перро субволновых размеров. Экситоны при этом формируются в низкоразмерных квантовых структура (квантовых ям или квантовых точках) установленных в область пучности стоячей волны микрорезонатора. Устройство такого микрорезонатора показано на рис.1а. На рис. 1б показан спектр отражения микрорезонатора. На рис.1в схематично показан процесс взаимодействие собственной моды резонатора с низкоразмерной структурой, встроенной в полость микрорезонатора. На рис.1г показано модификация спектра отражения при образовании экситон-поляритонных мод.

Электромагнитная волна (лазерного излучения) возбуждает в полости резонаторную моду, см.рис.1а, которая представляет собой стоячую волну, создаваемая отражениями волн от стенок микрорезонатора. Частоты мод в микрорезонаторе определяются формой и размерами самого микрорезонатора. Частоты мод также зависят от свойств материала микрорезонатора, таких как показатель преломления и коэффициент поглощения. Световое поле внутри планарного микрорезонатора квантуется вдоль оси его симметрии. Поэтому,

для нерелятивистских оптических фотонов электромагнитного поля микрорезонатора справедлив следующий параболический закон дисперсии:

$$\omega_{cav} = 2\pi \frac{c}{n_c L_c} + \frac{k_{||}^2}{2m_{ph}^*}, \quad (1)$$

где n_c и L_c – показатель преломления среды в микрорезонаторе и его длина соответственно, где $m_{ph}^* = \hbar \frac{n_c}{cL_c}$ – эффективная “масса” фотона в данном микрорезонаторе. На рис.1б провал в спектре отражения, соответствует собственной моде микрорезонатора.

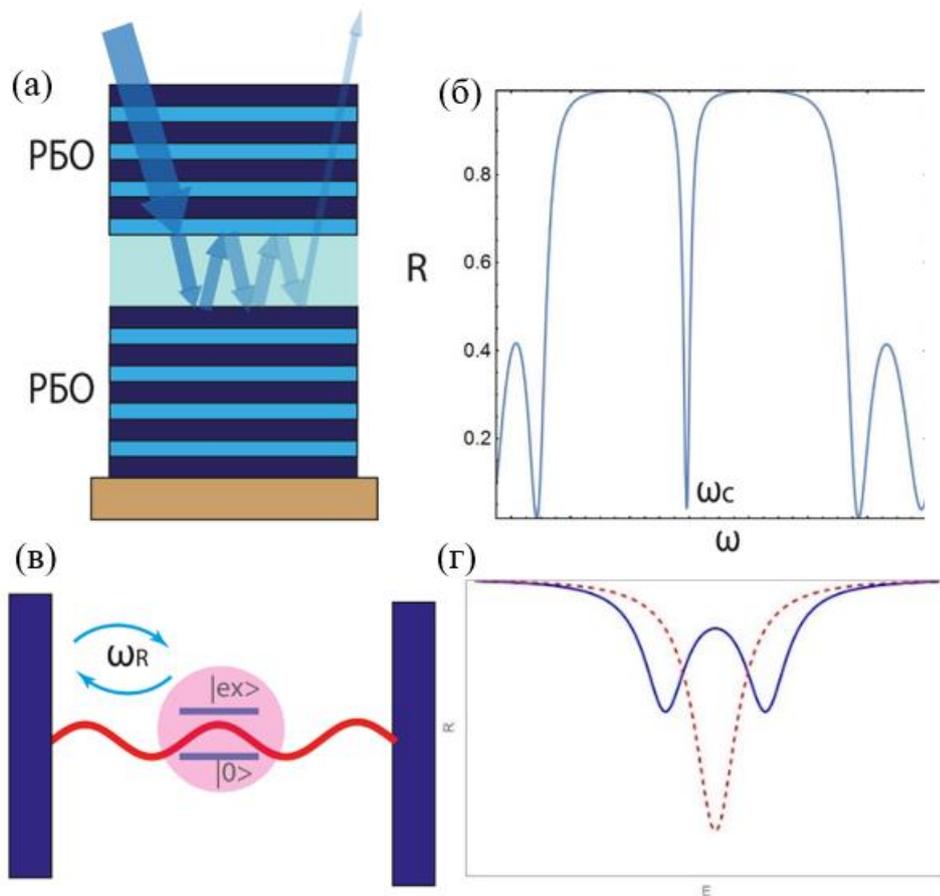


Рисунок 1 – (а) Эскиз микрорезонатора на Брэгговских зеркалах и (б) спектр его отражения резонатора; (в) схема образования экситонного поляритона в микрорезонаторе с квантовой ямой встроенной в пучность собственной моды микрорезонатора и (г) расщепление спектра на поляритонные моды.

Фотоны собственных мод микрорезонатора, в свою очередь поглощаются активной средой, поляризуя в ней экситонные состояния. Через некоторое время экситоны рассеиваются на фононы или рекомбинируют, переизлучая фотоны. Если частота этого фотона совпадает с собственной частотой

микрорезонатора, то происходит когерентный непрерывный процесс взаимных превращений фотонов в экситоны и, наоборот, на частоте Раби Ω_R , см. рис.1в. Образуется новая квазичастица – экситонный поляритон. Для того чтобы процесс взаимодействия фотонов с экситонами был когерентным, необходимо, чтобы частота Раби Ω_R (частота взаимных превращений) превышала скорость релаксации мод $\Omega_R \gg \gamma$ – величина, обратно пропорциональная добротности резонатора. Это называется в литературе режимом сильной связи [15]. Необходимо, чтобы экситоны сильнее взаимодействовали с резонаторной моды, чем с любыми другими оптическими модами или другими каналами девозбуждения (например, фононами). Это условие может соблюдаться только на микронных и субмикронных масштабах. Это обуславливает использование микрорезонаторов для создания экситонных-поляритонов.

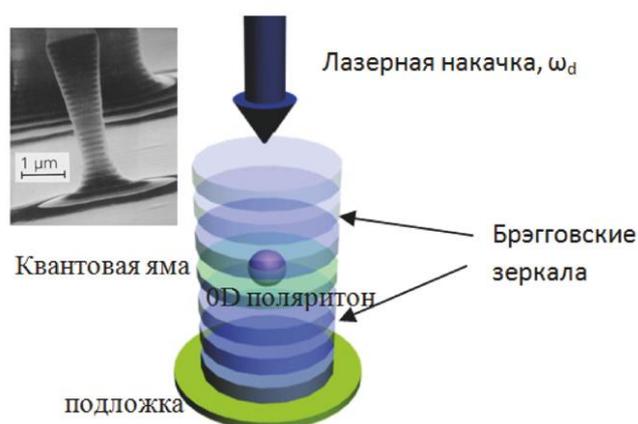


Рисунок 2 – Схема устройства микростолбца. На вставке микроснимок микростолбца на основе GaAs/AlAs с номинальным диаметром 1.3 мкм и 6 мкм в длину [11].

В данной диссертации рассматриваются экситонные поляритоны формируемые в полупроводниковом одномерном микрорезонаторе – столбчатом микрорезонаторе (микростолбце) [11] (см. рис.2). Столбчатые микрорезонаторы, создаются на основе планарных микрорезонаторах, методом вытравления столбчатой структуры, на основе электронно-лучевой литографии и реактивно-ионного травления [16].

Поперечные размеры микростолбца намного меньше поперечных размеров микрорезонаторов (это существенно уменьшает оптический конус

излучения). Экситоны в микростолбцах могут быть сформированы либо на основе квантовых точек [9], либо на основе квантовых ям (квантовые ящики) [10]. В первом случае 0D поляритоны образованы за счет ограничения в пространстве экситонной компоненты в квантовой точке. Во втором случае 0D-конфаймант достигается за счет поперечного ограничения фотонной компоненты. Микростолбцы обладают большей добротностью, т.е. и меньшими потерями на зеркалах [13].

Оптический спектр сильного взаимодействия экситонов с фотонами демонстрирует, появление двух отдельных мод двух поляритонных состояния. Простой квантовой моделью экситонных поляритонов в микрорезонаторе, служит модель, двух взаимодействующих квантовых гармонических осциллятора, который имеет вид [15],

$$\hat{H}_{pol} = \sum_k E_{cav}(k) \hat{\phi}_k^+ \hat{\phi}_k + E_x(k) \hat{\chi}_k^+ \hat{\chi}_k + \hbar \Omega_R (\hat{\chi}_k^+ \hat{\phi}_k + \hat{\phi}_k^+ \hat{\chi}_k), \quad (2)$$

здесь $\hat{\phi}$ ($\hat{\phi}^+$) и $\hat{\chi}$ ($\hat{\chi}^+$) операторы рождения фотонов и экситонов, соответственно.

Третий член в гамильтониане (2) соответствует энергии обменного взаимодействия между экситонами и фотонами, т.е. описывает взаимное превращение фотонов в экситоны и, наоборот, на частоте Раби ω_R в режиме сильной связи. Величина $\hbar \omega_R$ также представляет собой энергетический зазор между состояниями поляритонов (в случае резонанса фотонной моды с экситонной, т.е. $E_{cav} = E_x$). Энергия Раби пропорциональна силе осциллятора, обратно пропорциональна квадратному корню площади наноструктуры и порядка нескольких микроэлектронвольт.

Гамильтониан (2) диагонализировать через коэффициенты Хопфильда C_{ex} , C_{ph} с помощью следующих преобразований [15]:

$$\hat{P}_k = C_x \hat{\chi}_k + C_{cav} \hat{\phi}_k \quad (3a)$$

$$\hat{Q}_k = C_x \hat{\chi}_k - C_{cav} \hat{\phi}_k \quad (3b)$$

Получаем диагональный вид экситон-поляритонного Гамильтониана:

$$\hat{H}_C = E_{LP}(k) \hat{P}_k^+ \hat{P}_k + E_{UP}(k) \hat{Q}_k^+ \hat{Q}_k. \quad (4)$$

Из которого можно легко найти дисперсии поляритонных состояний, т.е. зависимость их собственных частот от волнового числа k ,

$$E_{UP,LP}(k) = \frac{1}{2} \left[E_X(k) + E_{cav}(k) \pm \hbar \sqrt{4\Omega_R^2 + \Delta^2} \right], \quad (5)$$

где $\Delta = \omega_X - \omega_{cav}$ – отстройка между энергией экситонной моды и уровнем энергии фотонной моды.

Этим двум собственным значениям (5) соответствуют два поляритонных состояния $|LP\rangle$ и $|UP\rangle$, которые соотносятся с экситонными и фотонными состояниями $|ph\rangle$ и $|ex\rangle$ соответственно, как их суперпозиция:

$$|LP, UP\rangle = C_x |ex\rangle \pm C_{cav} |ph\rangle, \quad (6)$$

где C_x, C_{cav} коэффициенты Хопфильда, определяющие, доли экситонов и фотонов в поляритоне:

$$|C_{x,cav}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_R^2}} \right) \quad (7)$$

На рис.3а показана зависимость энергий поляритонных состояний от проекции волнового вектора (поляритонов) на плоскость сечения микрорезонатора. Волновой вектор k_{\parallel} поляритона сохраняется при туннелировании поляритона через зеркала микрорезонатора и его превращении в поляритонный фотон. На рис.3а показано зависимость поляритонных частот от нормированной отстройки $\Delta/2\Omega_R$ дисперсионных ветвей поляритонных мод микрорезонатора. Из рисунка видно, что поляритонные моды наиболее сильно отличаются от их составляющих компонент в области резонанса, когда $\Delta = 0$.

Нелинейность в поляритонной системе происходит из-за рассеивания экситонов в кулоновском поле экситонного газа. Столкновения могут быть как упругими, так и нет. Экситоны с импульсами $\hbar k_1$ и $\hbar k_2$ сталкиваясь, рассеиваются на два экситона с импульсами, $\hbar(k_1 + q)$ и $\hbar(k_2 - q)$. Гамильтониан экситон-экситонного рассеивания [17],

$$\hat{H}_{NL} = \sum_{k,k',q} \hbar \frac{U_q}{2} \hat{\chi}_{k+q}^+ \hat{\chi}_{k'-q}^+ \hat{\chi}_k \hat{\chi}_{k'}, \quad (8)$$

где U_q – параметр Кулоновского взаимодействия (отталкивания) между экситонами, этот параметр обратно пропорционален эффективной массе экситона. В дальнейшем будут рассматриваться только упругое экситон-экситонное рассеивание.

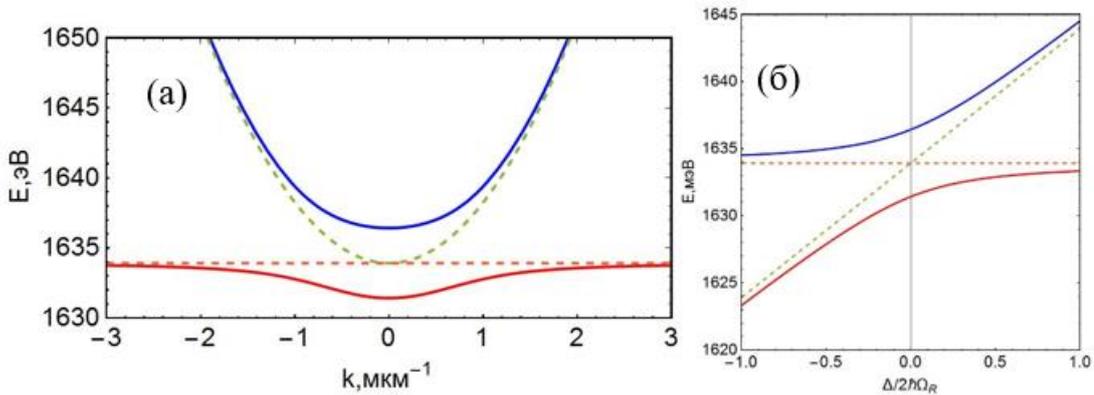


Рисунок 3 – (а) Дисперсионные кривые поляритонов (сплошной линией) а пунктиром изображены собственные состояния фотонов и экситонов при $\Delta=0$. (б) Антипересечение дисперсионных ветвей мод микрорезонатора с экситонным состоянием квантовой ямы с образованием поляритонных состояний для значения проекции волнового вектора на плоскость сечения резонатора $k_{||} = 0$.

С учетом узкого светового конуса микростолбца дисперсией можно пренебречь. При этом волновой вектор испущенных фотонов перпендикулярен плоскости КЯ, т.е. $k_{||}=0$. Тогда гамильтониан записывается только для одной фотонной моды и моды экситонов с учётом экситон-экситонного рассеивания принимает следующий вид:

$$\hat{H}_{pol} = E_{cav} \hat{\phi}^+ \hat{\phi} + E_x \hat{\chi}^+ \hat{\chi} + \hbar \omega_R (\hat{\phi}^+ \hat{\chi} + \hat{\chi}^+ \hat{\phi}) + \hbar \frac{U}{2} \hat{\chi}^+ \hat{\chi}^+ \hat{\chi} \hat{\chi} \quad (9)$$

Учесть диссипации можно введя следующий эффективный Гамильтониан на основе Гамильтониана (9):

$$H_{eff} = \hbar(\omega_{cav} - i\gamma_{cav}) \hat{\phi}^+ \hat{\phi} + \hbar \left(\omega_x + \frac{U \bar{n}_x}{2} - i\gamma_x \right) \hat{\chi}^+ \hat{\chi} + \hbar \omega_R (\hat{\phi}^+ \hat{\chi} + \hat{\chi}^+ \hat{\phi}), \quad (10)$$

Выражение для собственных поляритонных частот можно получить, диагонализировав эффективный Гамильтониан (10), тогда получаем модифицированный поляритонный спектр [15],

$$\omega_{UP,LP}(k) = \text{Re} \left[\frac{\omega_x(k) + \omega_{cav}(k)}{2} - i \frac{(\gamma_{cav} + \gamma_X)}{2} + \frac{U}{2} \bar{n}_x \pm \sqrt{\omega_R^2 + \left(\Delta - \frac{U}{2} \bar{n}_x \right)^2} \right]. \quad (11)$$

В нелинейном стационарном режиме с ростом мощности накачки уменьшается длина волны поляритонных фотонов. Это связано с тем, что резонансная частота поляритонов (в стационарном режиме) зависит от плотности экситонов. В свою очередь, плотность экситонов пропорционально интенсивности накачки. Синее смещение спектра наблюдается с ростом интенсивности накачки I_p , а красное смещение при его уменьшении. При определенных значениях параметра отстройки Δ система демонстрирует эффект памяти. При увеличении интенсивности накачки после некоторого значения I_{p2} , при котором наблюдается скачок частоты спектра поляритонных фотонов в область синего спектра см. синий вектор на рис. 4б, мы достигаем некоторого значения частот. Уменьшая величину интенсивности накачки, мы можем наблюдать уменьшение частоты излучения. Но теперь резонансная кривая идет по другой траектории (плавное красное смещение, см. красный вектор на рис. 4б), вплоть до другого порогового значения накачки I_{p1} , где наблюдается резкое уменьшение энергии поляритона. Кривая поляритонного резонанса следует за кривой среднего числа экситонов см. петлю гистерезиса на рис. 4а. Петля гистерезиса обусловлена эффектом бистабильности – наличием двух или более (возможных) стационарных устойчивых состояний в системе.

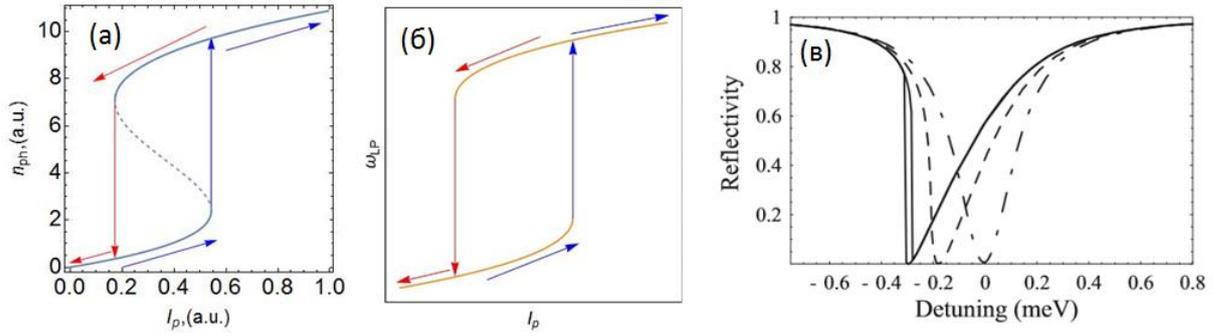


Рисунок 4 – (а) Кривая бистабильности, стрелками показана петля гистерезиса. Построена по формуле (13); (б) синее смещение частоты резонанса нижней поляритонной ветки при прямом ходе на петле гистерезиса и красное смещение при обратном проходе; (в) Коэффициент отражения как функция экситон – фотонной отстройки для различных интенсивностей накачки $I \approx 0$ – штрих-пунктирная линия, $I_p=0.5\text{мВт}$ – пунктирная линия и $I=1\text{мВт}$ – сплошная линия. Частота лазера $\omega_p = \omega_X - \Omega_R/2$ – равна частоте нижней поляритонной ветки при нулевой экситон-фотонной отстройке. Рисунок 4в взят из работы Джикабино [18].

Из условий стационарности решений:

$$\dot{\phi} = \dot{\chi} = 0. \quad (12)$$

Можно получить параметрическую кубическую функцию связывающую число частиц (экситонов, фотонов и/или поляритонов) с интенсивностью накачки. Для поляритонов такая функция имеет следующий вид,

$$2\gamma_{cav} C_{cav}^2 I_p = n_{LP} \left(\gamma_{LP}^2 + (\delta_p + C_X^4 U n_{LP})^2 \right), \quad (13)$$

где $\delta_p = \omega_{LP} - \omega_p$ – частота отстройки между поляритонным резонансом и частотой лазера; $\gamma_{LP} = |C_X|^2 \gamma_X + |C_{cav}|^2 \gamma_{cav}$ – параметр затухания поляритонной моды.

Петлю гистерезиса можно наблюдать в спектрах отражения и поглощения (в бистабильной области). Плотность поляритонов связано с плотность числа фотонов через коэффициент Хопфильда, следующим образом:

$$n_{ph} \equiv |\phi|^2 = C_{cav}^2 n_{LP}. \quad (14)$$

На рис.4в показан спектр отражения от экситон-поляритонной системы в бистабильном режиме из работы Элизабет Джикабино [18]. Резонанс взят для нулевой экситон-фотонной отстройки $\Delta=0$ – штрих пунктирная кривая. При возрастании интенсивности величины накачки этот резонанс сдвигается влево (к экситонному резонансу) – эффект синего смещения поляритонного резонанса. При сканировании интенсивности по интенсивности накачки наблюдается цикл гистерезиса – сплошная линия на рис. 4б.

Поляритоны излучаясь из резонатора, превращаются в поляритонные фотоны. Они несут полную информацию о внутрирезонаторном поляритонном состоянии. Это обеспечивает возможность экспериментально исследовать экситон-поляритонные состояния микрорезонаторной системы с квантовыми ямами (точками).

Экситон-поляритонная система является термодинамической неравновесной системой. В первую очередь это связано с конечным временем жизни составляющих её компонент – фотонов и экситонов. Параметр диссипации фотонов в резонаторе связан с конечным временем жизни фотонов внутри резонатора. Время жизни экситонов определяется скоростью рекомбинации экситонов на электроны и дырки.

Процессы диссипации учтены в в эффективном Гамильтоне (10) в виде мнимой поправки $i\gamma_{cav}$ на частоту. Это обуславливает конечное время жизни поляритонов. Для компенсации процессов релаксации используют источники внешней энергии – лазеры, электрический ток и др. Лазерная накачка позволяет диссипативным системам находиться в стационарном состоянии.

Во-вторых, это связано с взаимодействием с резервуаром некогерентных экситонов. Взаимодействие экситон-поляритонной системы с этим резервуаром не является термодинамически равновесным. Населенность резервуара экситонов подчиняется кинетическому уравнению Больцмана и испытывает затухание вплоть до некоторого равновесного значения см. (17).

Установления стационарного режима экситонного резервуара называется термолизацией. Время термолизации по величине порядка нескольких

пикосекунд [15]. Резервуар экситонов приходит к некоторому равновесию с экситон-поляритонной системой. Энергия при этом, уходит как в резервуар горячих экситонов, так и нагревая решетку (фононный резервуар). Отток энергии компенсируется притоком энергии на резервуар горячих экситонов. Который, в свою очередь поддерживает стационарный режим на самом конденсате, передавая ей энергию, см. рис.5.

В квазиклассическом приближении диссипации вводят феноменологически образом (на уравнение Гинзбурга-Ландау). Диссипация экситонных поляритонов обусловлена диссипацией фотонных γ_{ph} и экситонных γ_{ex} состояний, а также неупругим взаимодействием с резервуаром высокочастотных некогерентных экситонов R (горячих экситонов). Время жизни поляритона в основном определяется временем жизни микрорезонаторных фотонов $\tau_{LP} \cong |C_{cav}|^2 \gamma_{cav} \sim 1 - 10$ пс [15].

В зависимости от вида накачки энергии различают два основных способа накачки энергии в поляритонную систему. Первый – это резонансная накачка см. рис.5а. В этом случае экситон-поляритонная система не взаимодействует с резервуаром горячих экситонов. Второй случай – это нерезонансная накачка (вдали от резонанса и/или под углом к плоскости резонатора) см. рис 5б. Взаимодействие с резервуаром горячих экситонов является неупругим (без сохранения энергии и неэрмитовым). Нерезонансная оптическая накачка с энергией фотона меньшей ширины запрещенной зоны КЯ генерирует неравновесные электронно-дырочные пары. Эти возбуждения связываются в “горячие” экситоны [15] в области больших импульсов. “Охлаждаясь” на тепловые колебания решетки, “горячие” экситоны релаксируют к основному поляритонному состоянию. Схематично, оба процесса создания поляритонных состояний показаны на рис.5.

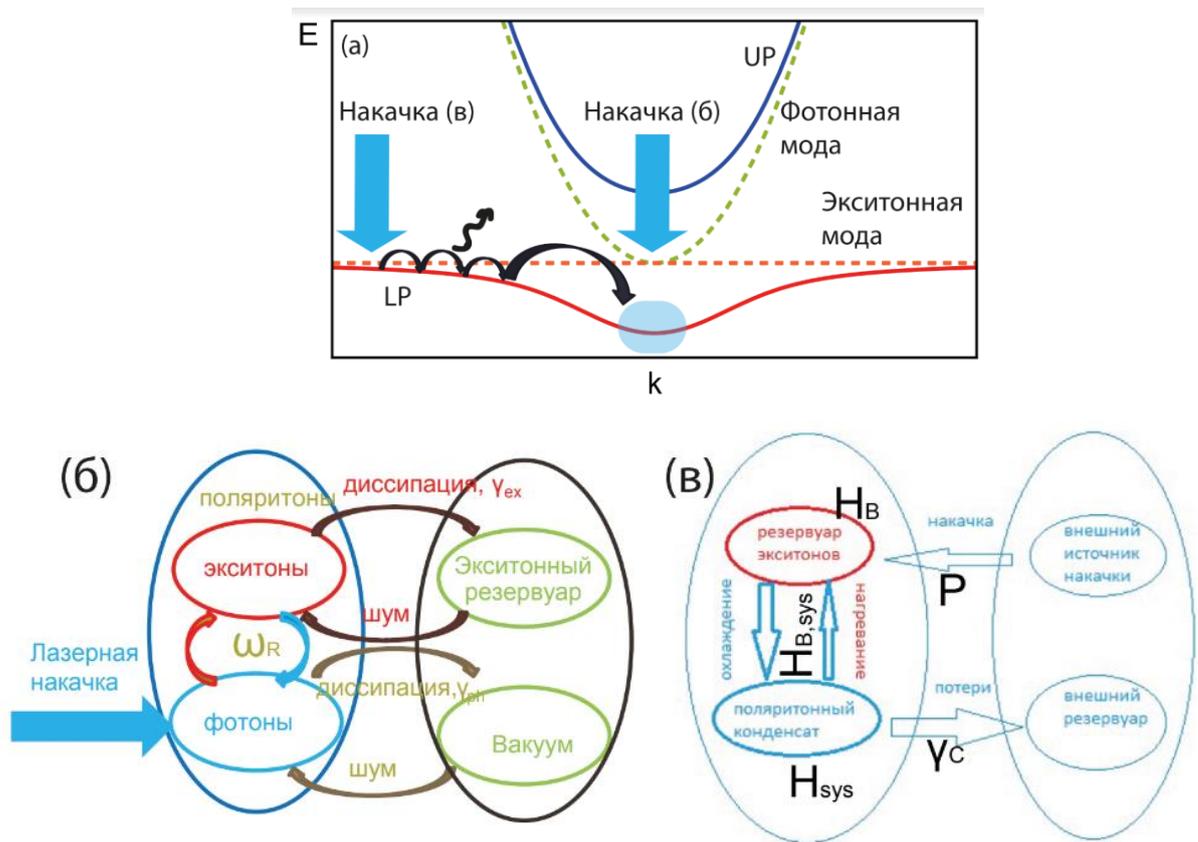


Рисунок 5 (а) Образование поляритонного конденсата, термодинамическое равновесие поддерживается (б) внешней когерентной резонансной (лазерной) накачкой и (в) Накачивается экситонный газ с высокой энергией который приходит к детальному равновесию с поляритонным конденсатом.

Для поддержания стационарного режима можно либо использовать когерентную резонансную лазерную накачку возбуждая фотонные состояния $k=0$. Либо направить свет лазера под углом к поперечному сечению микрорезонатора, что приводит при определенных углах к сильному поляритон-поляритонному рассеиванию [19]. Нерезонансная накачка возбуждает экситоны с большими импульсами и энергией (резервуар “горячих” экситонов). Эти “горячие” экситоны релаксируют до поляритонных состояний, нагревая кристаллическую решетку. Бозе конденсат экситонных-поляритонов, в этом случае, находится в некотором эффективном потенциале резервуара “горячих” экситонов, который удерживает их (так как поляритон-поляритонное рассеивание обладает положительным параметром нелинейности и положительной эффективной массой).

Когерентная лазерная накачка

Запишем управляющие динамические уравнения на фотонную и экситонную волновые функции $\Psi_C(r)$ и $\Psi_X(r)$ заданные соответствующими связанными уравнениями Гросса-Питаевского [20]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_C}{\partial t} = \left(E_C - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_C} \right) \psi_C + \hbar \frac{\Omega_R}{2} \psi_X - \frac{i\hbar}{2} \gamma_c \psi_C + \hbar E(r, t), \quad (15a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_X}{\partial t} = \left(E_X - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_X} \right) \psi_X + \hbar \frac{\Omega_R}{2} \psi_C + \chi |\psi_X|^2 \psi_X, \quad (15b)$$

где m_C (m_X) есть эффективная масса фотона и экситона, χ – коэффициент экситон-экситонного рассеивания, Ω_R частота Раби, $E(r, t)$ – амплитуда когерентной лазерной (импульсной или непрерывной) накачки. Здесь лазерная накачка передает энергию, непосредственно на фотонную моду. Поле непрерывной накачки

$$E(r, t) = E_p e^{ikr - i\omega_p t} \quad (16)$$

где E_p – амплитуда накачки, она зависит от интенсивности накачки на входе в микрорезонатор, следующим образом, $E_p = \sqrt{\frac{\gamma_C I_0}{2\hbar\omega_p}}$.

Нерезонансная лазерная накачка

Теоретическая модель образования экситонных поляритонов при нерезонансной накачки в квазиклассическом пределе основана на уравнении Гинзбурга-Ландау, где конденсат экситонных поляритонов может быть описан волновой функцией нижней поляритонной ветки [21],

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{LP}}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_{LP}} + \hbar g_C |\psi_{LP}|^2 + \hbar g_R n_R + \frac{i\hbar}{2} (R n_R - \gamma_c) \right] \psi_{LP}, \quad (17)$$

где $g_C = |C_x|^4 U/2$ – коэффициент кубической нелинейности поляритонной моды; g_R – коэффициент упругого взаимодействия конденсата с резервуаром горячих экситонов; γ_c – коэффициент диссипаций поляритонной моды (рассеивание на фононный резервуар); R – коэффициент рассеивания горячих

экситонов на поляритонный конденсат (неупругое взаимодействие). Вывод уравнения (17) дан в разделе 1.3.

Динамика экситонного резервуара описывается кинетическим уравнением Больцмана [21]:

$$\frac{\partial n_R}{\partial t} = P(x, y) - \gamma_R n_R - R n_R |\psi_{LP}|^2, \quad (18)$$

здесь P амплитуда накачки; γ_R – коэффициент диссипации горячих экситонов; n_R – населенность резервуара некогерентных экситонов.

При условии что релаксация на конденсат больше конденсатных потерь можно получить стационарное состояние на популяцию числа “горячих” экситонов,

$$n_R = \frac{P}{\gamma_R + R |\psi|^2}. \quad (19)$$

Экситонные поляритоны – это Бозе-квазичастицы, поэтому они способны конденсироваться, когда макроскопически большое количество частиц занимают одно (основное) квантовое состояние. Бозе-Эйнштейновская конденсация (БЭК) – это коллективный эффект бозе-частиц отражающий их тенденцию занимать одно квантовое состояние (т.е. иметь одну энергию и одну фазу). Тогда они могут описываться одной макроскопической когерентной волновой функцией Ψ .

Эффективная масса поляритонов состоит из эффективной массы экситонов и фотонов с некими весами, определяемыми коэффициентами Хопфильда [15],

$$\frac{1}{m_{LP}} = \frac{|C_x|^2}{m_x} + \frac{|C_{cav}|^2}{m_{cav}} \quad (20)$$

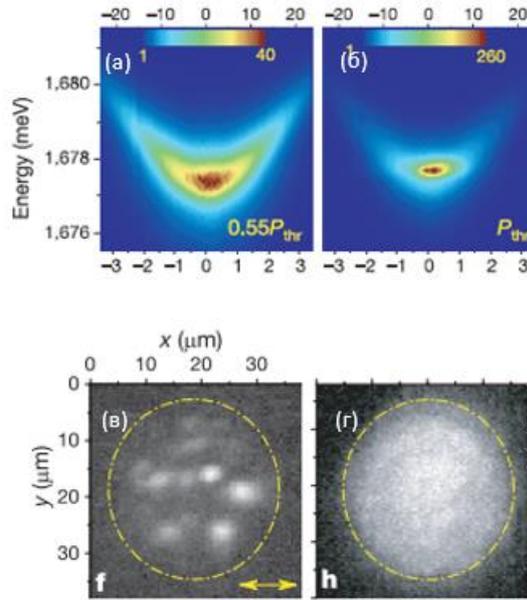


Рисунок 6 –Спектр эмиссии экситонных поляритонов (а) до и (б) после порога Бозе-конденсации $P_{th} = 1.67 \text{ кВт/см}^2$; (в) и (г) Пространственное распределение интенсивности излучения [22,23].

При увеличении мощности накачки в центре распределения излучения формируется пик излучения, соответствующей состоянию с $k_{||}=0$ см. рис.6а,б. Происходит интенсивное стимулированное рассеивание высокоэнергетических поляритонов (поляритон-поляритонное LP-LP рассеивание) на дно дисперсионной зоны см. рис.6в,г. В итоге образуется поляритонный БЭК способный когерентно излучать узконаправленный лазерный свет.

Критическая температура образования Бозе-конденсата обратно пропорциональна эффективной массе квазичастиц [24],

$$k_B T_c \sim \frac{\hbar^2}{m^*} n^{3/2}, \quad (20)$$

где n – плотность числа частиц конденсата, m^* –эффективная массой частиц.

Эффективная масса экситона много больше эффективной массы фотонов микрорезонатора $m_{LP}(k \sim 0) \sim 10^{-4} m_x$, что позволяет реализовать в экситон поляритонных системах высокотемпературную Бозе-конденсацию. Корнеллем и Виманом в 1995г. был получен атомный БЭК при 170 нанокельвинах [24]. В свою очередь экситонные поляритоны 10^9 раз легче

атомов рубидия. Критическая температура Бозе-конденсата атомного газа $1\text{нк}-1\text{мкК}$, экситонов $1\text{мК}-1\text{К}$ экситонных поляритонов $\sim 1\text{К}$ [25]. В 2007г. Дэвид Сноук продемонстрировал неравновесный БЭК экситонных поляритонов в ловушке [23].

1.2. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ И МЕТОДЫ ИХ ОПИСАНИЯ

Взаимодействие квантовой системы с резервуаром (или макросистемой) приводит к разрушению квантовых состояний в системе. Система приходит к множественным корреляциям с модами резервуара. Она уже не может быть описана чистым состоянием, и находится в смешанном состоянии, математически система описывается матрицей плотности ρ [26].

Рассматриваемая система описывается редуцированной матрицей плотности $\rho_S = \text{Tr}_R(\rho)$, где ρ – матрица плотности “система+окружение” и Tr_R – обозначает взятие частичного следа от операторов по переменным окружения (резервуару). В этом случае, образуется неравновесный поляритонный конденсат. Окружающая среда, моделируется как два независимых резервуара $\rho_{\text{res}} = \rho_{\text{res_ex}} \otimes \rho_{\text{res_ph}}$.

Используя матрицу плотности можно найти квантово-механическое математическое ожидаемое значение от операторов, взяв след от произведения оператора на матрицу плотности [27],

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}). \quad (22)$$

Динамика открытой квантовой системы описывается квантовым аналогом уравнения Лиувилля на статистический оператор ρ [27],

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (23)$$

Уравнение на матрицу плотности системы ρ_S имеет следующий вид [26],

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S = -\frac{1}{\hbar^2}\text{Tr}_R \int_0^t dt' [H(t), [H(t-t'), \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_R(0)]]. \quad (24)$$

В выражении (24) след берется по переменным резервуара также при выводе (24) были допущены следующие приближения [26-30]:

Резервурное приближение. Предположим, что в начальный момент времени, отсутствуют корреляции между резервуаром и системой. Тогда можно разложить матрицу плотности композиции “система+резервуар” на тензорное произведение матриц плотностей системы и резервуара, соответственно $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R$. При этом среднее число частиц, поступающих из резервуара в систему, не зависит от эволюции самой системы и определяется должным образом тепловым равновесием резервуара.

Борновское приближение. Если энергии связи резервуара с системой достаточно мала по сравнению с энергией резервуара и системы, то система не вносит ощутимых вкладов в её динамику. Поэтому с учетом резервуарного приближения можно записать матрицу плотности композиции система+резервуар для любого момента времени в виде тензорного произведения $\rho(t) = \rho_S(t) \otimes \rho_R$.

Марковское приближение. Характерное время релаксации резервуара намного меньше, чем временной масштаб динамики системы $\tau_{\text{sys}} \gg \tau_{\text{res}}$, т.е. корреляции резервуара с системой достаточно быстро затухают. В этом случае происходит Марковская динамика взаимодействия с резервуаром – случайный процесс без “памяти” о прошлых состояниях.

Уравнение (22б) можно переписать в компактной форме используя Линдбладовский супероператор \hat{L} [26,31],

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S] + \hat{L}[\hat{\rho}_S]. \quad (25)$$

Форма супероператора \hat{L} (супероператор выделен двойной шляпкой) зависит от того как система взаимодействуют с окружающей средой. Например, для теплового резервуара (в случае одночастичных взаимодействий), он имеет такой вид (без учета Лэмбовского сдвига) [26,31]:

$$\hat{L}[\hat{\rho}_S] = \gamma(2a\rho_S a^+ - \rho_S a^+ a - a^+ a \rho_S). \quad (26)$$

Данный подход описывает взаимодействие с резервуаром – супероператорами Линдлаба содержащими параметры диссипаций γ – величин обратных времени релаксации системы (в соответствии с золотым правилом

Ферми [30]). Эти релаксационные слагаемые в основном кинетическом уравнении возникают при феноменологическом описании диссипативных процессов в классической системе.

В классической механике эволюция системы из N частиц определяется фазовой траекторией в фазовом пространстве, где определенному состоянию системы соответствует точка в $6N$ -мерном конфигурационном пространстве \mathbb{R}^{3N} . В классической статистической механике вместо определения точного состояния системы, т.е. знания всех обобщенных координат системы $\{q,p\}$, достаточно знания некой функцией распределения вероятности (её эволюцию, т.е. основное кинетическое уравнение на плотность вероятности). Состояние системы описывается как “облако” точек в фазовом пространстве, образуя ансамбль, согласно определенной функции распределения вероятности $P(\{q,p\})$. Классическая функция распределения на фазовом пространстве позволяет вычислить ожидаемые значения любой функции величин, координаты и/или импульса (или других сопряженных переменных) следующим образом [32]:

$$\langle O(q,p) \rangle = \int dq \int dp O(q,p) P_{cl}(q,p) \quad (27)$$

где интегрирование ведется по всему фазовому пространству.

В квантовом фазовом пространстве можно определить соответствующую функцию распределения вероятности (или квазивероятности). Изложение квантовой механике в фазовом пространстве была разработано в конце первой половины прошлого века Вигнером [33], Вейлем [34], Моэлем [35] и Гроенвольдом [36]. В 1932г. Вигнер [33] ввел одноименную функцию, как квантовую поправку к классической плотности Лиувилля.

Функции квазивероятностей позволяют вычислить квантово-механические ожидаемые значения операторов. Для этого нужно некоторым образом упорядочить операторы, используя коммутационные соотношения для них, и дальше сопоставить упорядоченным операторам их c -числа. Для расчета квантовых ожидаемых значений $\langle \hat{O}(\hat{a}^+, \hat{a}) \rangle$, с использованием P -функции как функции распределения вероятности (квазивероятности),

необходимо оператор \hat{O} привести к нормально упорядоченной форме и далее перейти к s -числам. Аналогично, используя общее выражение для ожидаемых величин (22) и проведя процедуру нормального упорядочивания, оператора \hat{O} , а также представив матрицу плотности в антинормальной форме, можно получить выражение для средних через P -функцию как квазивероятность в (27), где $O^n(\alpha^*, \alpha)$ есть s -число:

$$\langle \hat{O}(\hat{a}^+, \hat{a}) \rangle = Tr(\hat{O}(\hat{a}^+, \hat{a}) : \hat{\rho}(\hat{a}^+, \hat{a}) :_a) = \int d^2\alpha O^n(\alpha^*, \alpha) P(\alpha^*, \alpha) \quad (28)$$

Для неклассических состояний при использовании P -функции следует расширить квантовое фазовое пространство (в отличие от функции Глаубера). Обобщенное P -представление [37,38] вводится как недиагональное представление матрицы плотности [37,38]:

$$\rho = \int P(\alpha, \beta) \Lambda(\alpha, \beta) d\mu(\alpha, \beta) \quad (29)$$

где $d\mu(\alpha, \beta)$ – мера интегрирования от которого зависит выбор того или иного представления с тем или иным контуром интегрирования в фазовом пространстве; здесь $\Lambda(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle}$ – проекционный оператор, аналитичный на всем фазовом пространстве. Из того факта что след матрицы плотности равен единице, следует что P -функция нормирована на единицу, т.е. $I = \int P(\alpha) d^2\alpha = 1$. Это имеет простую интерпретацию, в самом деле если P -функция есть классическая вероятность, то вероятность найти систему в каком-то состоянии равна единице. Более слабым условием, является неравенство $I < \infty$ [38].

При вычислении квантовых корреляционных функций важен выбор меры интегрирования. Представлению Глаубера-Сударашана [39], соответствует мера интегрирования: $d\mu(\alpha, \beta) = \delta^2(\alpha - \beta) d^2\alpha d^2\beta$. Например, в случае когерентного состояния $|\beta\rangle$ P -функция есть дельта функция $P(\alpha) = \delta^2(\alpha - \beta)$. Комплексному P -представлению [40] соответствует мера интегрирования: $d\mu(\alpha, \beta) = d\alpha d\beta$. Здесь (α, β) , рассматриваются как комплексные переменные, которые должны быть интегрированы по индивидуальным контурам C, C' . Она может не иметь вероятностную

интерпретацию в фазовом пространстве, однако ее всегда можно использовать для расчета одновременных корреляционных функций. Для положительного P -представления мера интегрирования такая $d\mu(\alpha, \beta) = d^2\alpha d^2\beta$. Здесь α, β независимые комплексные переменные фазового пространства. Тогда матрицу плотности можно представить через такую P -функцию, так [40],

$$\rho = \int P(\alpha, \beta) \frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle} d^2\alpha d^2\beta$$

P -функция позволяет перейти от операторного уравнения на матрицу плотности (25) к уравнению Фоккера-Планка (УФП) на P -функцию в частных производных. Это уравнение определяет стохастическую (“классическую”) динамику в квантовом фазовом пространстве. Другими словами, использование P -функция позволяет перейти от рассмотрения квантового осциллятора к модели стохастического осциллятора с определенным дрейфом (или сносом) и матрицей диффузии, определяющие полуклассическую динамику и квантовые флуктуации соответственно.

В работе [41] был проведен анализ корреляционной функции второго порядка излучения микростолбца в зависимости от его диаметра см. рис. 7а. При уменьшении диаметра (см. Рис.7а) наблюдается все более острый пик корреляционной функции второго порядка в области фазового перехода, см. рис.7б. Чем больше диаметр микростолбца, тем больше система проявляется когерентность системы, и пиковая зависимость от накачки в области фазового перехода, становится менее выраженной, см. рис.7а. Для микрорезонаторов диаметром порядка 10 мкм поведение корреляционной функции второго порядка столбчатого микрорезонатора близко к поведению корреляционной функции второго порядка излучения от планарного микрорезонатора.

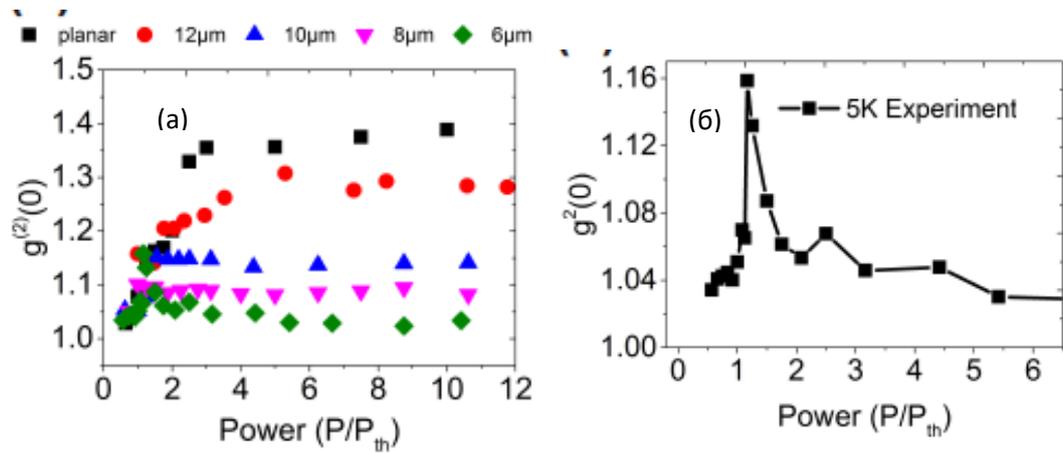


Рисунок 7 – Корреляционная функция второго порядка излучения: а) черные точки для планарного микрорезонатора, остальные для микрорезонаторов различных диаметров и б) корреляционная функция второго порядка излучения от микрорезонатора с диаметром 6 мкм [41].

Такая особенность является следствием процесса подсчета фотонов (дробового шум). Действительно, ниже порога, излучение поляритонных фотонов происходит редко, и поэтому система по существу отображает когерентную статистику накачки. Квантовая статистика поляритонных фотонов столбчатого микрорезонатора показывает конкуренцию между когерентностью около пика $g^{(2)}$ до достижения порога конденсации и дальнейшее установление макроскопической когерентности.

Бистабильные оптические системы могут быть использованы как логические элементы и элементы оптической памяти. Например, классический поляритонный логический элемент, предложенный в работе [42], основан на эффекте бистабильности. Принцип его работы основан на управлении внешними лазерными импульсами, переключениях между бистабильными состояниями связанных микростолбцов. Однако в физических системах всегда присутствует шум (тепловые, квантовые и др.) В случае достаточно большого значения мощности шума, становятся возможными случайные динамические переходы между бистабильными состояниями. При этом классическая петля гистерезиса сужается в зависимости от скорости (сканирования) интенсивности накачки (или другого управляющего параметра). Это называется динамической петлей гистерезиса [41], см. рис.8.

В работах [41,43,44] уже рассматривалось влияние шума (как классического, так и квантового) на бистабильный режим экситонных-поляритонов. Было обнаружено, что область (по параметру интенсивности накачки) бистабильного отклика экситонных-поляритонов короче, нежели чем теоретическая ширина бистабильной петли для данной системы в классическом пределе. Наблюдалась зависимость ширины области бистабильности от скорости лазерной накачки. В работе [41] это было названо динамической петлей гистерезиса. Подобное сжатие бистабильной петли объясняется влиянием шума (в том числе квантового). Действительно, в других подобных работах также было обнаружено, что бистабильный отклик, характеризуемый петлей гистерезиса, оказывается более узким, чем ожидалось в классическом случае. Такое сжатие петли гистерезиса свидетельствует о значительном влиянии шумовых эффектов на поведение поляритонов.

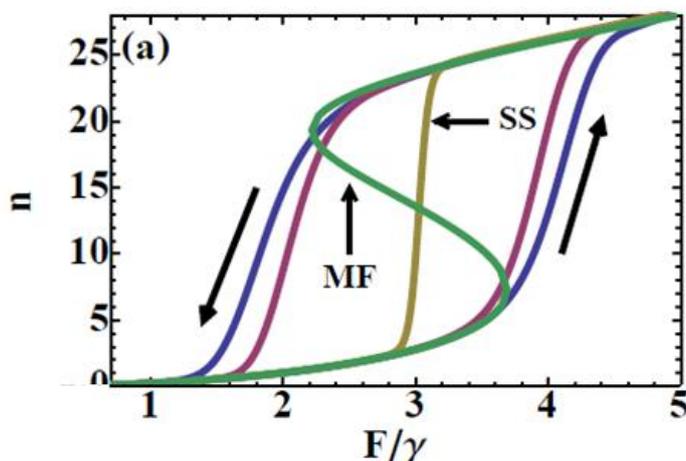


Рисунок 8 –Динамическая петля гистерезиса в сравнении с классической петлей [41]. Оранжевая кривая соответствует квантовому решению; зелёная кривая – классическое решение; синяя и фиолетовые кривые соответствуют динамическим петлям гистерезиса с учетом квантовых шумов при накачках с различной длительностью.

Если внешний сигнал достаточно мощный, т.е. амплитуда сигнала достаточно велика, чтобы преодолеть потенциальный барьер (в фазовом пространстве), он может перевести бистабильную систему из одного устойчивого состояния в другое. Соответственно, слабый же сигнал с амплитудой ниже некоторого порогового значения не может перевести

систему из одного режима в другой. Однако при наличии шума в системе, при определенной частоте сигнала и мощности шума переход из одного состояния в другой становится возможным даже для слабого сигнала. Это эффект стохастического резонанса (СР) [45,46,47].

Квантовые шумы способны переключать состояния системы из одного устойчивого состояния в другое. При этом есть два сценария таких переключений: (I) по типу мягкой бифуркации, см.рис 9а и (II) либо по сценарию жесткой бифуркации, см.рис.9б с одним скачком с верхнего потенциальной ямы на нижнюю потенциальную яму (в фазовом пространстве).

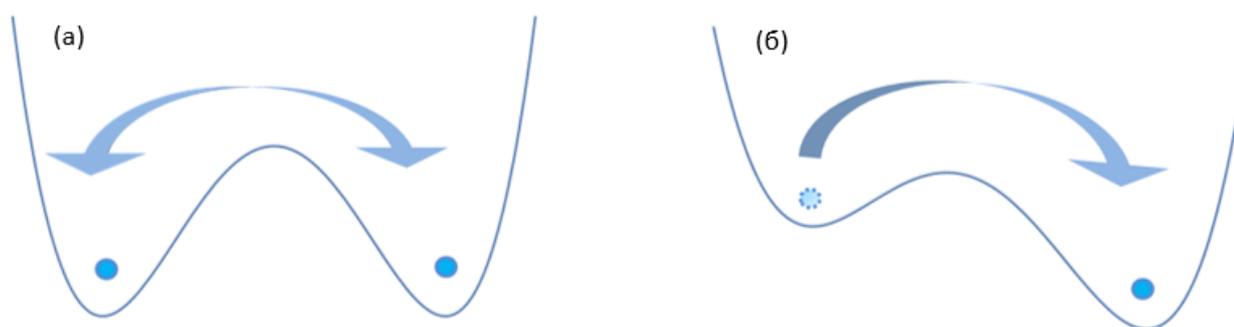


Рисунок 9 – мягкий и жесткий типы бифуркации в бистабильной системе.

Стохастический резонанс – явление, при котором слабый внешний сигнал усиливается в отклике нелинейной системы из-за дополнительных шумов (этот шум может принадлежать как самой системе, а также его источником могут быть внешние квантовые сигналы). Во многих исследованиях сообщалось о наблюдениях стохастического резонанса для состояний оптически бистабильных лазерных систем [48], пассивных оптических резонаторах [49], атомных системах [50], схемах триггера Шмитта [46] и экситон-поляритонных систем [43]. В работе [41] было показано, что в присутствии классического внешнего шума (от накачки) в экситон-поляритонной бистабильной системе приводит к эффекту стохастического резонанса по отношению к внешнему сигналу.

1.3. УРАВНЕНИЕ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ ДЛЯ ПОЛЯРИТОННОГО КОНДЕНСАТА

Стационарный режим в поляритонном конденсате можно поддерживать как резонансной когерентной накачкой, так и нерезонансной накачкой (которая, в свою очередь может быть когерентной лазерной, так и некогерентной – например, электрической инжекцией). Если использовать нерезонансную непрерывную оптическую накачку, то возбуждаются экситоны с большей энергией. Формируется некогерентная область с большим значением квазиимпульсов (резервуар «горячих» экситонов) с населенностью n_0 . Из-за процессов стимулированного рассеивания (на акустических фононах) эти экситоны переходят в состояние с меньшей энергией в область образования конденсата, тем самым подпитывая его. Избыток энергии от такого рассеивания способствуют релаксации горячих экситонов из резервуара в основное состояние конденсата, см. Рис.10б.

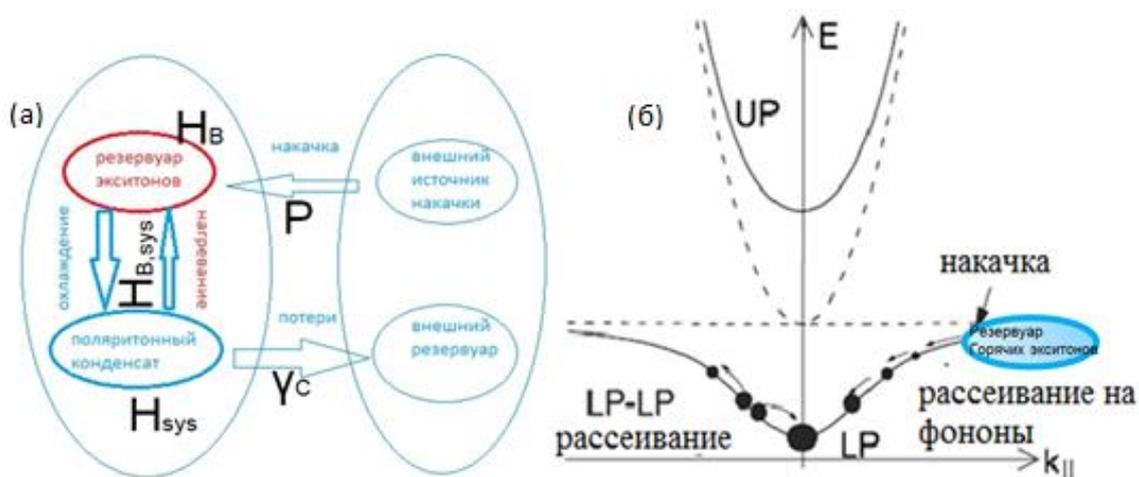


Рисунок 10 – (а) Поляритонный конденсат, подкачиваемый некогерентным резервуаром экситонов, который в свою очередь подпитывается внешней когерентной нерезонансной накачкой. (б) Нерезонансная накачка горячих экситонов на диаграмме поляритонной дисперсии [51].

Гамильтониан экситон-поляритонной системы предоставленной схематично на рис.10а имеет следующий вид [52]:

$$H = \int (H_{SYS} + H_B + H_{B,SYS}) dx \quad (31)$$

где H_{SYS} – гамильтониан Бозе-конденсата экситонных поляритонов; H_B – гамильтониан резервуара горячих экситонов и $H_{B,SYS}$ – гамильтониан взаимодействие редуцированной системы Бозе-конденсата экситонных поляритонов с резервуаром.

Так как верхняя поляритонная ветка быстро затухает, ею и взаимодействие с ней можно пренебречь (это справедливо в приближении среднего поля), поэтому мы будем рассматривать только нижнюю поляритонную ветку (LP ветку).

Гамильтониан нижней поляритонной ветки:

$$H_{sys} = \psi^+(x) \frac{-\hbar^2}{2m_{LP}} \nabla^2 \psi(x) + \hbar g_C \psi^+(x) \psi^+(x) \psi(x) \psi(x), \quad (32)$$

Гамильтониан экситонного резервуара:

$$H_B = \phi^+(x) \frac{-\hbar^2}{2m_X} \nabla^2 \phi(x) + \hbar g_R \phi^+(x) \phi^+(x) \phi(x) \phi(x), \quad (33)$$

Гамильтониан взаимодействие с конденсатом:

$$H_{B,LP} = H_{B,LP}^{loss} + H_{B,LP}^{gain} + H_{B,LP}^{mf}, \quad (34)$$

где $\phi(x)$ и $\psi(x)$ полевые операторы уничтожения поляритонов и экситонов соответственно.

LP-поляритоны рождаются из резервуара следующим образом:

$$H_{B,LP}^{gain} = \chi_{LP}^{gain} \phi^+(x) \phi(x) \phi(x) \psi^+(x), \quad (35)$$

L-поляритоны уходят из конденсата в резервуар так:

$$H_{B,LP}^{loss} = \chi_{LP}^{loss} \phi^+(x) \phi^+(x) \phi(x) \psi(x), \quad (36)$$

Синее смещение LP ветке:

$$H_{B,LP}^d = \chi_{LP}^d \phi^+(x) \phi(x) \psi^+(x) \psi(x), \quad (37)$$

Из (31)-(37) можно получить нелинейное дифференциальное уравнение на волновую функцию конденсата ψ_{LP} , в квазиклассическом пределе – уравнение типа Гросса-Питаевского (17) и уравнение на число горячих некогерентных экситонов n_R (18).

1.4. САМОЛОКАЛИЗАЦИЯ ПОЛЯРИТОННОГО КОНДЕНСАТА ПРИ НАГРЕВЕ РЕШЕТКИ КВАНТОВОЙ ЯМЫ

В экспериментальной работе продемонстрировано [53] образование светлого пятна (в реальном пространстве) в излучении поляритонного конденсата от микрорезонаторной структуры. Это возникает из-за локального нагрева кристаллической решетки при рассеивании горячих экситонов на фононы кристаллической решетки квантовой ямы.

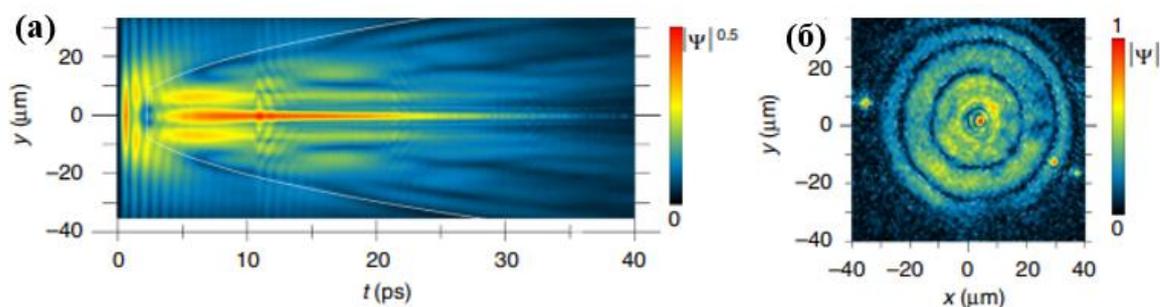


Рисунок 11 – (а) Динамика поляритонной амплитуды и (б) его двумерный пространственный профиль в момент времени 11 пс [53].

На рис. 11а показана динамика и двумерный профиль поляритонной амплитуды. На амплитудной диаграмме в динамике на рис.11а в центре виден яркий пик в виде горизонтальной линии. Это говорит об образовании стационарного конденсата с двумерным профилем, показанным на рис.11б. Вертикальные чередующиеся полосы представляют собой осцилляции Раби между экситонным и фотонным полями.

В главе 2 исследуется статистика в экситон-поляритонной системе с одним и двумя микростолбцами. В главе 3 предлагается использование эффекта стохастического резонанса в работе логических элементов. В главе 4 исследуется образование поляронно-подобного поляритонного солитона, образованного в эффективном потенциале нагретой решетки.

ГЛАВА 2. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННОЙ СИСТЕМЕ

В данной главе рассматриваются экситонные поляритоны, образованные путем возбуждения экситон-фотонных состояний (стационарных) в микростолбцовом микрорезонаторе. Целью главы, является изучение квантовой статистики излучения экситон-поляритонной системы в слабом режиме когерентной накачки $E_d \sim \gamma$ и в сильном режиме накачки $E_d > \gamma$. Результаты по главе опубликованы в статьях [54-57].

2.1. ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННАЯ МОДЕЛЬ С РЕЗОНАНСНОЙ КОГЕРЕНТНОЙ НАКАЧКОЙ

Гамильтониан экситон-поляритонной системы в приближении вращающейся волны имеет вид:

$$\hat{H}_C = \hbar\Delta_{ph}\hat{\phi}^+\hat{\phi} - \hbar\Delta_{ex}\hat{\chi}^+\hat{\chi} + \hbar\omega_R(\hat{\chi}^+\hat{\phi} + \hat{\phi}^+\hat{\chi}) + \hbar\alpha\hat{\chi}^{+2}\hat{\chi}^2 + \hbar E_d(\hat{\phi}^+ + \hat{\phi}). \quad (2.1)$$

Здесь были введены следующие обозначения частотных отстроек: $\Delta_{ph} = (\Delta - \Omega) = \omega_{ph} - \omega_d$ – отстройка частоты фотонной моды от частоты накачки; $\Delta_{ex} = (\Delta + \Omega) = \omega_d - \omega_{ex}$ – отстройка частоты экситонной моды от частоты накачки; $\Delta = \frac{\omega_{ph} - \omega_{ex}}{2}$ – половина экситон-фотонной отстройки; $\Omega = \omega_d - (\omega_{ph} + \omega_{ex})/2$ – отстройка частоты накачки от середины между частотами собственных состояний экситон-фотонной системы (лазерная отстройка).

Возбуждение поляритонных состояний в микростолбце осуществляется когерентным лазером, частота которого близка как к фотонному ω_{ph} , так и к экситонному ω_{ex} резонансам. В модельном Гамильтониане (2.1) двух связанных осцилляторов учтена нелинейность кубического типа на одном осцилляторе – экситонной моде и внешнее когерентное управление второго осциллятора – фотонной моды.

Основное кинетическое уравнение на матрицу плотности экситон-поляритонной системы в экситон-фотонном базисе имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_C, \rho] + \gamma_{\text{ph}} (2\hat{\phi}\rho\hat{\phi}^+ - \rho\hat{\phi}^+\hat{\phi} - \hat{\phi}^+\hat{\phi}\rho) + \gamma_{\text{ex}} (2\hat{\chi}\rho\hat{\chi}^+ - \rho\hat{\chi}^+\hat{\chi} - \hat{\chi}^+\hat{\chi}\rho), \quad (2.2)$$

где γ_{ph} и γ_{ex} диссипации на фотонную и экситонную моду соответственно.

Для расчетов используются следующие типичные значения параметров экситон-поляритонной системы [15,58,59]: $\hbar\alpha = 0.001$ мэВ, $\hbar\omega_R = 2.5$ мэВ, $\gamma_{\text{ex}} = 0.01$ пс и $\gamma_{\text{ph}} = 0.1$ пс⁻¹. Единица величины 1пс⁻² соответствует величине 240 Вт/см².

2.2. АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННОЙ СИСТЕМЫ В МИКРОРЕЗОНАТОРЕ, В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Полная производная среднего значения некоторого оператора вычисляется через матрицу плотности следующим образом:

$$\frac{d\langle \hat{O} \rangle}{dt} = \text{Tr} \left(\hat{O} \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right). \quad (2.3)$$

В квазиклассическом пределе мы можем провести следующую факторизацию квантовых средних, в частности, $\langle \hat{\chi}^+ \hat{\chi} \hat{\chi} \rangle \rightarrow |\chi_0|^2 \chi_0$, где $\chi_0 = \langle \hat{\chi} \rangle_{\text{кл}}$ и $\phi_0 = \langle \hat{\phi} \rangle_{\text{кл}}$ – квазиклассические средние экситонного и фотонного полей. Используя уравнения (2.2) и (2.3), получаем следующие управляющие уравнения для квазиклассических средних фотонного и экситонного полей соответственно [54],

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_0 = - (i(\Delta - \Omega) + \gamma_{\text{ph}}) \phi_0 + E_d - i\omega_R \chi_0, \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi_0 = - (-i(\Delta + \Omega) + \gamma_{\text{ex}}) \chi_0 - i\omega_R \phi_0 - 2i\alpha |\chi_0|^2 \chi_0, \quad (2.4b)$$

Известно, что система нелинейных дифференциальных уравнений (2.4) имеет несколько устойчивых статических решений при одном и том же значении управляющего параметра – амплитуды накачки E_d [60]. Это свойство уравнений (2.4) обуславливает наблюдаемый в эксперименте эффект бистабильности [18].

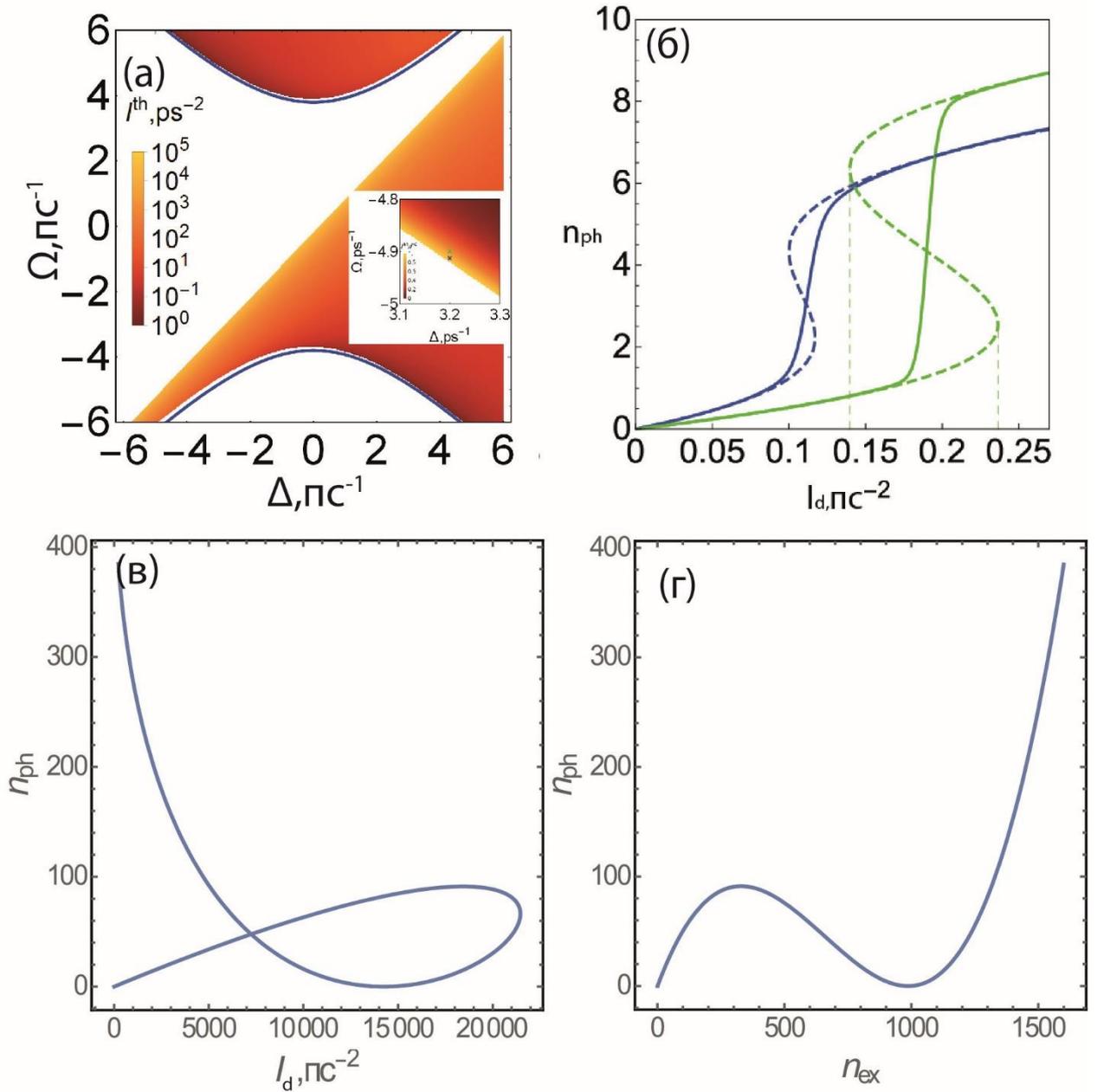


Рисунок 12. (а) Диаграмма существования бистабильности в зависимости от отстроек Δ и Ω . Закрашенная область соответствует таким параметрам системы, когда в системе может наблюдаться эффект бистабильности. Цветовой шкалой показан порог интенсивности накачки $I_{th} = |E_d|^2$, при которой будет проявляться бистабильность рассматриваемой системы. (б) Населенность фотонной моды, полученная в рамках приближения среднего поля (синяя/зеленая штриховая кривая) и с использованием квантового решения (синяя/зеленая сплошная кривая) для параметров: $\Delta = 3.2 \text{ ps}^{-1}$ и $\Omega = -4.91 \text{ ps}^{-1}$ и $\Omega = -4.89 \text{ ps}^{-1}$ (цветными точками значения этих параметров показаны на панели (а)). (в,г) Диаграмма стационарных значений числа фотонов в зависимости от накачки (в) и числа экситонов (г). Параметры: $\Omega = 0, \Delta = 3 \text{ ps}^{-1}$.

На рисунке 12 показана диаграмма существования эффекта бистабильности в зависимости от экситон-фотонной отстройки Δ и отстройки частоты накачки Ω . Цветовая шкала соответствует значению порога интенсивности накачки, выше которой проявляется эффект бистабильности. Эффект бистабильности фотонной моды для параметров системы, показанной звездочкой на рис.12а, изображен в виде параметрической S-петли штриховой кривой на рис.12б.

Анализ существования бистабильности показал, что есть две области значений параметров Δ и Ω , где эффект бистабильности проявляется, – см. рис.12(а). При этом обе эти области ограничены собственными частотами – нижней и верхней поляритонными ветками $\omega_{LP,UP} = \pm\sqrt{\omega_R^2 + \Delta^2}$ и смещены вверх на величину частоты, которая пропорциональна уровню потерь. Бистабильность в области нижней дисперсионной поляритонной ветке возникает в случае, если отстройка Ω не меньше величины синего смещения, а также при условии, что $\Delta > \sqrt{3}\gamma$ [61]. Также стоит отметить, что в центральной области, бистабильность отсутствует, а приближение к ней увеличивает порог проявления эффекта бистабильности.

Для стационарных состояний справедлива следующая связь между популяцией фотонов и экситонов в квазиклассическом пределе [55],

$$|\phi_0|^2 = \frac{E_d^2 + \Omega_R^2 |\chi_0|^2 + 2\Omega_R E_d \text{Im}\chi_0}{(\Delta_{ph}^2 + \gamma_{ph}^2)} \quad (2.5)$$

В нелинейной многокомпонентной системе в стационарном режиме, кроме эффекта бистабильности, может наблюдаться и обратный эффект. Когда при разных интенсивностях накачки, наблюдается при одном и том же значении числа фотонов. На рис.12в этот эффект показан в виде петли зависимости числа фотонов от накачки. Этот эффект объясняется нелинейной зависимостью фотонного поля от экситонного поля в стационарном режиме (и тем самым более сложной неоднозначной зависимостью фотонного поля от интенсивности накачки). Возможно полное истощение фотонной моды при

некотором значении интенсивности накачки см. рис.12в. При этом параметрическая кривая зависимости числа фотонов от числа экситонов, показывает обратный эффект бистабильности, когда одно и то же значение числа фотонов может быть достигнуто при разном числе экситонов см. рис.12г.

Приближение среднего поля предсказывает два динамических устойчивых стационарных состояния в области бистабильности (синяя кривая на рис.12б). В классической теории устойчивости верхнее и нижнее состояние петли бистабильности динамически устойчивы по Ляпунову [5,63]. Однако, это утверждение не справедливо при наличии существенных шумов [64]. Если шум (квантовый, тепловой или технический) является достаточно интенсивным, он заставляет систему переключаться из одного устойчивого состояния в другое и наоборот. Эти стохастические переключения продемонстрированы в работах [41-44].

Хотя неустойчивость бистабильных состояний к шумам может препятствовать созданию бистабильных устройств (для работы таких оптических устройств время работы устройства, т.е. время переключений должна быть меньше, времени жизни на одном из метастабильных состояний), тем не менее квантовые скачки между двумя метастабильными состояниями позволяют реализовывать полезные квантовые устройства – кодирование квантовой информации на двух метастабильных состояниях нелинейного осциллятора, обменивающегося парами фотонов со своим окружением, механизм, который, как показано в [65], обеспечивает стабильность, не вызывая декогеренции.

Вопрос о стохастических переключениях в системах с бистабильностью уже рассматривался в контексте диссипативного фазового перехода в одномодовых [41, 44, 66] и многомодовых системах [67], спиновых системах [68]. В данной работе исследуется влияние квантовых шумов на нелинейную бистабильную систему, в экситон-фотонном базисе.

Перейдем к изучению влияния квантовых шумов на нашу поляритонную модель систему. Вначале изучаются влияние квантовой природы экситон-поляритонной системы в приближении малых квантовых флуктуаций, методом линеаризации. Исследуется спектр квантовых шумов. Однако, в области фазовых переходов метод линеаризации не применим. Непосредственное же решение основного кинетического уравнения (2.2), достаточно сложная задача [67] как численно, так и аналитически. Поэтому, используется метод основанный на использовании квантового фазового пространства, см. литературный обзор. Одним из способов решения этой проблемы (перехода к s -числам) является диагонализация матрицы плотности по когерентным состояниям с помощью P -функции – так называемое P -представление или представление Глаубера. Решение квантовой задачи осуществляется методом обобщенного P -представления и приведено в приложении П1. В области слабой накачки $E_d \sim \gamma$, можно воспользоваться методом линеаризации см. следующий раздел или использовать численные методы.

2.3. СПЕКТР КВАНТОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

При малых величинах накачки (см. Рис.12б), мы можем считать квантовые флуктуации малыми и провести линеаризацию по квантовому шуму. Рассмотрим малые флуктуации около стационарных квазиклассических состояний экситонных и фотонных мод. В этом разделе мы найдем выражения для спектров квантовых флуктуаций и их корреляционных функций.

Представим квантовые переменные фотонных и экситонных полей, как сумму квазиклассической переменной и квантовой флуктуацией на нее [38,69],

$$\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha, \beta = \beta_0 + \delta\beta, \quad (2.6)$$

при этом средние значения по квантовым флуктуациям равна нулю $\langle \delta\alpha \rangle = 0, \langle \delta\beta \rangle = 0$.

Подчеркнем, что данные флуктуации имеют квантовую природу и не являются бесконечно малыми. При линеаризации по квантовым флуктуациям в уравнениях пренебрегают высшими по степени слагаемыми $\delta\chi^2$ и $\delta\chi^{+2}$, а также слагаемые, не содержащие эти флуктуации, автоматически переносятся в уравнения на квазиклассические уравнения, т.е. уравнения разделяются на квантовые и квазиклассические.

Спектральную плотность можно получить путем линеаризации стохастических уравнений. Рассмотрим малые флуктуации около стационарного состояния и найдем выражения для их спектра и корреляционной функции для малых флуктуаций [69]:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\delta\vec{x}] = -A[\delta\vec{x}] + D^{1/2}[\vec{\eta}(t)], \quad (2.7)$$

где матрица диффузии \mathbf{D} и матрица сноса \mathbf{A} определены в стационарной точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. А переменная $\delta\vec{x}$ этого уравнения задается через транспонирование вектора переменных экситонных и фотонных полей, $\delta\vec{x} = (\delta\alpha, \delta\alpha^+, \delta\beta, \delta\beta^+)^T$. Здесь $\vec{\eta}(t) = (\xi_1, \xi_1^+, \xi_2, \xi_2^+)^T$ – вектор Гауссовых случайных функций.

Матрица сноса в (2.7) имеет следующий вид [54],

$$A = \begin{pmatrix} (i\Delta_{ph} + \gamma_{ph}) & 0 & i\omega_R & 0 \\ 0 & (-i\Delta_{ph} + \gamma_{ph}) & 0 & -i\omega_R \\ i\omega_R & 0 & (-i\Delta_{ex} + \gamma_{ex}) + 4i\alpha|\chi_0|^2 & 2i\alpha\chi_0^2 \\ 0 & -i\omega_R & -2i\alpha\chi_0^{+2} & (i\Delta_{ex} + \gamma_{ex}) - 4i\alpha|\chi_0|^2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

и матрица диффузии [54],

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i\alpha\chi_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i\alpha\chi_0^{+2} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

здесь χ_0 – стационарное решение детерминированной системы без флуктуаций.

Согласно определению стационарных случайных процессов, справедливо следующее [69],

$$\langle \delta x^+(t + \tau) \delta x(t) \rangle \equiv \langle \delta x^+(\tau) \delta x(0) \rangle. \quad (2.10)$$

При нулевой задержки,

$$\langle x_i^+ x_j \rangle = \langle x_i^+ \rangle \langle x_j \rangle + \langle \delta x_i^+ \delta x_j \rangle. \quad (2.11)$$

Второе слагаемое в (2.11) является коррелятором квантовых флуктуаций. Запишем матрицу корреляции [38],

$$\mathbf{C} = \langle \delta \vec{x}^T(t) \delta \vec{x}(t') \rangle = \begin{pmatrix} \langle \delta \phi^2 \rangle & \langle \delta \phi^+ \delta \phi \rangle & \langle \delta \chi \delta \phi \rangle & \langle \delta \chi^+ \delta \phi \rangle \\ \langle \delta \phi \delta \phi^+ \rangle & \langle \delta \phi^{+2} \rangle & \langle \delta \chi \delta \phi^+ \rangle & \langle \delta \chi^+ \delta \phi^+ \rangle \\ \langle \delta \phi \delta \chi \rangle & \langle \delta \phi^+ \delta \chi \rangle & \langle \delta \chi^2 \rangle & \langle \delta \chi^+ \delta \chi \rangle \\ \langle \delta \phi \delta \chi^+ \rangle & \langle \delta \phi^+ \delta \chi^+ \rangle & \langle \delta \chi \delta \chi^+ \rangle & \langle \delta \chi^{+2} \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Выражение для спектра состоит из двух компонент – это когерентной части $S_{coh}(\omega) = n\delta(\omega)$ - обусловленный стационарным режимом, на частоте накачки. Здесь частота отсчитывается от частоты накачки. И некогерентной частью, $S_{incoh}(\omega) \equiv S(\omega)$ – которую будем называть спектром квантовых флуктуаций [70],

$$\tilde{S}(\omega) = S_{coh}(\omega) + S_{incoh}(\omega). \quad (2.13)$$

Например, спектр числа фотонов определяется так,

$$\tilde{S}_{ph}(\omega) = n_{ph}\delta(\omega) + \langle \delta \alpha^+ \delta \alpha \rangle_{\omega}. \quad (2.14)$$

Аналогично задается и спектр экситонов $\tilde{S}_{ex}(\omega) = n_{ex}\delta(\omega) + \langle \delta \beta^+ \delta \beta \rangle_{\omega}$.

Спектр флуктуаций есть Фурье-образ корреляционной функции [70],

$$S_{ij}(\omega) \equiv \langle \delta x_i \delta x_j \rangle_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) \langle \alpha_i(t) \alpha_j(t + \tau) \rangle d\tau, \quad (2.15)$$

где $\delta x_i \in \{\delta \alpha, \delta \alpha^+, \delta \beta, \delta \beta^+\}$.

Сжатие фотонной моды через спектр флуктуаций определяется следующим образом [70]:

$$:S_{ph}^+(\omega): = \langle :X^+(\omega), X^+ : \rangle = (S_{12} + S_{21} + e^{-2i\theta} S_{11} + e^{2i\theta} S_{22}) \quad (2.16)$$

Спектр корреляций между экситонами и фотонами можно разложить на две компоненты: на фазу между модами, так и на амплитуду корреляций определяемую следующим образом:

$$S_{13}(\omega) = \langle :\hat{a}(\omega), \hat{b}: \rangle = \langle \delta\alpha(\omega)\delta\beta \rangle = e^{i\phi} |S_{13}| \quad (2.17)$$

Спектр корреляций амплитуд и разности фаз изображены на Рис.22б, зеленой и красной линиями соответственно. Как можно заметить, спектр амплитуд ассиметричен относительно частоты накачки, и имеет четыре выраженных пика, что характерно для эффекта четырехволнового смешивания [43]. Также можно заметить, что фазовый спектр имеет разрыв для положительных частот, в то время как, для отрицательных он имеет плавный переход от фазы $\pi/2$ к фазе близкой к $-\pi/2$. Для положительных частот имеет место резкий переход $-\pi/2$ к $\pi/2$.

Нормально упорядоченные корреляции, можно выразить через корреляции квантовых флуктуаций,

$$\langle :\hat{a}, \hat{b}: \rangle = \langle \delta\alpha(t)\delta\beta(t) \rangle \quad (2.18)$$

Матричные элементы матрицы корреляций можно посчитать обратным преобразованием Фурье спектра флуктуаций,

$$\langle \delta x_i \delta x_j \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\tau) \langle \delta x_i \delta x_j \rangle_{\omega} d\omega \quad (2.19)$$

Введем квадратуры на фотонные и экситонные операторы,

$$\hat{X}_{ex}^+ = (\hat{\chi} + \hat{\chi}^+), \hat{X}_{ph}^+ = (\hat{\phi} + \hat{\phi}^+), \quad (2.20)$$

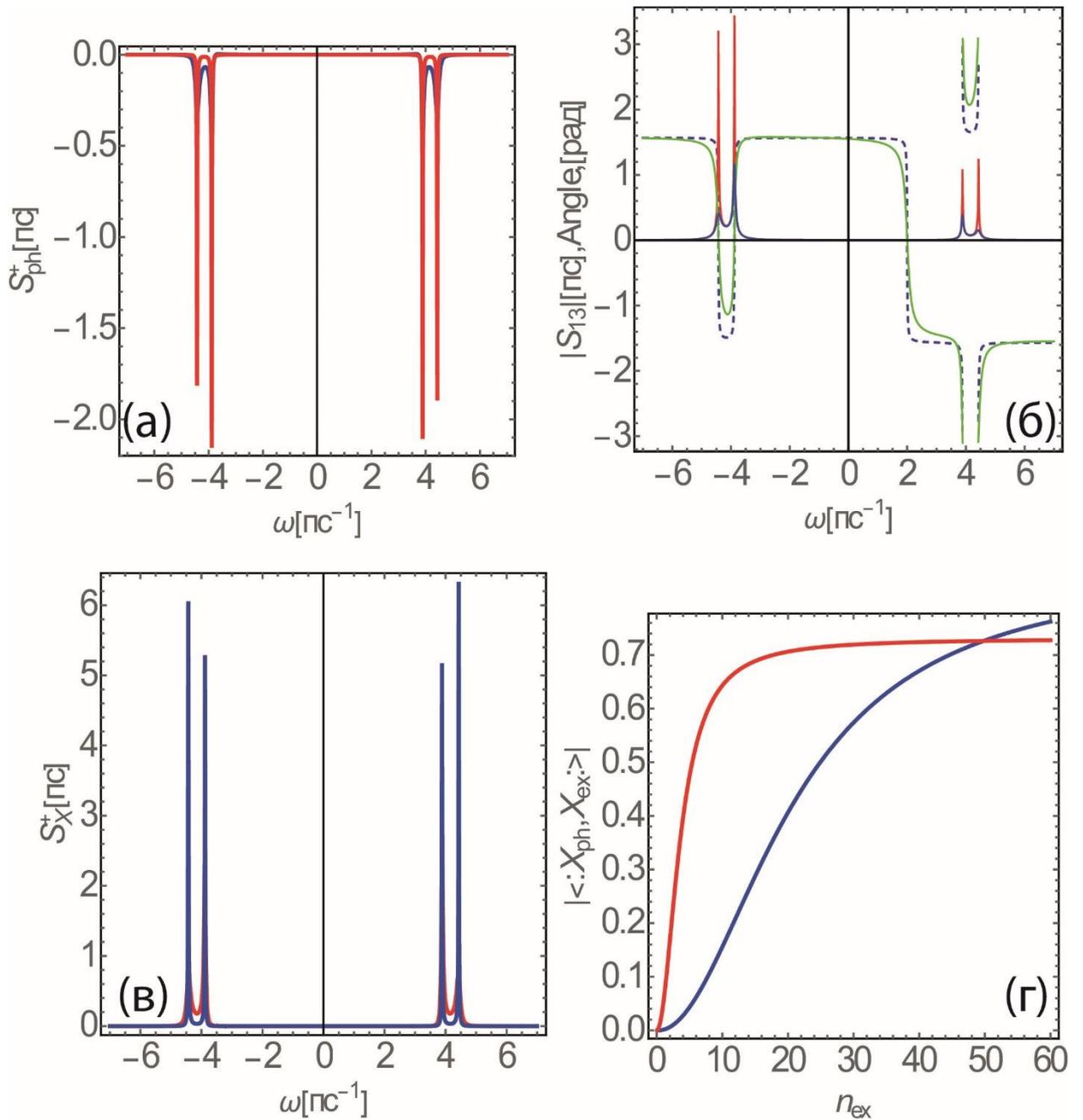


Рисунок 13 – (а) Спектр корреляций между фотонами и экситонами; (б) Фазовый сдвиг между спектральными компонентами фотонных и экситонных мод. Зеленым показан фазовый сдвиг между флуктуациями мод, а синим абсолютное значение; пунктиром показан фазовый сдвиг между флуктуациями мод; (в) частотная корреляционная функция между квадратурами экситонов и фотонов; (г) одновременная корреляционная функция между квадратурами экситонов и фотонов. Параметры системы: $\Delta = 2\text{пс}^{-1}$, фаза $\theta = 0$, красным $\gamma_{ph} = 0.01\text{пс}^{-1}$, синим $\gamma_{ph} = 0.1\text{пс}^{-1}$.

Корреляция между квадратурами экситонов и фотонов,

$$:S_X^+(\omega): = \langle :X_{ph}^+(\omega), X_{ex}^+ : \rangle = S_{13} + S_{24} + S_{23} + S_{14} \quad (2.21)$$

На рис.13в и рис.13г продемонстрированы спектры квадратур (2.21) и модуль автокорреляции квадратур в зависимости от стационарного состояния. В спектре квадратур можно заметить четыре выраженных симметричных (или почти симметричных) пика (в то время как спектр шума не соблюдает симметрию). Автокорреляция экситон-фотонных квадратур демонстрирует, возрастание корреляции квадратур фотонной и экситонной моды по закону гиперболического тангенса, причем если диссипации систем одинаковы, то такой рост более плавен чем в случае, когда диссипации отличаются друг от друга на порядок.

В работе [68] было показано, что матрица спектра стохастического процесса (1.29) $S(\omega)$ задается следующим выражением,

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} (i\omega I + A)^{-1} D (-i\omega I + A^T)^{-1}. \quad (2.22)$$

Формула (2.22) позволяет определить спектральные элементы $S_{ij}(\omega)$ в стационарном состоянии. В частности, спектр шума фотонной моды [54]:

$$S_{12}(\omega) = \frac{4\omega_R^2 \alpha^2 |\chi_0|^4}{\pi} \frac{\gamma_{ph}\omega_R^2 + \gamma_{ex}(\gamma_{ph}^2 + (\omega - \Delta_{ex})^2)}{(\omega^4 - c_2\omega^2 + c_4)^2 + (c_3 - c_1\omega^2)^2 \omega^2}, \quad (2.23a)$$

а спектр флуктуаций экситонной компоненты задается следующим выражением [54],

$$S_{34}(\omega) = \frac{4\alpha^2 |\chi_0|^4}{\pi} \frac{\gamma_{ex}((\Delta_{ex}^2 + \gamma_{ph}^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma_{ph}^2 \omega^2) + \gamma_{ph}\omega_R^2((\omega + \Delta_{ex})^2 + \gamma_{ph}^2)}{(\omega^4 - c_2\omega^2 + c_4)^2 + (c_3 - c_1\omega^2)^2 \omega^2}, \quad (2.24)$$

Коэффициенты c для резонансной накачки $\Omega=0$ [54]:

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2(\gamma_{ex} + \gamma_{ph}), \\
c_2 &= \gamma_{ph}^2 + \Delta_{ph}^2 + \gamma_{ex}^2 + (\Delta_{ex} - 4\alpha|\chi|^2)^2 + 4\gamma_{ex}\gamma_{ph} + 2\omega_R^2 - 4\alpha^2|\chi|^4, \\
c_3 &= 2\gamma_{ph}(\gamma_{ex}^2 + (\Delta_{ex} - 4\alpha|\chi|^2)^2) + 2\gamma_{ex}(\gamma_{ph}^2 + \Delta_{ph}^2) + 2(\gamma_{ex} + \gamma_{ph})\omega_R^2 - 8\gamma_{ph}\alpha^2|\chi|^4, \\
c_4 &= (\gamma_{ex}^2 + (\Delta_{ex} - 4\alpha|\chi|^2)^2)(\gamma_{ph}^2 + \Delta_{ph}^2) + 2\omega_R^2(\gamma_{ex}\gamma_{ph} + (\Delta_{ex} - 4\alpha|\chi|^2)\Delta_{ph}) - \\
&- 4\alpha^2|\chi|^4(\gamma_{ph}^2 + \Delta_{ph}^2) + \omega_R^4.
\end{aligned}
\tag{2.25}$$

На рис.14 изображены спектры шума фотонной и экситонной компонент. Первые два резонанса представляют собой расщепление спектральной линии Лоренцевского типа. Третий и четвертый резонансы имеют ассиметричный профиль, на этой частоте проявляются элементарные возбуждения экситонной моды. При этом стоит отметить, что спектр шума фотонной компоненты имеет симметричный профиль (мода с оптической накачкой), а экситонная мода при этом имеет ассиметричный вид. На собственной частоте экситонной моды $\omega + \omega_p = \Delta \Rightarrow \omega = \omega_{ex}$. Первый резонанс спектра квантового шума сильно стремится к нулю (см. Рис.14в), это является проявлением деструктивной квантовой интерференции. Из-за диссипаций знаменатель в (2.24) не полностью обращается в ноль в этой области.

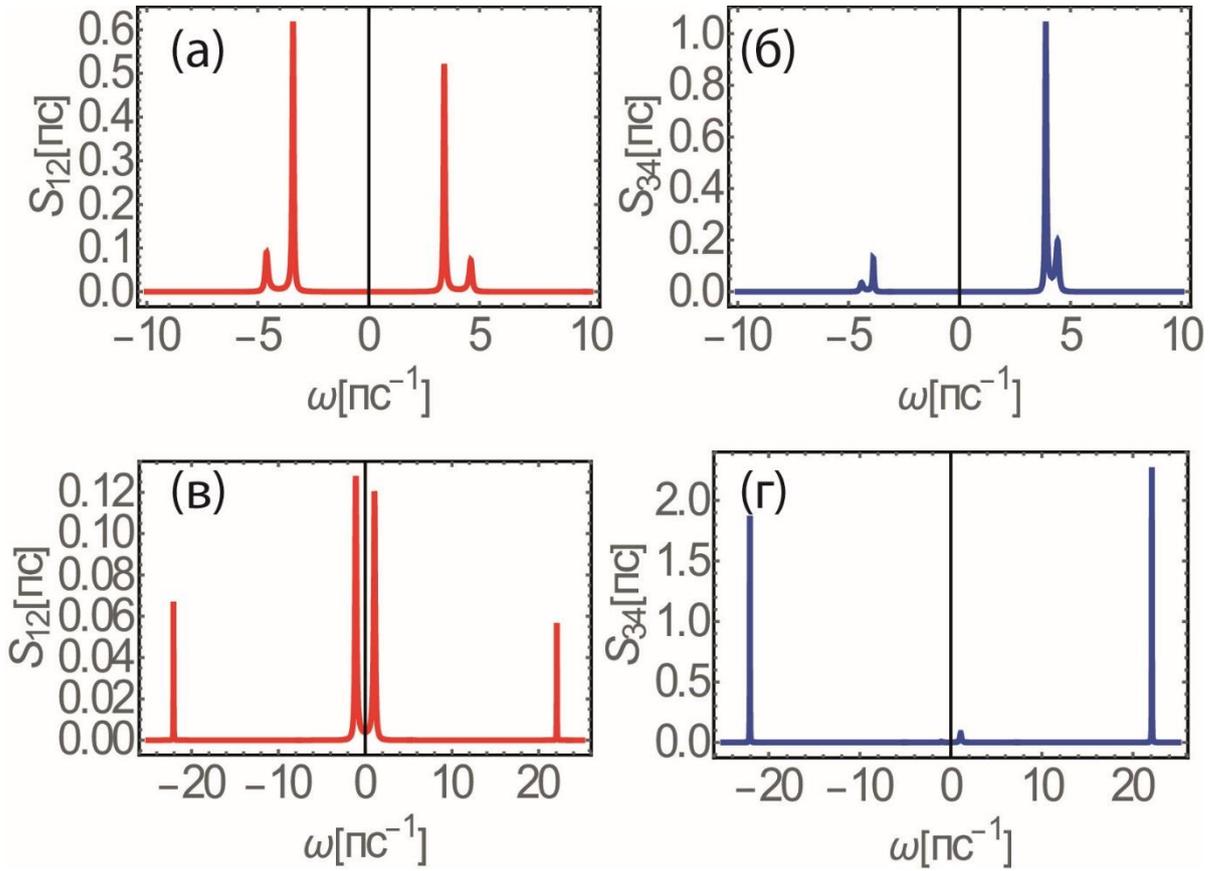


Рисунок 14 – Спектры флуктуаций около стационарного состояния. Верхние два графика показывают спектр малых флуктуаций, рассчитанный для состояния на нижней стабильной ветви ($n_{ex} = 100$), а нижние графики – для значения с верхней стабильной ветки ($n_{ex} = 4000$). Величина отстройки $\Delta = 1,5\text{пс}^{-1}$ [54].

2.4. КВАНТОВЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Для решения открытой квантовой нелинейной задачи был использован аналитический метод обобщенного P -представления [40]. В отличие от численных подходов этот метод позволяет исследовать квантовые свойства во всей области квантового фазового пространства. В рассматриваемом подходе к решению основного кинетического уравнения (2.4), можно связать матрицу плотности с P -функцией, следующим интегральным выражением см.(29),

$$\hat{\rho} = \int d\mu(\phi, \chi, \phi^+, \chi^+) P(\phi, \chi, \phi^+, \chi^+) \hat{\Lambda}(\phi, \chi, \phi^+, \chi^+), \quad (2.26)$$

с помощью проецирования на квантовое фазовое пространство экситон-поляритонной системы, используя проектор $\hat{\Lambda}(\{\chi\}) = \frac{|\phi\rangle|\chi\rangle\langle\chi^+|\langle\phi^+|}{\langle\chi^+|\langle\phi^+||\phi\rangle|\chi\rangle}$ –

недиагональный проекционный оператор, $d\mu(\{x\})$ – мера интегрирования, где $\{x\} = \{\phi, \phi^+, \chi, \chi^+\}$ – с-числа определяющие квантовое фазовое пространство и соответствующие операторам $\{\hat{\phi}, \hat{\phi}^+, \hat{\chi}, \hat{\chi}^+\}$.

Перейдем от операторного уравнения на матрицу плотности (2.26) к уравнению Фоккера-Планка на P -функцию в с-числах (подробности вывода изложены в приложении П1):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial \phi} \left(-(i\Delta_{ph} + \gamma_{ph})\phi + E_d - i\omega_R\chi \right) - \frac{\partial}{\partial \chi} \left(-(-i\Delta_{ex} + \gamma_{ex})\chi - i\omega_R\phi - 2i\alpha\chi^+\chi^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} (-i\alpha\chi^2) + \text{э. с.} \right] P. \quad (2.27)$$

Уравнение (2.27) можно решить аналитически в стационарном режиме с помощью метода потенциалов [27,38], в адиабатическом пределе, когда скорость затухание исключаемой моды больше скорости затухания другой моды [71,72]. Экситонные и фотонные моды обладают различными скоростями релаксаций, поэтому одну из этих мод можно устранить (возможность такого приближения и его следствия обсуждаются в следующем разделе), однако принцип адиабатического исключения справедлив только для линейной моды, поэтому в адиабатическом пределе исключается фотонная мода. Хотя значения γ_{ph} и γ_{ex} варьируются в широком диапазоне значений, условие $\gamma_{ph} \gg \gamma_{ex}$ выполняется в типичных микрорезонаторах [15].

В адиабатическом пределе УФП принимает следующий вид (аналогичное уравнение для одномодового резонатора, в режиме генерации второй гармоники, было получено Драммондом [38]):

$$\frac{\partial P(\chi, \chi^+)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial \chi} \left(-(-i\Delta_{ex} + \gamma_{ex})\chi - \frac{i\omega_R E_d + \omega_R^2 \chi}{(i\Delta_{ph} + \gamma_{ph})} - 2\alpha\chi^2\chi^+ \right) + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} (-i\alpha\chi^2) + \text{э. с.} \right] P(\chi, \chi^+). \quad (2.28)$$

Решение уравнения (2.28) в стационарном режиме $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$, имеет следующий вид, см. приложение П2:

$$P_{ss}(\chi, \chi^+) = \chi^{-2 - i\frac{\gamma}{\alpha}\chi^+ - 2 + i\frac{\gamma^*}{\alpha}} \exp \left(-\sigma E_d \frac{1}{\chi} - \sigma^* E_d^* \frac{1}{\chi^+} + 2\chi\chi^+ \right), \quad (2.29)$$

где $\gamma = \gamma_{ex} + \frac{\omega_R^2 \gamma_{ph}}{\gamma_{ph}^2 + \Delta_{ph}^2} - i \left(\Delta_{ex} + \frac{\Delta_{ph} \omega_R^2}{\gamma_{ph}^2 + \Delta_{ph}^2} \right)$ и $\sigma = \omega_R \frac{\gamma_{ph} - i \Delta_{ph}}{\alpha(\gamma_{ph}^2 + \Delta_{ph}^2)}$.

2.5. ВЫВОД КВАНТОВЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ ДЛЯ ЭКСИТОННОЙ МОДЫ

P -функция (2.29) позволяет найти любую нормально упорядоченную корреляционную функцию от операторов рождения и уничтожения. Используя P -функцию, найдем корреляционные функции для экситонов, используя [54,55]:

$$G^{(mn)} = \langle (\chi^+)^m \chi^n \rangle = \int \chi^{+m} \chi^n P d\chi d\chi^+ / \int P d\chi d\chi^+, \quad (2.30)$$

вычислим корреляционные функции

$$M_{ij} = \int \chi^{+i} \chi^j P(\chi, \chi^+) d\chi d\chi^+. \quad (2.31)$$

Проделав те же процедуры что и в приложение П2, получаем

$$M_{ij} = -4\pi^2 E_d^{2\text{Re}\psi+j+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n I_d^{(n-1)} \sigma^{\psi+j+(n-1)} (\sigma^*)^{\psi^*+i+(n-1)}}{n! \Gamma(\psi+j+n) \Gamma(\psi^*+i+n)}. \quad (2.32)$$

Эту сумму можно выразить через гипергеометрический ряд

$${}_0F_2(\psi+j, \psi^*+i, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(\psi+j) \Gamma(\psi^*+i)}{\Gamma(\psi+j+n) \Gamma(\psi^*+i+n)}. \quad (2.33)$$

Получаем необходимое выражение

$$M_{ij} = -4\pi^2 \frac{E_d^{2\text{Re}(\psi)-2+i+j} \sigma^{\psi+j} (\sigma^*)^{\psi^*+i}}{|\sigma|^2 \Gamma(\psi+j) \Gamma(\psi^*+i)} {}_0F_2(\psi+j, \psi^*+i, 2I_d |\sigma|^2). \quad (2.34)$$

Из (2.34) и нормировку (П2.22) получаем выражение для любой корреляционной функции, в стационарном состоянии

$$\begin{aligned}
G^{ij} &= \langle \hat{\chi}^{+i} \hat{\chi}^j \rangle = \langle \chi^{+i} \chi^j \rangle_P = \int \chi^{+i} \chi^j P(\chi, \chi^+) d\chi d\chi^+ = \\
&= \frac{E_d^{i+j} \sigma^j (\sigma^*)^i {}_0F_2(\psi + j, \psi^* + i, 2I_d |\sigma|^2)}{(\psi)_j (\psi^*)_i {}_0F_2(\psi, \psi^*, 2I_d |\sigma|^2)}. \quad (2.35)
\end{aligned}$$

где $(\psi)_j = \prod_{k=1}^j (\psi + k - 1)$ – символ Похгаммера.

2.6. ВЫВОД КВАНТОВЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ ДЛЯ ФОТОННОЙ МОДЫ

Используя (2.35), можно получить выражения для первого,

$$\langle \hat{\chi}^+ \hat{\chi} \rangle = \frac{|\mu\gamma|^2 |E_p|^2 {}_0F_2\left(1 + \frac{i\gamma^*}{\alpha}, 1 - \frac{i\gamma}{\alpha}, 2\mu^2 |E_d|^2\right)}{\alpha^2 {}_0F_2\left(\frac{i\gamma^*}{\alpha}, -\frac{i\gamma}{\alpha}, 2\mu^2 |E_d|^2\right)}. \quad (2.36)$$

и второго порядка корреляционной функции для экситонов,

$$g_{ex}^{(2)}(0) = \frac{|\gamma|^2 {}_0F_2\left(\frac{i\gamma^*}{\alpha}, -\frac{i\gamma}{\alpha}, 2|\mu|^2 |E_d|^2\right) {}_0F_2\left(\frac{i\gamma^*}{\alpha} + 2, -\frac{i\gamma}{\alpha} + 2, 2|\mu|^2 |E_d|^2\right)}{|\alpha + i\gamma^*|^2 \left({}_0F_2\left(\frac{i\gamma^*}{\alpha} + 1, -\frac{i\gamma}{\alpha} + 1, 2|\mu|^2 |E_d|^2\right) \right)^2}, \quad (2.37)$$

В адиабатическом пределе квантовые флуктуации фотонов подчинены квантовым флуктуациям экситонов [55]. Таким образом, можно получить связь между s -числами фотонов и экситонов следующим образом:

$$\phi = \frac{E_d(\gamma_{ph} - i(\Delta - \Omega))}{((\Delta - \Omega)^2 + \gamma_{ph}^2)} - \frac{\omega_R(i\gamma_{ph} + (\Delta - \Omega))}{((\Delta - \Omega)^2 + \gamma_{ph}^2)} \chi \quad (2.38)$$

Таким образом, корреляционной функции фотонов первого порядка, определяется так:

$$\langle \phi^+ \phi \rangle = \frac{I_d + \omega_R^2 G^{(11)} + 2\sqrt{I_d} \omega_R \text{Im}(G^{(01)})}{(\Delta_{ph}^2 + \gamma_{ph}^2)}. \quad (2.39)$$

Аналогично, используя (П2.14) получаем выражение для фотонов корреляционной функции фотонов второго порядка:

$$g_{\text{ph}}^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{\phi}^+ \hat{\phi}^+ \hat{\phi} \hat{\phi} \rangle}{\langle \hat{\phi}^+ \hat{\phi} \rangle^2} = \frac{I_d^2 - I_d \omega_R^2 (G^{(02)} + G^{(20)} - 4G^{(11)}) - 4\omega_R I_d^{3/2} \text{Im}(G^{(01)}) + 4\omega_R^3 \sqrt{I_d} \text{Im}(G^{(21)}) + \omega_R^4 G^{(22)}}{(I_d + 2\omega_R \sqrt{I_d} \text{Im}[G^{(01)}] + \omega_R^2 G^{(11)})^2}. \quad (2.40)$$

2.7. КВАНТОВАЯ ФАЗА ЭКСИТОННЫХ ПОЛЯРИТОНОВ

Найдем стационарные значения фаз фотонной и экситонной компонент. Введем фазу стандартным способом $\phi = |\phi|e^{i\varphi_{ph}}$, $\chi = |\chi|e^{i\varphi_{ex}}$.

Фаза экситонной компоненты, определяется так,

$$e^{i\varphi_{ex}} = -\frac{i\omega_R F_p}{|\chi|[(2i\alpha|\chi|^2 - i\Delta + \gamma_{ex})(i\Delta_{ph} + \gamma_{ph}) + \omega_R^2]}, \quad (2.41a)$$

Фаза фотонного поля при этом зависит от фазы экситонного поля:

$$\varphi_{ph} = \arg \left[\frac{iF_p - i\omega_R |\chi| e^{i\varphi_{ex}}}{(i\Delta_{ph} + \gamma_{ph})} \right]. \quad (2.41b)$$

Где \arg - обозначение взятия фазы.

Рассмотрим квадрата модуля амплитуды фотонного поля,

$$|\phi|^2 = \frac{1}{(\Delta_{ph}^2 + \gamma_{ph}^2)} [F_p \gamma_{ph} - \omega_R \Delta_{ph} \sqrt{n_{ex}} \cos \varphi_{ex} + \omega_R \gamma_{ph} \sqrt{n_{ex}} \sin \varphi_{ex}]^2 + \frac{1}{(\Delta_{ph}^2 + \gamma_{ph}^2)} [E_p \Delta_{ph} + \omega_R \gamma_{ph} \sqrt{n_{ex}} \cos \varphi_{ex} + \omega_R \Delta_{ph} \sqrt{n_{ex}} \sin \varphi_{ex}]^2. \quad (2.42)$$

Это соотношение между числом фотонов и квадратурами экситонов как видно зависит от фазы экситонов

$$\varphi_{ex} = \arg \left[-\frac{i\omega_R \sqrt{I_p/n_{ex}}}{[(-i\Delta_{ex} + \gamma_{ex} + 2i\alpha n_{ex})(i\Delta_{ph} + \gamma_{ph}) + \omega_R^2]} \right]. \quad (2.43)$$

В случае, когда $\Omega = -\Delta$, экситонная отстройка Δ_{ex} равна нулю и выражение для фазы экситонов можно аппроксимировать следующим выражением для не сильного экситонного поля ($\alpha n_{ex} < 1$)

$$\varphi_{ex} \approx \arg \left[-i \sqrt{\frac{I_p}{n_{ex} \omega_R^2}} \right]. \quad (2.44)$$

В квантовом случае, фаза экситонов рассчитывается с помощью корреляционных функций (2.35) следующим образом,

$$\varphi_{ex} = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{G^{(01)}}{G^{(10)}} \right). \quad (2.45)$$

А фаза фотонов, рассчитывается с помощью выражения,

$$\begin{aligned} \varphi_{ph} = & \frac{1}{2i} \ln(E_p(\gamma_{ph} - i\Delta_{ph}) - \omega_R(i\gamma_{ph} + \Delta_{ph})G^{01}) - \\ & - \frac{1}{2i} \ln(E_p(\gamma_{ph} + i\Delta_{ph}) - \omega_R(-i\gamma_{ph} + \Delta_{ph})G^{10}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

На рис.15а и рис.15б, изображены фаза экситонов в квазиклассическом пределе и с учетом квантовых поправок в зависимости от отстроек при амплитуде накачки $E_d = 25 \text{ пс}^{-1}$. Из них видно, что около области где $\Omega = -\Delta$, фаза экситонов приблизительно $\varphi_{ex} \approx -\pi/2$. На рис.15в, проведено сравнение квадратура фазы фотонов, в квазиклассическом пределе и квантовомеханическом пределе. Отметим, что при малых интенсивностях накачки фаза экситонов и фаза фотонов находиться в противофазе.

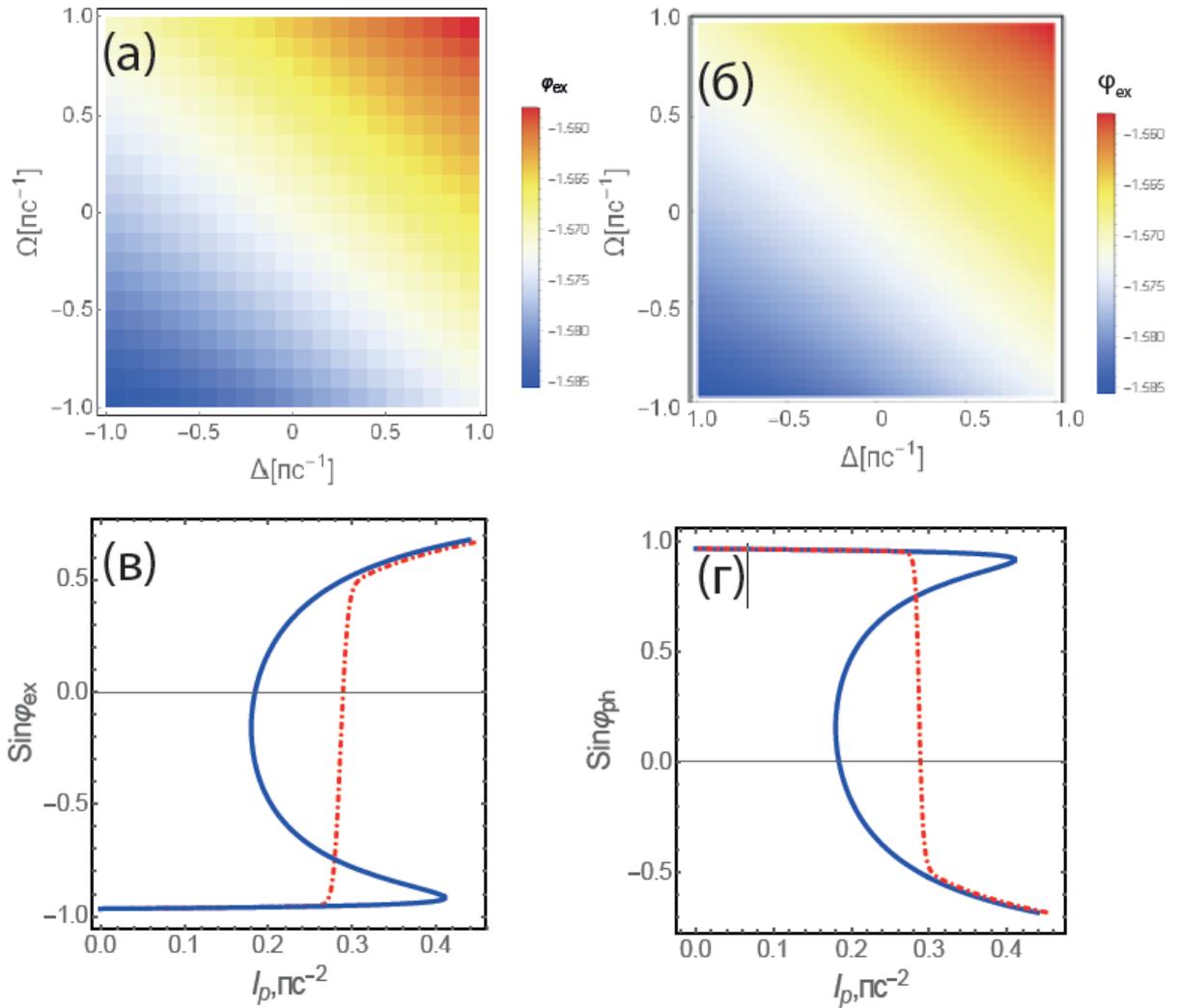


Рисунок 15 – а) квазиклассическая фаза экситонов; б) квантовая фаза экситонов; в) синус квантовой фазы фотонов; г) синус квантовой фазы экситонов; для отстройек $\Delta = 3.104 \text{ пс}^{-1}$ и $\Omega = -4.81 \text{ пс}^{-1}$.

2.8. ВЛИЯНИЕ КВАНТОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ НА ЭФФЕКТ БИСТАБИЛЬНОСТИ

Возьмем данную экситон-поляритонную систему, находящуюся в стационарном состоянии при тех параметрах Δ_{ph} и Δ_{ex} где существует эффект бистабильности см. рис. 12а. Сканируя интенсивность накачки I_d , мы можем оказаться на S -петле бистабильности стационарных решений (где наблюдаются несколько устойчивых по Ляпунову решений). Анализ квантовых решений (2.12) и (2.16) показал, что средние величины всегда однозначны [12] и квантовая кривая делит классическую кривую на две части см. рис.12б и рис.13б. Для исследования же квантовой статистики излучения

микрорезонатора была использована корреляционная функция второго порядка $g_{\text{ph}}^{(2)}(0)$.

На рис. 16б изображены квантовые решения для разных значений отстроек Δ_{ph} и Δ_{ex} (изображены цветными точками на рис. 16а). Результаты численного моделирования квантовых стохастических дифференциальных уравнений (3.1) в с-числах, продемонстрированы на рис. 16в и рис. 16г (используя численный метод Эйлера для решения стохастических дифференциальных уравнений [72,73]). Начальные условия были выбраны из диаграммы стационарных решений, изображенных на рис. 16б. Численное моделирование показало, что в бистабильной классической области стационарных решений в присутствии квантового шума происходят квантовые прыжки между стационарными состояниями см. Рис. 13в. И одиночный переход на верхнюю ветку петли бистабильности в области роста квантового решения, рис. 16г, для точек, взятых из метастабильной области решений.

Корреляционная функция второго порядка фотонов (экситонов) разделяет диаграмму бистабильных стационарных решений на две части рис. 16б. Полученная в квантовом пределе кривая корреляционной функции первого порядка (соответствующая числу частиц) фотонного поля служит границей стабильных и метастабильных (с конечным временем жизни на данном состоянии) решений см. рис. 13б. В области, где полуклассическая кривая разделяется на две части, наблюдается пик корреляционной функции второго порядка $g_{\text{ph}}^{(2)}(0)$, с явно выраженным эффектом их группировки $g_{\text{ph}}^{(2)}(0) > 1$. Эта функция показана на рис. 16д и из рис. 16б видно, что в области, где происходит фазовый переход, наблюдается пик $g_{\text{ph}}^{(2)}$ с явно выраженным эффектом группировки. Видно, что увеличение величины пика $g_{\text{ph}}^{(2)}$, сопровождающееся уменьшением его ширины при увеличении интенсивности накачки.

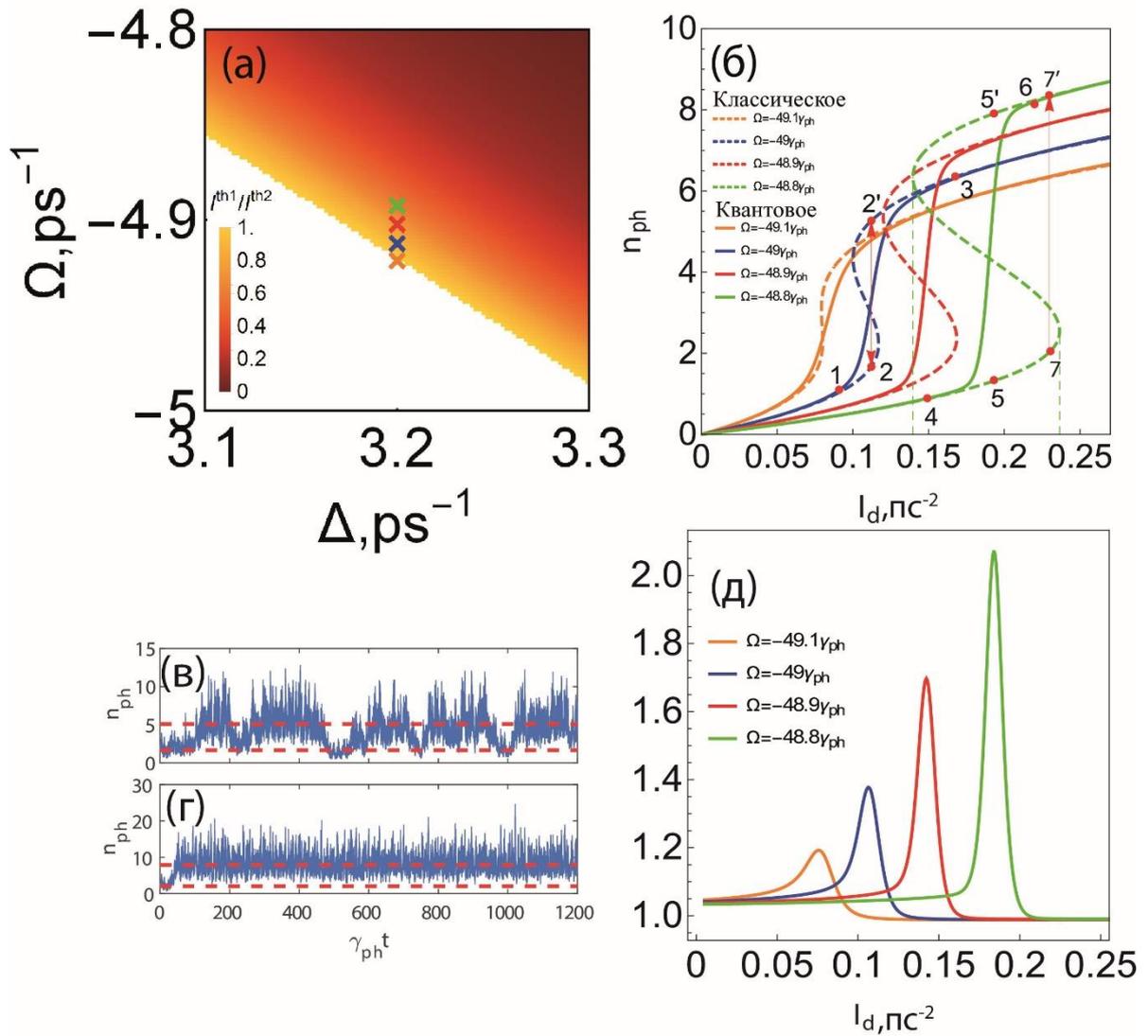


Рисунок 16 – (а) Область существования эффекта бистабильности; (б) число фотонов n_{ph} в кваиклассическом и квантовом приближениях для частотных параметров (в обратных единицах пикосекунд): $\Delta = 3.12 \text{ ps}^{-1}$, $\Omega = -4.92 \text{ ps}^{-1}$ (оранжевая кривая), $\Omega = -4.91 \text{ ps}^{-1}$ (синяя петля), $\Omega = -4.9 \text{ ps}^{-1}$ (красная петля), $\Omega = -4.89 \text{ ps}^{-1}$ (зеленая петля); эти точки соответствуют точкам на изображении (а). Соответствующим кривым на изображении (б) соответствуют графики корреляционной функции второго порядка фотонов на изображении (д). Результаты численного моделирования стохастических дифференциальных уравнений (3.1), показывают прыжки между стационарными состояниями на петле бистабильности показаны на изображениях (в) и (г) для случаев, соответствующих красной двойной стрелке и красной одинарной стрелке, показанных на изображении (б), соответственно.

Квантовый шум выталкивает систему из одного устойчивого состояния в другое. Наличие таких прыжков зависит от скорости сканирования

интенсивности накачки. Чем быстрее проход по области бистабильности, тем менее вероятно обнаружение таких прыжков. Экспериментально это проявляется в эффекте динамической петли гистерезиса, когда ширина петли гистерезиса зависит от скорости сканирования управляющего параметра. Поэтому, если сканировать интенсивность возбуждения вверх и вниз, классическая петля гистерезиса обнаруживается только в случае адиабатического изменения мощности накачки. При конечной скорости сканирования петля динамического гистерезиса сужается, как это было продемонстрировано в [44]. Ширина петли гистерезиса зависит от скорости изменения скорости накачки и времени жизни метастабильных состояний [44]. Подробнее данный вопрос изучался в работе Финка и Хоффлинга [44].

Точки поворота петли бистабильности сближаются при приближении к границе области существования бистабильности, что приводит к увеличению области влияния квантовых флуктуаций на систему. В тоже время уменьшается высота потенциального барьера (два стабильных состояния бистабильной системы соответствуют двум потенциальным ямам, разделенным потенциальным барьером). Это приводит к увеличению вероятности квантовых прыжков.

Рассмотрим состояние системы в точке б на петле стационарных решений, изображенной зеленой пунктирной кривой на рис.16б. Это состояние метастабильно, так как оно расположено справа от граничной квантовой кривой (сплошная кривая), поэтому через определенное время квантовый шум перебросит систему на верхнее состояние, как показано красной стрелкой. Действительно численное моделирование демонстрирует подобный скачок, рис.16г, при этом обратных прыжков не наблюдается (жесткий тип бифуркаций).

На рис.17 (в-г) изображены диаграммы корреляционные функции второго порядка для фотонов $g_{ph}^{(2)}$ в зависимости от экситон-фотонной отстройки Δ и лазерной отстройки Ω для различных интенсивностей накачки возле нижней

поляритонной ветви. Мы можем наблюдать яркую узкую параболическую полосу, которая соответствует пику $g_{\text{ph}}^{(2)}$, и как можно заметить, она повторяет нижнюю поляритонную ветвь (пунктирная линия). Эта огибающая кривая – область группировки фотонного излучения микропиллара, движется в направлении от ветви нижнего поляритонного резонанса параллельно оси лазерной отстройки Ω , сохраняя свою форму с увеличением интенсивности накачки. В тоже время величина пика $g_{\text{ph}}^{(2)}$ возрастает. Стоит отметить, что пик $g_{\text{ph}}^{(2)}$ более выражен при положительной отстройке ($\Delta > 0$). Такое поведение связано с тем, что квантовые флуктуации нижней поляритонной ветви LP играют важную роль вблизи своего резонанса по сравнению с квантовыми флуктуациями верхней поляритонной ветви UP. Также пик $g_{\text{ph}}^{(2)}$ более выражен для положительной отстройки, поскольку в этой области коэффициент Хопфилда для экситонной моды больше, чем для фотонной моды, $C_x > C_p$ и эта поляритонная ветвь является экситоноподобной при положительных отстройках ($\Delta > 0$).

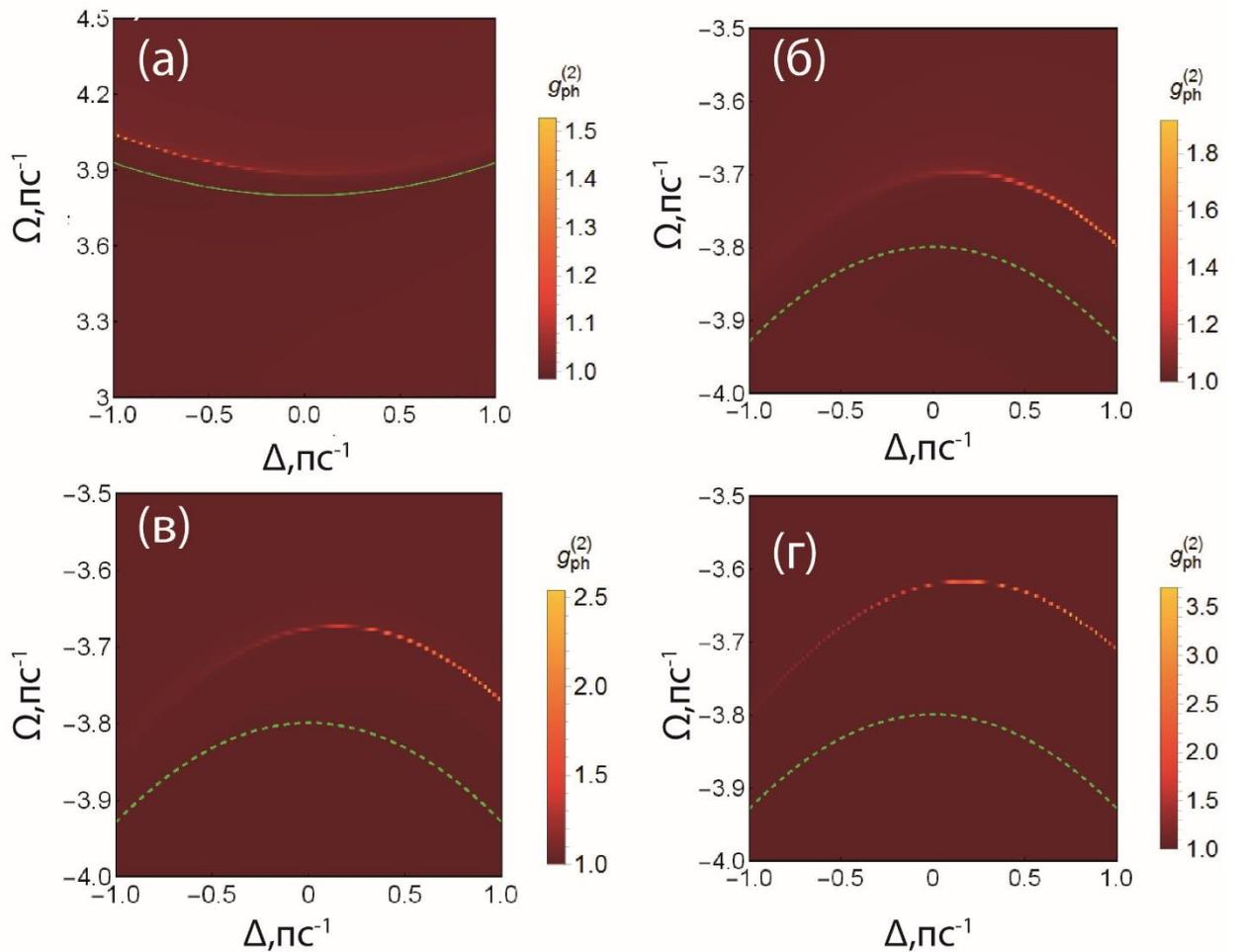


Рисунок 17 – Корреляционная функция второго порядка для фотонов в зависимости от экситон-фотонной отстройки Δ и лазерной отстройки Ω ; (а) около верхней поляритонной ветке (зеленая линия); (б-г) около нижней поляритонной ветке (зеленая линия) при разных интенсивностях накачки – а) $I_p=1 \text{ пс}^{-1}$; б) $I_p=0.7 \text{ пс}^{-1}$; в) $I_p=1 \text{ пс}^{-1}$; д) $I_p=2 \text{ пс}^{-1}$.

На рис.17а показан $g_{\text{ph}}^{(2)}$ на многообразии (Δ, Ω) для интенсивности накачки, $I_p = 1 \text{ пс}^{-1}$, вблизи верхней поляритонной ветви. В этом случае область пика $g_{\text{ph}}^{(2)}$ повторяет верхнюю поляритонную ветвь, и пик $g_{\text{ph}}^{(2)}$ теперь более выражен при отрицательных отстройках $\Delta < 0$ поскольку в этом случае $C_x < C_p$. Здесь для отрицательной отстройки верхняя поляритонная дисперсионная кривая является фотоноподобной ветвью.

Полученные результаты также должны быть действительными для рассматриваемой двухмодовой модели при условии, что отстройки настроены

близко к нижнему (или верхнему) поляритонному резонансу, что оправдывает одномодовое приближение в этих областях параметров.

2.9. ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА В БИСТАБИЛЬНОЙ ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННОЙ СИСТЕМЕ

Визуализируем распределение вероятности, в квантовом фазовом пространстве используя функцию Вигнера. Вывод функции Вигнера из Р-функции, дан в приложении ПЗ. Функция Вигнера может быть выражена через Р-функцию следующим образом [32,55]:

$$W(z) = \frac{2}{\pi} e^{-|z|^2} \int_{C_{\chi}} \int_{C_{\chi^+}} P(\chi, \chi^+) \exp(2z^* \chi + 2z \chi^+ - 2\chi^+ \chi) d\chi^+ d\chi, \quad (2.47)$$

На Рис.18 продемонстрировано распределение функции Вигнера для фотонного поля. В области фазового перехода, где происходит резкий рост значения квантовомеханических средних (сплошные кривые на рис.18а) наблюдается бимодальная структура распределения функции Вигнера (рис.158 и рис.18д). В квантовом случае, мы можем видеть перекрытия распределения вероятностей от каждого метастабильного состояния на петле бистабильности см. Рис.18в. На рис. Рис.18б, для состояния в области фазового перехода, для квазиadiaбатического режима, мы можем видеть разделенное распределение вероятностей – бимодальную структуру [74].

Различия между двумя режимами, описанные выше, можно наглядно продемонстрировать с помощью представления функции Вигнера. На сосуществование двух метастабильных состояний указывает бимодальная структура функции Вигнера. Обратите внимание, что, когда существует одно стабильное состояние, функция Вигнера локализована и характеризуется одной локальной областью, см. панели (а), (в), (г) и (е) на рис.18, соответствующие точкам 1, 3, 4 и 6. на рис.13б соответственно. Для квантового режима в частном случае, соответствующем рекуррентным скачкам между точками 2 и 2' на рис.13б, можно увидеть заметное перекрытие распределений, соответствующих двум бистабильным состояниям см. Рис.18б. Напротив, для квазиadiaбатического случая, точки 5 и 5' на рис.13б, распределение

квазивероятности W локализовано в двух отдаленных областях [74,75], соответствует фазовым состояниям на квазиклассической кривой стационарных решений. Эти распределения вероятности почти не перекрываются друг с другом см. Рис.18е.

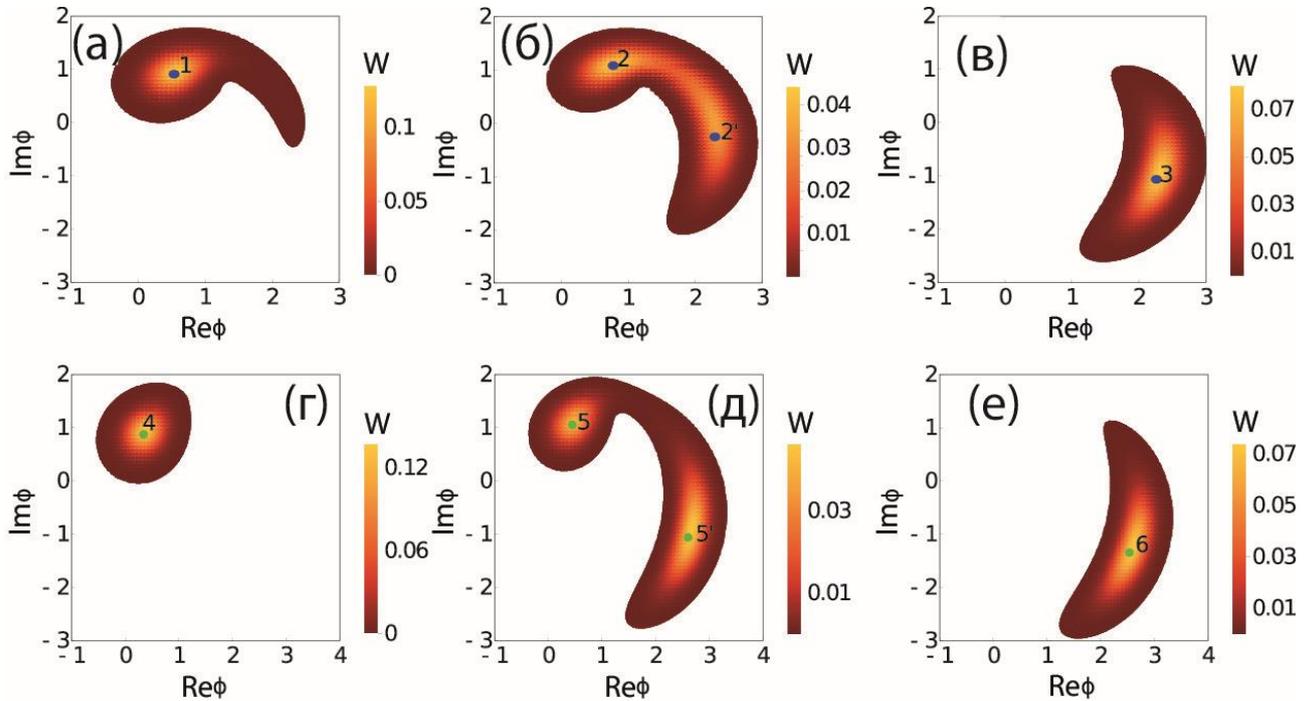


Рисунок – 18 (а-в) Функция Вигнера для следующих значений отстроек: $\Omega \approx -4.91$ пс^{-1} , $\Delta \approx -3.2$ пс^{-1} для различных положений на петле бистабильности для синей пунктирной петли на Рис. 3б; (г-е) Функция Вигнера для следующих значений отстроек: $\Omega \approx -4.89$ пс^{-1} , $\Delta \approx -3.2$ пс^{-1} для различных положений на петле бистабильности для зеленой пунктирной петли на Рис.16б.

2.10. ЭФФЕКТЫ СВЕРХГРУППИРОВКИ И АНТИГРУППИРОВКИ В ОБЛАСТИ ТРОЙНОГО РЕЗОНАНСА

В этом разделе исследуется квантовая статистика излучения столбцового микрорезонатора, используя функцию $g_{\text{ph}}^{(2)}(0)$ рассчитанную в разделе 2.2 и приложении 3, в области таких значений отстроек Δ_{ph} и Δ_{ex} , где нет бистабильности при сильной накачки $E_d > \gamma$, а именно вблизи тройного резонанса $\omega_p = \omega_{ph} = \omega_{ex}$, – см. Рис.12а и рис.18б. В этой области был обнаружен выраженный эффект антигруппировки фотонов $g_{\text{ph}}^{(2)}(0) < 1$,

изображенный на рис.8а в виде диаграммы $g_{\text{ph}}^{(2)}(0)$ на разнообразие параметров Ω и Δ .

На рис.19а продемонстрирован эффект сверхгруппировки фотонов [76] $g_{\text{ph}}^{(2)}(0) \gg 1$ (в то время как экситоны находятся почти в когерентном состоянии $g_{\text{ex}}^{(2)} \sim 1$) для области вблизи $\Omega \approx -\Delta$ (заметная светлая полоса на рис.18а). В этой области, число фотонов намного меньше числа экситонов $|\chi|^2/|\phi|^2 \gg 1$ (см. рис.19б). Так как населенность экситонной моды намного больше населенности фотонной моды, это приводит к тому, что малые квантовые флуктуации популяции экситонов через зависимость (2.38) фотонного поля от экситонного поля в адиабатическом пределе, вызывают сильные флуктуации фотонной моды, что приводит к эффекту сильной группировки фотонов.

Отметим также, что эффект сверхгруппировки экспериментально сложно наблюдать в связи с низкой интенсивностью фотонного поля. При отрицательных отстройках область сверхгруппировки примыкает к области с антигруппировкой $g_{\text{ph}}^{(2)}(0) < 1$. Переход статистики излучения микрорезонатора от группировки (сверхгруппировки) к антигруппировки происходит при изменении частотных параметров и продемонстрирован на рис.15в. Зависимость $g_{\text{ph}}^{(2)}(0)$ от интенсивности накачки (управляющего поля) показана на рис.15г для различных экситон-фотонных отстроек: $\Omega \approx 0.6 \text{ пс}^{-1}$ (синяя), $\Omega \approx 0.65 \text{ пс}^{-1}$ (красная), $\Omega \approx 0.67 \text{ пс}^{-1}$ (зеленая) и $\Omega \approx 0.75 \text{ пс}^{-1}$ (желтая). Эффект антигруппировки обычно наблюдается при относительно слабых полях, с увеличением же накачки статистика фотонов приближается к когерентной, $g_{\text{ph}}^{(2)}(0) \sim 1$.

Отражают ли фотоны, излучаемые микрорезонатором, статистику внутрирезонаторных поляритонов? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к статистическим свойствам второй составляющей поляритонов – экситонной. Эффекты антигруппировки можно наблюдать и для экситонной моды. Однако,

в отличие от фотонов, корреляционная функция второго порядка для экситонной моды имеет порядок $g_{ex}^{(2)} = 0.9995 \dots$ это связано с большой плотностью экситонов. Фактически, по форме (если смотреть сверху, без относительно значений величин) поведение $g_{ex}^{(2)}$ на многообразии параметров (Ω, Δ) повторяет квантовое статическое поведение фотонного поля, однако по величине немного меньше единицы $g_{ex}^{(2)}(0) \approx 1$. Линеаризация же по квантовому шуму экситонного поля дает такую аппроксимацию выражения $g_{ex}^{(2)}$ в пределе большой по величине накачки, при $n_{ex} \rightarrow \infty$,

$$g_{ex}^{(2)} \approx 1 - 1/3n_{ex}, \quad (2.48)$$

поле экситона приближается к когерентному состоянию.

Квантовая статистика поляритонов нижней ветви (LP-поляритоны) объединяет статистику фотонов и экситонов и из-за преобладания экситонной компоненты, квантовая статистика LP-поляритоны близка к статистике экситонов т.е. к когерентной статистике. Легко проверить, что

$$g_{LP}^{(2)} \geq \left(g_{ex}^{(2)} + g_{ph}^{(2)} \right) / 2 \quad (2.49)$$

верно в области, близкой к тройному резонансу.

Поэтому, поляритоны не проявляют заметного эффекта антигруппировки в отличие от фотона $g_{LP}^{(2)} \approx 1$. В связи с этим ясно, что квантовая статистика поляритонов не обязательно должна совпадать со статистикой излучения микрорезонатора. Стоит отметить что, когда поляритон излучается микрорезонатором, квантовое состояние поляритона коллапсирует в фотонное состояние, унаследовав энергию и импульс от поляритона, однако статистика поля излучаемых фотонов может быть совершенно иной. В следующем разделе будет проанализирована квантовая статистика LP-поляритонов.

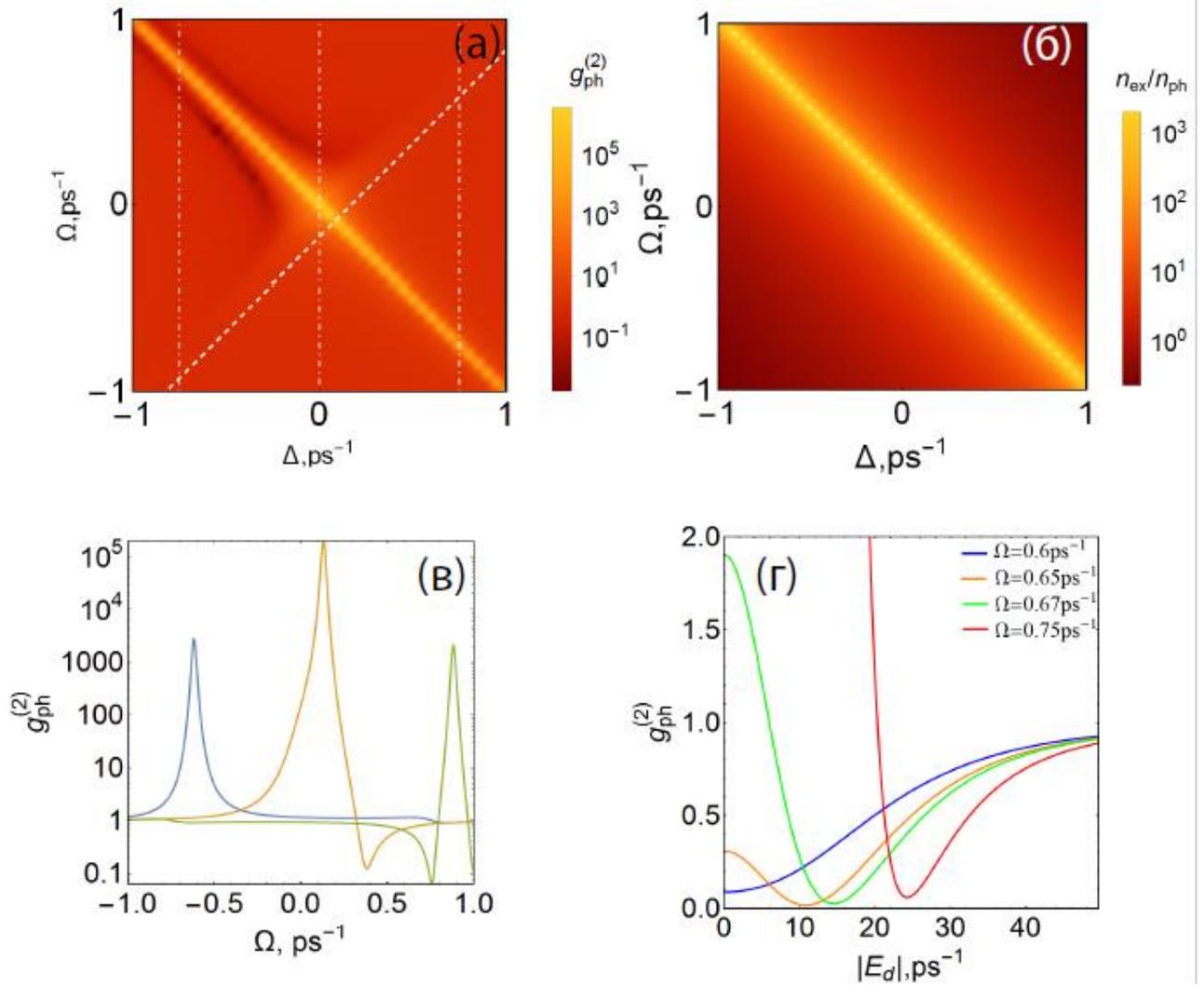


Рисунок 19 – а) Диаграмма корреляционной функции второго порядка излучения микростолбца $g_{\text{ph}}^{(2)}(0)$ на плоскости параметров (Δ и Ω); б) отношение числа экситонов к числу фотонов $|\chi|^2/|\phi|^2$, при тех же параметрах что и панель (а); в) зависимость $g_{\text{ph}}^{(2)}(0)$ от частоты отстройки накачки Ω с фиксированной экситон-фотонной отстройкой, изображенные вертикальными линиями на панели (а), $\Delta = -0.75$ пс⁻¹ (зеленая), $\Delta = 0$ (красная) и $\Delta = 0.75$ пс⁻¹ (синяя); г) зависимость $g_{\text{ph}}^{(2)}(0)$ от амплитуды накачки E_d для $\Delta = -0.75$ пс⁻¹ и при фиксированных отстройках (цветных крестики на панели (а)), $\Omega \approx 0.6$ пс⁻¹ (синяя), $\Omega \approx 0.65$ пс⁻¹ (красная), $\Omega \approx 0.67$ пс⁻¹ (зеленая) и $\Omega \approx 0.75$ пс⁻¹ (желтая).

2.11. КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА LP-ПОЛЯРИТОНОВ

Собственные поляритонные моды являются собственными значениями диагонализированного гамильтониана (2) в поляритонном базисе, частота нижней поляритонной ветки определяется следующим соотношением из (11),

$$\omega_{LP} = \frac{1}{2} \left[\omega_{ph} + \omega_{ex} - \sqrt{4\Omega_R^2 + (\omega_{ph} - \omega_{ex})^2} \right], \quad (2.50)$$

также мы перенормировали нелинейность и накачку $\tilde{\chi} = C_x^4 \alpha, \kappa = C_p E_p$.

Пренебрегая верхней поляритонной веткой, а также взаимодействием с ней получаем эффективный гамильтониан на нижней поляритонной ветке:

$$H_{LP} = \omega_{LP} \hat{P}^+ \hat{P} + \tilde{\chi} \hat{P}^+ \hat{P}^+ \hat{P} \hat{P} + i(\kappa^* e^{-i\delta t} \hat{P}^+ - \kappa e^{i\delta t} \hat{P}), \quad (2.51)$$

Переходя к медленно меняющимся амплитудам на частоте накачки получаем следующий гамильтониан:

$$H_{LP} = \Delta_{LP} \hat{P}^+ \hat{P} + \tilde{\chi} \hat{P}^+ \hat{P}^+ \hat{P} \hat{P} + i(\kappa^* \hat{P}^+ - \kappa \hat{P}), \quad (2.52)$$

где $\Delta_{LP} = \frac{1}{2} \left[\Delta_{ph} - \Delta_{ex} - \sqrt{4\Omega_R^2 + (\Delta_{ph} + \Delta_{ex})^2} \right]$ и $\Delta_{ph} = \Delta - \Omega, \Delta_{ex} = \Delta +$

$\Omega, \Delta = \frac{\omega_{ph} - \omega_{ex}}{2}$ – экситон фотонная отстройка;

$\Omega = \delta_p - \frac{\omega_{ph} + \omega_{ex}}{2}$ – отстройка частоты накачки от середины между собственными состояниями экситон фотонной системы (условные

обозначения). В других отстройках, так $\Delta_{LP} = - \left[\Omega + \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2} \right]$.

Диссипация нижней поляритонной ветки выражается через диссипации фотонов и экситонов с помощью коэффициентов Хопфильда [26] $\gamma_{LP} = C_x^2 \gamma_{ex} + C_p^2 \gamma_{ph}$.

Основное кинетическое уравнение на редуцированную матрицу плотности для нижней поляритонной ветки принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_{LP}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H_{LP}, \rho_{LP}] + \gamma_{LP} (2\hat{P} \rho_{LP} \hat{P}^+ - \rho_{LP} \hat{P}^+ \hat{P} - \hat{P}^+ \hat{P} \rho_{LP}), \quad (2.53)$$

Стационарные квазиклассические решения на поляритонную моду определяются из решения следующего алгебраического уравнения:

$$\kappa^2 = ((\Delta_{LP} + 2\tilde{\chi}|\alpha|^2)^2 + \gamma_{LP}^2)|\alpha|^2 \quad (2.54)$$

Поворотные точки петли бистабильности определяются через поляритонную отстройку и обратно пропорциональны эффективной поляритонной нелинейности

$$n_{th1,2} = \frac{-2\Delta_{LP} \pm \sqrt{\Delta_{LP}^2 - 3\gamma_{LP}^2}}{6\tilde{\chi}} \quad (2.55)$$

Уравнению на матрицу плотности для поляритонных состояний нижней ветви, можно написать уравнение Фоккера-Планка для Р-функции из основного кинетического уравнения (2.53):

$$\dot{P} = \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha} (-(i\Delta_{LP} + \gamma_{LP})\alpha + \kappa - 2i\tilde{\chi}\alpha^+\alpha^2) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (-i\tilde{\chi}\alpha^2) + \text{э.с.} \right] P, \quad (2.56)$$

его решение в стационарном режиме имеет вид:

$$P_{ss}(\alpha, \alpha^+) = \alpha^{\left(\frac{\Delta_{LP} - i\gamma_{LP}}{\chi} - 2\right)} \alpha^+ \left(\frac{\Delta_{LP} + i\gamma_{LP}}{\chi} - 2\right) \exp \left[i \frac{E_p}{\chi} \left(\frac{1}{\alpha^+} - \frac{1}{\alpha} \right) + 2\alpha^+\alpha \right] \quad (2.57)$$

корреляционная функция второго порядка на LP-поляритоны можно вычислить аналогичным образом с использованием Р-функции (2.57):

$$g_{LP}^{(2)} = \frac{\langle \hat{P}^+ \hat{P}^+ \hat{P} \hat{P} \rangle}{\langle \hat{P}^+ \hat{P} \rangle^2} = \frac{\langle \alpha^{+2} \alpha^2 \rangle}{\langle \alpha^+ \alpha \rangle^2} = \frac{\Delta_{LP}^2 + \gamma_{LP}^2}{\chi^2 \left(\frac{\Delta_{LP} - i\gamma_{LP}}{\chi} + 1 \right) \left(\frac{\Delta_{LP} + i\gamma_{LP}}{\chi} + 1 \right)} \times \quad (2.58)$$

$$\times \frac{{}_0F_2\left(\frac{\Delta_{LP} - i\gamma_{LP}}{\chi}, \frac{\Delta_{LP} + i\gamma_{LP}}{\chi}, 2 | E_p/\chi|^2\right) {}_0F_2\left(\frac{\Delta_{LP} - i\gamma_{LP}}{\chi} + 2, \frac{\Delta_{LP} + i\gamma_{LP}}{\chi} + 2, 2 | E_p/\chi|^2\right)}{\left({}_0F_2\left(\frac{\Delta_{LP} - i\gamma_{LP}}{\chi} + 1, \frac{\Delta_{LP} + i\gamma_{LP}}{\chi} + 1, 2 | E_p/\chi|^2\right) \right)^2}$$

С другой стороны мы можем переписать корреляторы на поляритоны через фотонные и экситонные корреляторы с помощью коэффициентов Хопфильда $\hat{P} = C_X \hat{b} + C_P \hat{a}$,

$$g_{LP}^{(2)} = \frac{\langle \hat{P}^+ \hat{P}^+ \hat{P} \hat{P} \rangle}{\langle \hat{P}^+ \hat{P} \rangle^2} = \frac{c_x^4 \langle \hat{b}^+ \hat{b}^+ \hat{b} \hat{b} \rangle + c_p^4 \langle \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} \rangle + \dots}{(c_x^2 \langle \hat{b}^+ \hat{b} \rangle + c_p^2 \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle + c_x c_p (\langle \hat{a}^+ \hat{b} \rangle + \langle \hat{b}^+ \hat{a} \rangle))^2} \quad (2.59)$$

По предположениям, написанным при выводе гамильтониана (2.52) вклад в статистику нижней поляритонной ветки вносят в основном экситоны.

$$g_{LP}^{(2)} = \frac{\langle \hat{P}^+ \hat{P}^+ \hat{P} \hat{P} \rangle}{\langle \hat{P}^+ \hat{P} \rangle^2} \approx \frac{\langle \hat{b}^+ \hat{b}^+ \hat{b} \hat{b} \rangle}{\langle \hat{b}^+ \hat{b} \rangle^2} \quad (2.60)$$

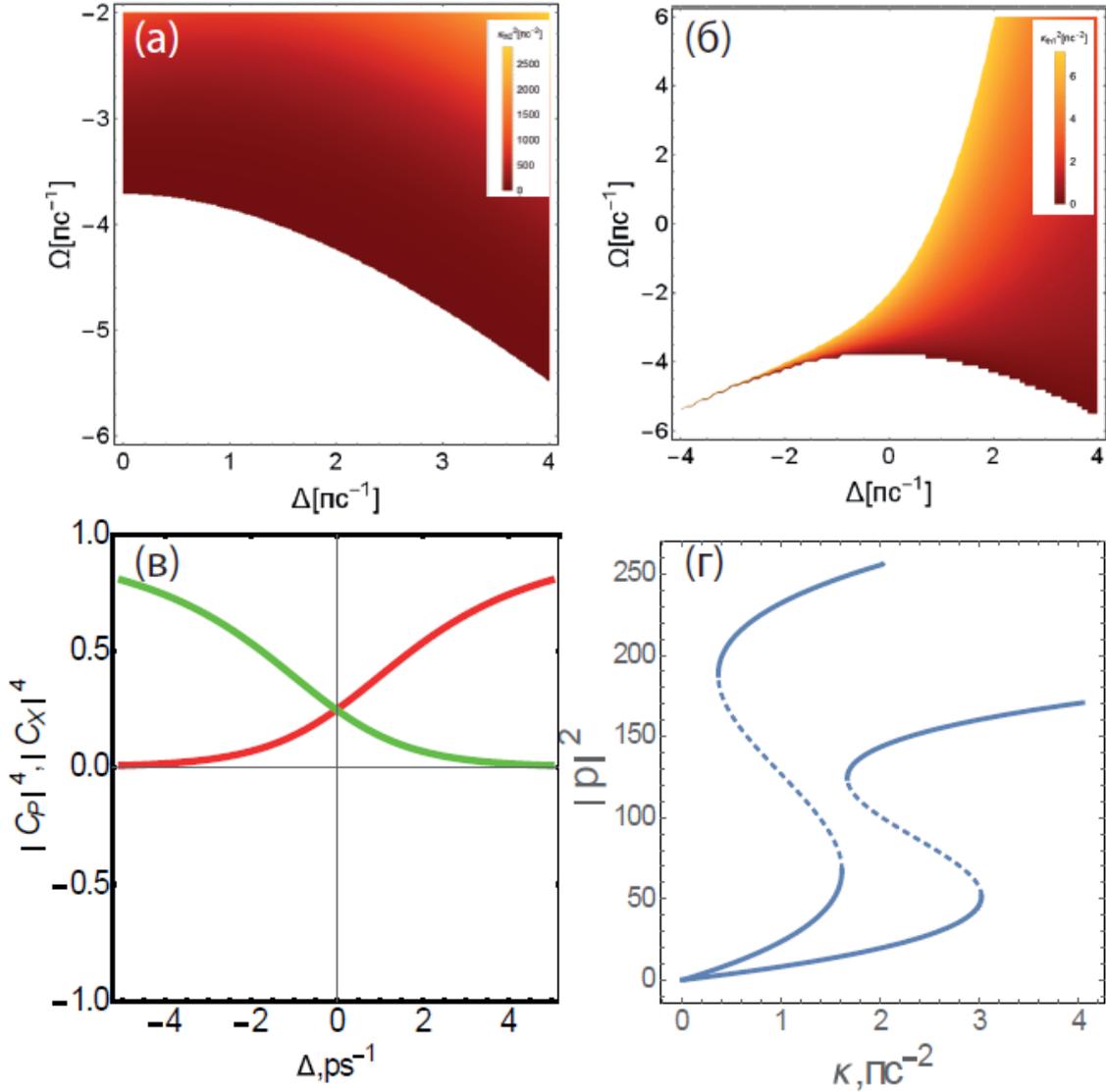


Рисунок 20 – (а,б) область поляритонной бистабильности; (в) стационарные решения на популяцию поляритонов; (г) коэффициенты Хопфилда в зависимости от экситон-фотонной отстройки.

На рис.20а изображена область существования поляритонной бистабильности. Как можно заметить, эта область в районе отрицательных

экситон-фотонных отстроек и в области большой по модулю отстройки Ω совпадает с областью бистабильности на рис.12а. Однако для положительных отстроек Ω приближение нижней поляритонной ветки предсказывает существование бистабильности см. Рис.20б в тех областях, где его не должно быть и, наоборот, отсутствует вторая область существования бистабильности ограниченной верхней поляритонной веткой см. рис.20а. Это связано с тем, что мы не учитываем вкладом верхней поляритонной ветки на нелинейный стационарный режим. На рис.10в продемонстрированы поляритонные петли бистабильности.

Из рис.20г видно, что вклад в гамильтониан нижней поляритонной ветки значителен при отрицательных отстройках, а вкладами от членов с коэффициентами C_p можно пренебречь. Однако при положительных отстройках это приближение, очевидно, не работает, но оно оказывается справедливым для верхней поляритонной ветки. В области вблизи маленьких отстроек нужно учитывать обе ветки, а также взаимодействие между ними.

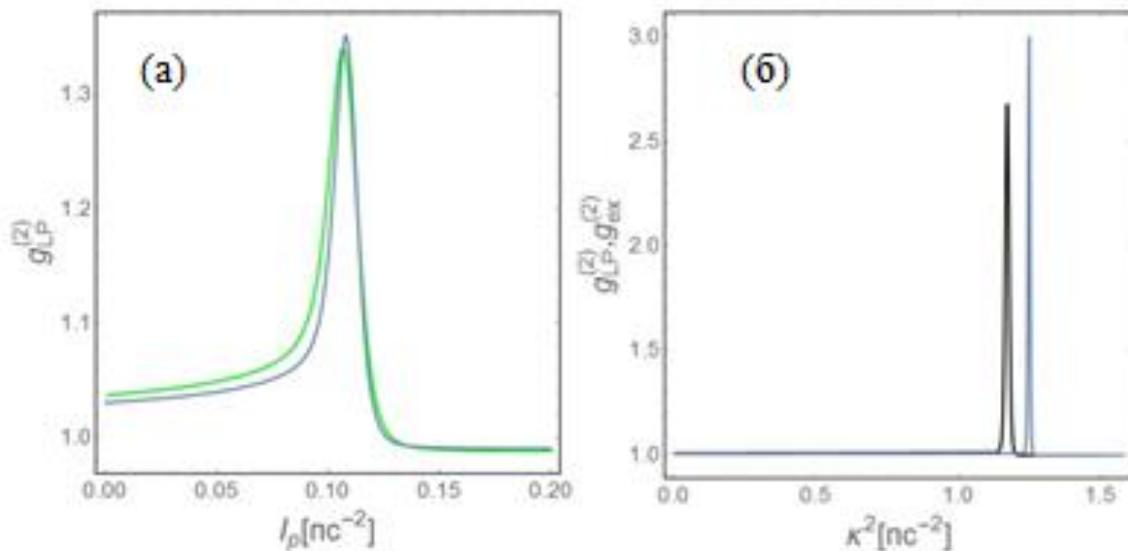


Рисунок 21 – (а) Корреляционная функция второго порядка для поляритонов (зеленая кривая) в сравнении со и экситонов (синяя кривая), параметры системы: $\Delta = 3.2 \text{ ps}^{-1}$, $\Omega = -4.91 \text{ ps}^{-1}$; (б) Функция $g_{LP}^{(2)}$ для поляритонов (зеленая кривая) в сравнении с $g_{ex}^{(2)}$ для экситонов (черная кривая), параметры системы: $\Delta = 0.38 \text{ ps}^{-1}$, $\Omega = -3.6 \text{ ps}^{-1}$.

В области бистабильности см. рис.20б, как и для фотонов, наблюдается пик корреляционная функция второго порядка поляритонов рис.21а, при этом величина, расположение и форма повторяют корреляционная функция второго порядка экситонов. Это говорит о том, что статистика нижней поляритонной ветки в области отрицательной отстройки $\Omega < 0$ и большой экситон-фотонной отстройки см.рис.20в, т.е. где доминирует нижняя поляритонная ветка – там более выражена квантовая статистика экситонов. В области, где уже нельзя пренебречь фотонной компонентой, т.е. в области маленьких или отрицательных отстроек Δ , квантовая статистика нижней поляритонной ветки отличается от статистики экситонов см. рис.21б.

2.12. ОБСУЖДЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ЭКСИТОННЫХ-ПОЛЯРИТОНОВ В ОБЛАСТИ ТРОЙНОГО РЕЗОНАНСА

Обычно, явление антигруппировки происходит только при достаточно большом значении параметра нелинейности (сравнимые с параметрами релаксации в системе). В микрорезонаторе это достигается путем уменьшения объема моды микрорезонатора [77]. Однако при уменьшении объема моды до субволнового размера ухудшается его добротность, т.е. увеличивается параметр диссипации. Эффект антигруппировки поляритонов был исследован в работах Вергера и Сиути [77]. Поляритоны формировались в фотонных квантовых точках, встроенных в квантовую яму, и обладали большой нелинейностью. Необыкновенная квантовая блокада подразумевает, что это проявляется и при малом значении параметра нелинейности $U < \gamma$ [77-80].

Эффект антигруппировки может быть получен при малом значении параметра нелинейности α . Этот эффект продемонстрирован на рис. 22а, где изображена функция $g_{ph}^{(2)}$ в зависимости от параметра нелинейности α , нормированная на величину $\alpha = 0,015\gamma_{ph}$. Можно заключить, что эффект антигруппировки может наблюдаться даже при слабой нелинейности системы, но если мы посмотрим на правую ось рис.22а, которая соответствует среднему числу фотонов (изображенную пунктирными кривыми), то заметим, что

среднее число фотонов в излучении с подобной неклассической статистикой, порядка 10^{-3} . Воспользуемся параметром Манделя [81]:

$$Q = \frac{\langle \Delta n_{ph}^2 \rangle}{\langle n_{ph} \rangle} - 1 = \langle n_{ph} \rangle (g_{ph}^{(2)}(0) - 1) \quad (2.61)$$

На рис.22а мы можем видеть эффект антигруппировки, но в то же время фотонное поле относительно слабое – малое число фотонов. Хотя в этих случаях мы и наблюдаем суб-Пуассоновскую статистику фотонов, так как $g_{ph}^{(2)} < 1$, но, тем не менее, статистика излучения близка к Пуассоновской статистике, что и показывает параметр Манделя $Q \approx 0$.

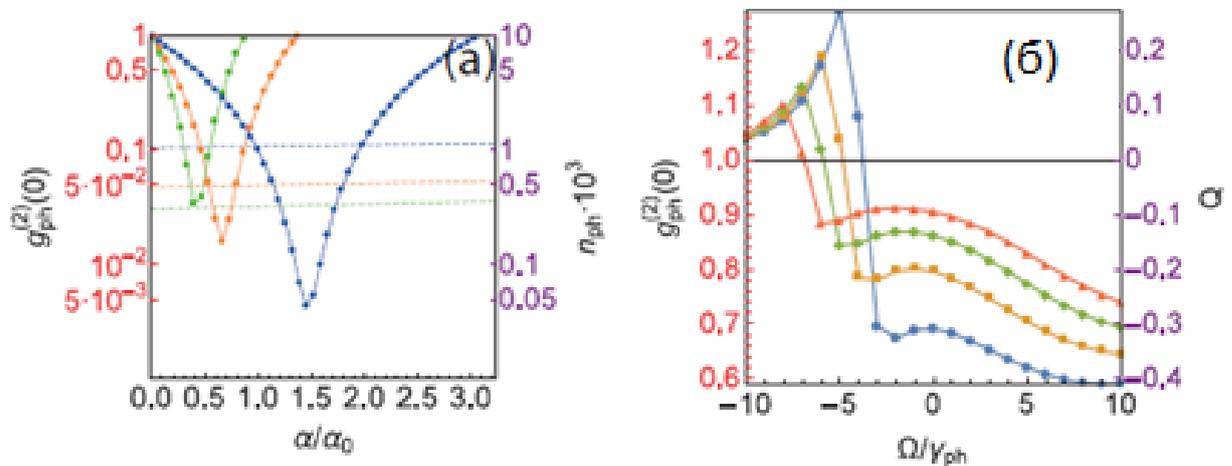


Рисунок 22 – а) Корреляционная функция второго порядка $g_{ph}^{(2)}$ фотонного поля и среднее число фотонов, в зависимости от нормированного значения параметра нелинейности α/α_0 для разных частотных параметров: $\Delta = -7.5\gamma_{ph}$, $\Omega = 6\gamma_{ph}$ – синяя, $\Omega = 6.5\gamma_{ph}$ – оранжевая, $\Omega = 6.7\gamma_{ph}$ – зеленая кривые; б) Корреляционная функция второго порядка и параметра Манделя в зависимости от лазерной отстройки частоты накачки при фиксированном значении числа фотонов: $\langle n_{ph} \rangle = 1$ для следующих параметров экситон-фотонных отстроек: $\Delta = -4\gamma_{ph}$ – синяя линия, $\Delta = -5\gamma_{ph}$ – оранжевая линия, $\Delta = -6\gamma_{ph}$ – зеленая линия, $\Delta = -7\gamma_{ph}$ – красная линия.

С другой стороны мы можем так подобрать интенсивность накачки, что получим на выходе излучение со средним числом фотонов $\langle n_{ph} \rangle = 1$, зафиксировав излучение на этом уровне, мы проследили изменение $g_{ph}^{(2)}$ и параметра Манделя от частоты лазерной накачки (в данном случае от лазерной

отстройки Ω) это показано на рис.22б. Мы видим, что при $\Omega > 0$ достигается эффект антигруппировки со статистикой фотонов близкой к суб-Пуассоновской и $Q < 0$ см. рис.22б. На правой оси на рис.22б изображен параметр Манделя, демонстрирующий (в пределах $Q < 0$) ярко выраженную суб-Пуассоновскую статистику фотонного излучения микростолбика.

Для достижения квантовой блокады фотонного излучения микропиллара приходится устанавливать значение стационарного поле фотонов (или поляритонов) на уровне нуля, т.е. почти вакуумного состояния (среднее число бозонов примерно равно 10^{-6}) или сильно увеличивать накачку. Во втором случае, в микропилларе неклассическая статистика возникает не за счет квантовой интерференции, как в случае необыкновенной фотонной блокады, а за счет того, что флуктуации одного осциллятора подчиняют себе квантовую статистику другого осциллятора. А именно, слабо проявляющийся себя эффект антигруппировки экситонного поля приводит к выраженному эффекту антигруппировке фотонного поля.

Для одного микропиллара при условии $\Delta \sim \Omega$, наблюдается выраженный эффект антигруппировки фотонного излучения микропиллара. Но при этом статистика самих поляритонных состояний, остается почти Пуассоновской, испытывая небольшой эффект антигруппировку вблизи резонанса с нижней поляритонной ветвью. При этом статистика экситонного поля почти когерентна. Квантовая статистика экситонных поляритонов нижней ветви (НВ-поляритоны) объединяет статистику фотонов и экситонов, и из-за преобладания экситонной составляющей квантовая статистика НВ-поляритонов близка к статистике экситонов, т.е. к когерентной статистике.

Сильно выраженный эффект антигруппировки может служить проявлением эффекта квантовой блокады. Этот эффект можно использовать для создания источников одиночных фотонов. Поэтому явление поляритонной блокады сейчас представляет большой интерес среди специалистов в этой среде.

В следующем разделе предложена схема микростолбцового димера, для достижения поляритонной блокады.

2.13. КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА ПОЛЯРИТОНОВ В МИКРОРЕЗОНАТОРНОМ ДИМЕРЕ

Квантовая блокада — это эффект подавления вероятности нахождения двух поляритонов в определенном состоянии. Механизм необыкновенной (unconventional) квантовой блокады, основан на деструктивной квантовой интерференции квантовых траекторий $|00\rangle \rightarrow |10\rangle \rightarrow |20\rangle$ и $|00\rangle \rightarrow |10\rangle \leftrightarrow |01\rangle \rightarrow |11\rangle \leftrightarrow |20\rangle$, см. рис. 23б, и позволяет добиться эффекта поляритонной блокады в поляритонном димере – системе двух связанных микропилларов в условиях резонансной накачки, см. рис.23а. Для достижения поляритонной блокады, используется микрорезонаторный димер – два перекрывающихся микростолбца. Микрорезонаторный димер схематично показан на рис.23а. Связь между поляритонными состояниями в соседних микростолбцах, обусловлена туннелированием фотонов сквозь боковые стенки микростолбца. В такой системе были обнаружены эффекты Джозефсоновских осцилляций между модами димера и само-захвата поляритонного конденсата в одном из микростолбцов [82].

Гамильтониан микрорезонаторного димера:

$$H_d = \varepsilon_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \varepsilon_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + E_d (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1) + g_{12} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + g_{21} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \frac{U}{2} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \frac{U}{2} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2 \quad (2.62)$$

где \hat{a}_l оператор уничтожения (рождения) поляритонов в первом и втором l -ом микростолбике.

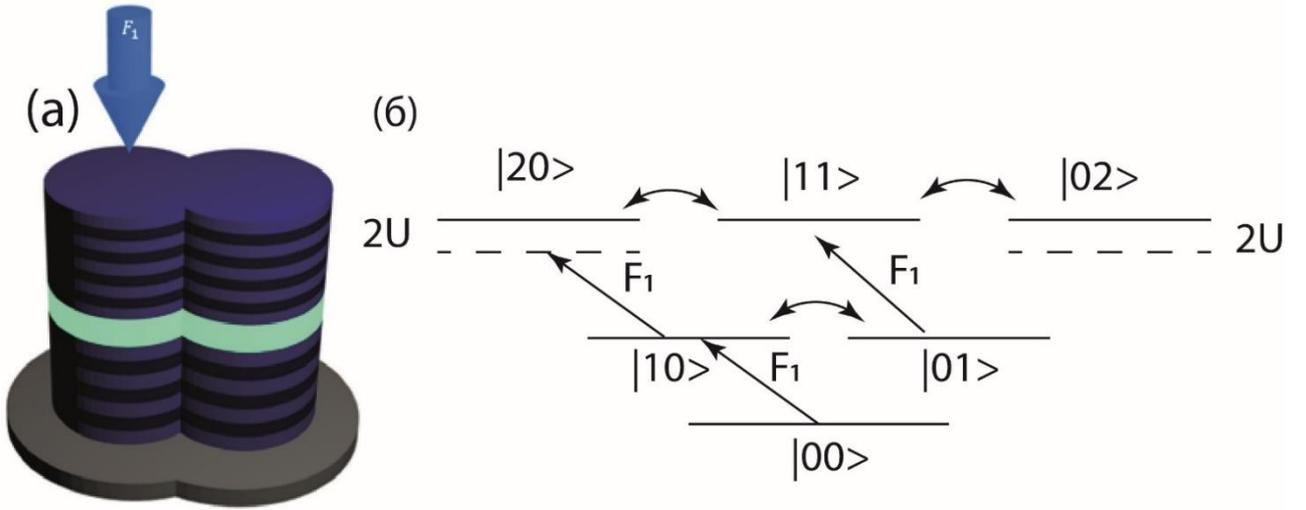


Рисунок 23. Эскиз поляритонного димера – связанные микропиллары. Справа схема заселение состояний.

Уравнение на матрицу плотности рассматриваемой системы имеет вид,

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H_d, \rho] + \gamma_1 D[\hat{a}_1] + \gamma_2 D[\hat{a}_2] \quad (2.63)$$

где определены следующие диссипаторы

$$D[\hat{a}_1] = \hat{a}_1 \rho \hat{a}_1^\dagger - \frac{1}{2} [\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \rho]_+, \quad D[\hat{a}_2] = \hat{a}_2 \rho \hat{a}_2^\dagger - \frac{1}{2} [\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \rho]_+. \quad (2.64)$$

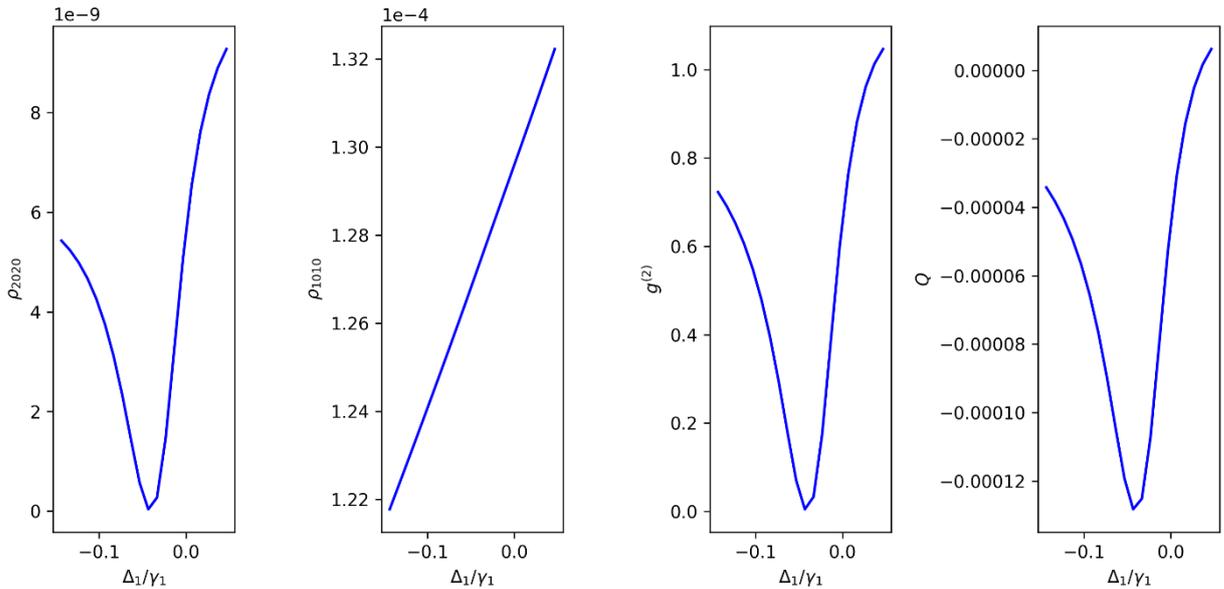


Рисунок 24. (а-б) Матричные элементы матрицы плотности; (в) корреляционная функция второго порядка первого микропиллара; (г) параметр Манделя. Решение задачи получено решением уравнений на матричные элементы матрицы плотности в фоковском базисе, см. приложение П4.

Корреляционная функция второго порядка можно определить из матричных элементов матрицы плотности следующим образом,

$$g_1^{(2)} = \frac{\sum_{n,m} n(n-1) \rho_{n,n,m,m}}{(\sum_{n,m} n \rho_{n,n,m,m})^2} \approx \frac{2\rho_{2,2,0,0}}{\rho_{1,1,0,0}^2} \quad (2.65)$$

На рисунках 24а,б продемонстрированы матричные элементы матрицы плотности которые существенно влияют на квантовую статистику, возле минимума $g_1^{(2)}$. Матричный элемент $\rho_{2,2,0,0}$ испытывает минимум в той же точке, что и минимум функции $g_1^{(2)}$.

Помимо нелинейности, важным параметром системы являются отстройки резонансной частоты микростолбца от частоты накачки. При некоторых значениях отстроек наблюдается эффект поляритонной блокады. Мы варьировали значения всех отстроек и получали минимальные значения параметров $\min(g_1^{(2)}(\Delta_1, \Delta_2))$ при некотором оптимальном значении отстройки. Результат для одиночного микростолбца и микрорезонаторного димера, показан на рис.25.

Эффект поляритонной блокады в димере достигается при отрицательной отстройке первого микростолбца $\Delta_1 < 0$, что не характерно для блокады с одиночным микрорезонатором [80]. Условие оптимальности параметров отстроек, минимизирующее функцию $g_1^{(2)}(\Delta_1, \Delta_2)$, определяется из следующего условия:

$$\frac{\Delta_{opt}}{\gamma_1} = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{U}{\gamma_1}\right)^2 + 1} - \frac{U}{\gamma_1} \quad (2.66)$$

Где сама функция $g_1^{(2)}$ принимает минимальное значение

$$\min(g_1^{(2)}(\Delta_{opt})) = 1 - 2 \frac{U}{\gamma_1} \frac{\Delta_{opt}}{\gamma_1} \quad (2.67)$$

Для оптимальных параметров расстройки параметр $\min(g_1^{(2)}(\Delta_1, \Delta_2))$ достигает значения $\sim 0,001$ при типичном значении параметра нелинейности $U_1=U_2=0,01\gamma_1$, а для одного микропиллара порядка $\sim 0,98$ при тех же параметрах.

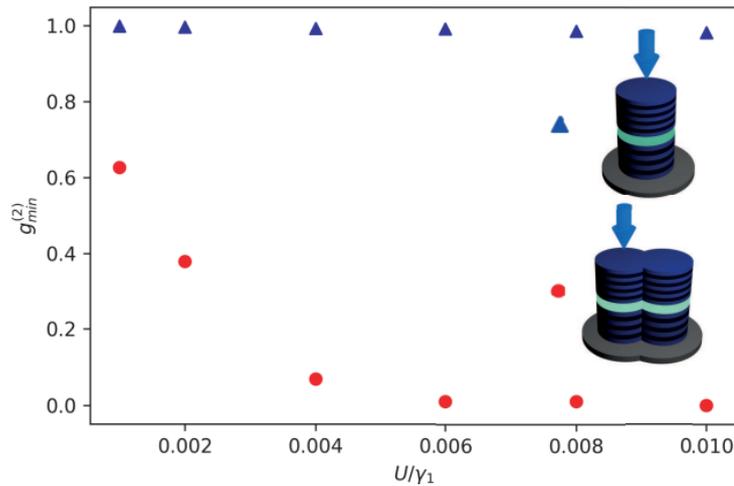


Рисунок 25. Минимальное значение корреляционной функции второго порядка для разных значений параметра нелинейности: синий треугольник — один микрорезонатор, красные кружки — поляритонный димер.

Для димера можно наблюдать суб-Пуассоновскую статистику в области слабых нелинейностей, где одиночный микростолбец демонстрирует слабо выраженное неклассическое поведение. Стационарная накачка на одном из микростолбцов димера приводит к заселению основного состояния и туннелированию фотона в соседний микростолбец. Заселение последующих состояний блокируется деструктивной интерференцией квантовых траекторий. Это приводит к квантовой блокаде первого микростолбца. На рис.26 показана корреляционная функция второго порядка от первого микрорезонатора при для двух значений параметра нелинейности для (а-б) $U = 0.001\gamma$ и (в-г) $U = 0.01\gamma$ в диапазоне отстроек Δ_1 и Δ_2 . Минимальное значение для рассматриваемой системы $g_{\min}^{(2)} \sim 10^{-3}$. Более выраженное проявление суб-Пуассоновской статистики в связанных микропилларах определяет использование такой системы для создания источников одиночных поляритонных состояний. Это еще больше вдохновляет на изучение квантовой блокады в более сложных системах. Благодаря необыкновенному механизму квантовой блокады, предложенному в [77] можно выбрать такие резонансные условия, при которых квантовые траектории заселенности состояний с $n_1 > 1$ будут подавлены или маловероятны (в режиме слабой накачки). Эти условия

были получены для микрорезонаторного димера для поляритонных состояний в них, и продемонстрированы на диаграммах $\Delta_1 - \Delta_2$ на рис.26 а и рис26в.

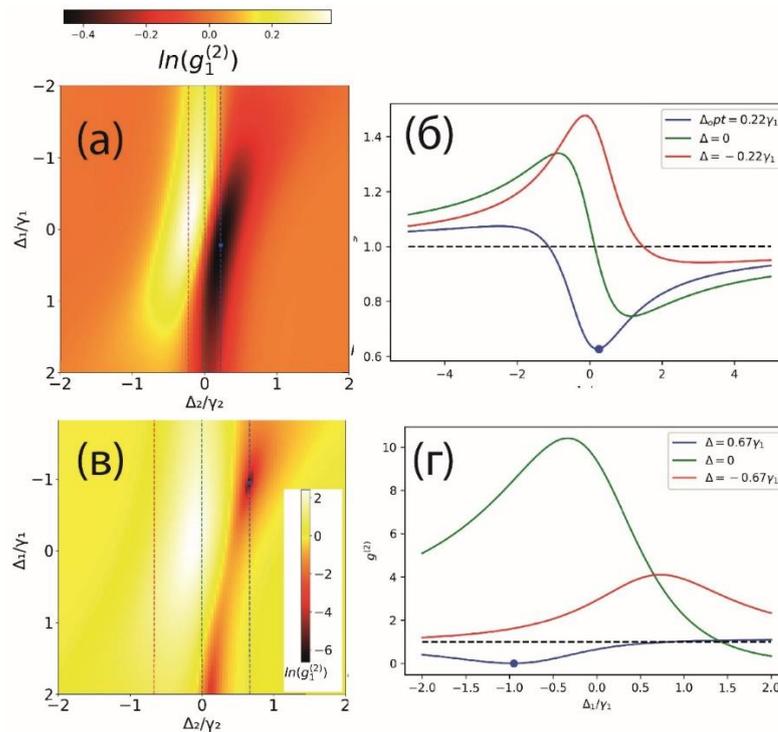


Рисунок 26 – Корреляционная функция второго порядка нижней поляритонной ветки в зависимости от отстроек Δ_1 и Δ_2 для (а-б) $U = 0.001\gamma$ и (в-г) $U = 0.01\gamma$. Цветовая линия на диаграммах (а) и (в), соответствует цветовым линиям на графиках (б) и (г), размещенных справа. Точки на графиках справа соответствуют минимальному значению $g^{(2)}$ при оптимальных параметрах и они также, являются точками слева. Проводилось, численное моделирование основного кинетического уравнения (2.77) с помощью библиотеки qutip на python.

Основными результатами этого раздела является во-первых предсказание пика корреляционной функции второго порядка для фотонной моды экситон-поляритонной системы при некотором значении интенсивности накачки в бистабильной области, что согласуется с экспериментальными результатами [41]. Во-вторых предсказание эффекта антигруппировки фотонной моды возле тройного резонанса. В третьих, предсказано проявление эффекта антигруппировки фотонной моды при сильной накачки $E_d \gg \gamma$ с существенным значением параметра Манделя, отражающим факт достаточно большого значения среднего числа фотонов излучения при эффекте антигруппировки. В последнем разделе предсказан эффект поляритонной блокады для димерной системы микростолбцов.

ГЛАВА 3. КВАНТОВЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННОЙ СИСТЕМЕ

Для бистабильных систем характерны случайные переключения между стационарными состояниями из-за действия шума. Это негативно сказывается на работоспособность логических элементов принцип работы, которых основан на эффекте бистабильности. В этой главе предлагается использовать внутренний квантовый шум как порог действия логического элемента, при внешнем сигнале в виде классического сигнала, либо квантового. Результаты главы опубликованы в статье [83].

3.1. УПРАВЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В МОДЕЛИ КВАНТОВОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Фазовая диаграмма стационарных режимов нелинейной системы может представлять собой S-кривую (сплошная кривая на рис27а). Для нее характерны два возможных стабильных состояния при определенных внешних управляемых параметрах. Такой бистабильный режим имеет характерную ширину по области управляемых параметров и определяет ширину петли гистерезиса в эксперименте [41]. Если же в системе присутствуют шумы (как классические, так и квантовые), то ширина петли гистерезиса становится зависимой от мощности шума, появляются метастабильные состояния с характерными временными параметрами. В зависимости от времени нахождения в той или иной долине стационарных состояний, и если есть другие возможные стационарные устойчивые состояния (при тех же параметрах), то может произойти переход в эти другие состояния. Вероятность такого перехода зависит от формы потенциала, характерной для управляющих уравнений, описывающих динамику системы. Данная область на фазовой диаграмме называется метастабильной. В тоже время если потенциальная яма достаточно глубокая, то время жизни можно считать бесконечной. В зависимости от ряда условий, квантовая кривая разделяет квазиклассическую стационарную кривую на фазовой диаграмме

по-разному. Различают два основных случая, квазиadiaбатический, в этом случае кривая строго разделяет решения на две области с характерным пиком корреляционной функции второго порядка; и “квантовый” режим, когда кривая плавно проходит через всю область бистабильных решений. В этом случае наблюдаются стохастические переключения между двумя стабильными состояниями. Для первого случая, характерны области метастабильности и стабильности, см. рис 27. В квазиadiaбатическом пределе, можно установить систему (варьируя интенсивность накачки) до характерного фазового перехода (см. рис.27г), и она будет оставаться в этом состоянии бесконечно долго (пока поддерживается стационарный режим).

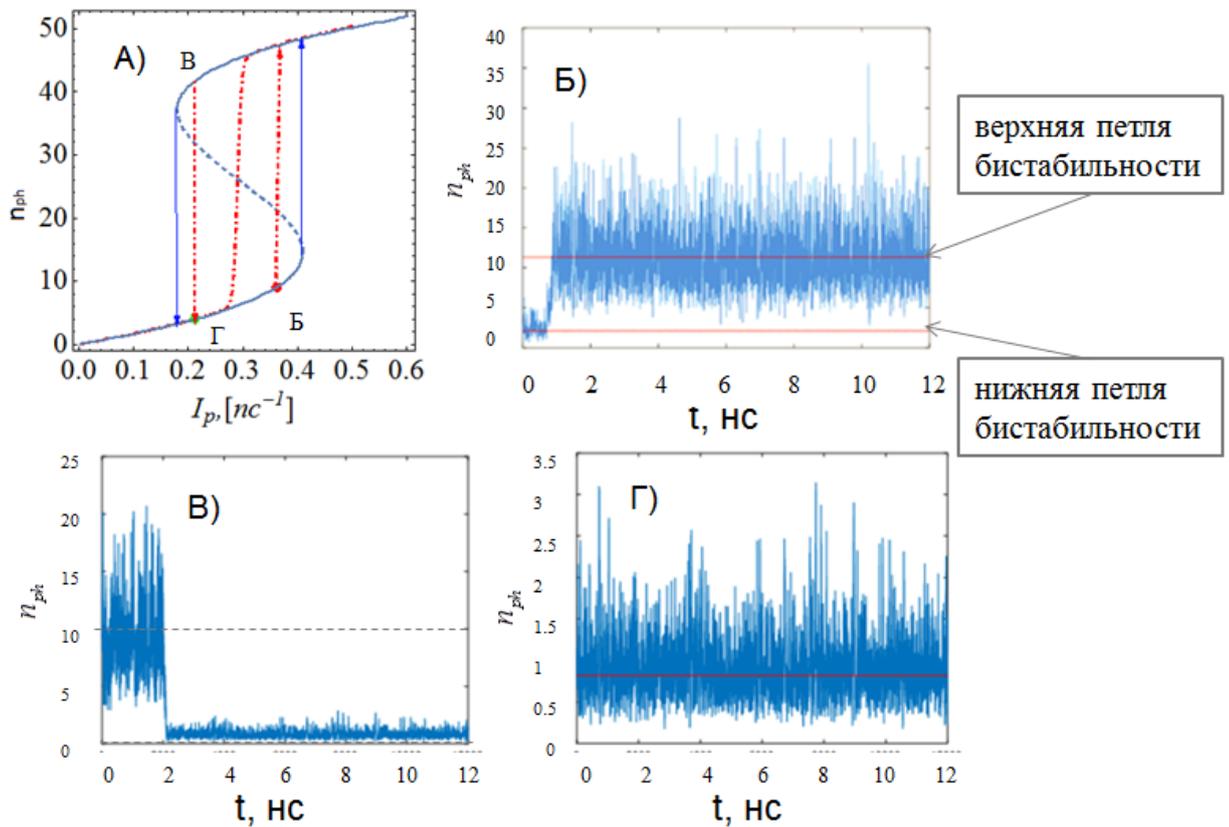


Рисунок 27 – фазовая диаграмма, сплошной кривой показано квазиклассические решения, пунктиром – квантовое решение; б) стохастическая динамика, старт с метастабильного нижнего состояния, в) метастабильного верхнего, г) стабильного нижнего.

Перейдем к описанию управляющих уравнений. Запишем стохастические дифференциальные уравнения в с-числе $\{ \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots \} \rightarrow \{ x_1, x_2, \dots \}$ в общем матричном виде:

$$d\vec{x} = -\mathbf{A}[\vec{x}]\vec{x}dt + \sqrt{\gamma}\mathbf{B}_{in}, \quad (3.1)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots)^T$, $\mathbf{B}_{in} = \mathbf{F}_{in}dt + \mathbf{D}^{1/2}[\vec{x}]/\sqrt{\gamma}d\mathbf{W}(t)$, $\mathbf{D}[\vec{x}]$ – матрица диффузии, $\mathbf{F}_{in} = (F_1, F_2, \dots)^T$ – вектор внешних полей когерентной накачки и $d\mathbf{W}(t) = (dw_1(t), dw_1^+(t), dw_2(t), dw_2^+(t), \dots)^T$ – вектор независимых случайных Винеровских процессов, удовлетворяющих, следящим корреляционным выражениям:

$$\langle dw_{1,2}(t) \rangle = 0, \langle dw_{1,2}^+(t) \rangle = 0, \langle dw_i(t)dw_j^+(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')dtdt'. \quad (3.2)$$

Элементы матрица сноса в общем виде имеют вид

$$A_{lm} = \begin{cases} (i\varepsilon_l + \gamma_l)\delta_{lm} + i\alpha_l n_l \delta_{lm} + i\sum_k g_{lk}\delta_{2k+1m}, l = 1, 3, \dots \\ (-i\varepsilon_l + \gamma_l)\delta_{lm} - i\alpha_l n_l \delta_{lm} - i\sum_k g_{lk}\delta_{l-2k-1m}, l = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

где g_{lk} элементы матрицы связи, эта матрица определяет вид схемы соединений в системе, α_l – параметр нелинейности и n_l – число частиц в l -ой системе.

И элементы матрицы диффузии

$$D_{lm} = \begin{cases} i\alpha_l x_l^2 \delta_{lm} + 2\gamma_l n_l^{th} \delta_{l+1m}, l = 1, 3, \dots \\ -i\alpha_l x_l^{*2} \delta_{lm} + 2\gamma_l n_l^{th} \delta_{l-1m}, l = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (3.4)$$

3.2. СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В СИСТЕМЕ ЭКСИТОННЫХ ПОЛЯРИТОНОВ

Квантовая стохастическая динамика в экситон-поляритонной системе описывается стохастическими дифференциальными уравнениями (3.1) с матрицей дрефта следующего вида:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (i\Delta_{ph} + \gamma_{ph}) & 0 & i\omega_R & 0 \\ 0 & (-i\Delta_{ph} + \gamma_{ph}) & 0 & -i\omega_R \\ i\omega_R & 0 & (-i\Delta_{ex} + \gamma_{ex}) + 2i\chi^+\chi & 0 \\ 0 & -i\omega_R & 0 & (i\Delta_{ex} + \gamma_{ex}) - 2i\chi^+\chi \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

где вектор накачки

$$\mathbf{F}_{in} = (F, F^*, 0, 0)^T, \quad (3.6)$$

и матрицей диффузии

$$\mathbf{D}[\chi] = \begin{pmatrix} \gamma_{LP} C_p D_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{LP} C_p D_{in}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i\alpha\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i\alpha\chi^{+2} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

где $D_{in} = D_R + iD_I$ – внешнее шумовое слагаемое с действительной и мнимой частью

$$D_R = \frac{1}{4} \sqrt{e^{-2r} \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^{2r} \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (3.8)$$

$$D_I = \frac{1}{4} \sqrt{e^{-2r} \sin^2 \frac{\theta}{2} + e^{2r} \cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

где $\xi = r e^{i\theta}$ – комплексный параметр сжатия.

Эффект стохастического резонанса в системе экситонных поляритонов, можно наблюдать в условиях бистабильности если на систему действует слабый внешний сигнал (необходимым шумом выступает внутренний квантовый шум системы, см. диффузионные члены в стохастических уравнениях 3.1). Когда мы модулируем интенсивность накачки, таким образом, что минимум лежит за границей фазового перехода, а максимум выше в области метастабильности см. 2.8, то при достаточной частоте модуляции будут происходить характерные скачки см. рис.28. Это явление называется квантовым стохастическим резонансом. И это явление проявляется, если обратное значение частоты модуляции больше времени жизни в той лагуне (потенциала), в которую попала система при модуляции.

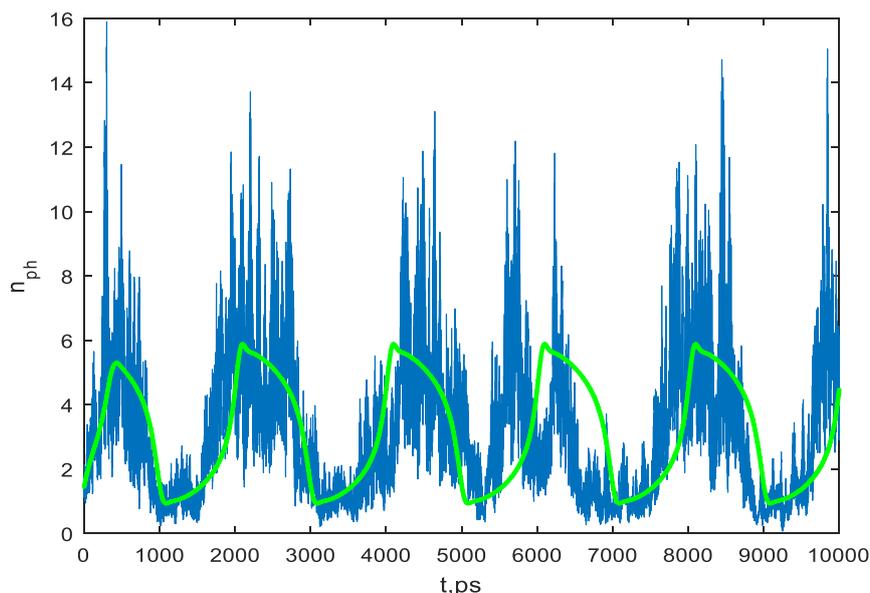


Рисунок 28 – Эффект стохастического резонанса.

Характеристикой стохастического резонанса является отношение сигнала к шуму [45] (ОСШ). В нашем случае ОСШ – это отношение интенсивности входного классического сигнала к мощности собственного квантового шума. Эта характеристика продемонстрирована на рис.29, для двух случаев: квазиadiaбатического (пунктирная кривая) и квантового (сплошная кривая). Характеристика показана в зависимости от отношения интенсивности фоновой накачки к интенсивности накачки, соответствующей, классическому порогу бистабильности.

В случае квазиadiaбатического режима, ОСШ имеет резкий переход в области квантового фазового перехода. За этим порогом, ОСШ остается примерно на одном и том же уровне при увеличении фоновой накачки. Это проявление жесткой бифуркации, в несимметричной потенциальной яме (в фазовом пространстве). Если на вход мы подаем слабый сигнал, то в квазиadiaбатическом допороговом режиме, будет наблюдаться модуляция сигнала на входе с сигналом на выходе за счет квантового стохастического резонанса [84]. В квантовом же пределе наблюдается плавный пик ОСШ характеристики, что объясняется плавным ростом соответствующей кривой корреляционная функция первого порядка. Кроме модуляции накачки, мы

можем промодулировать квантовый шум, внешними квантовыми (сжатыми по амплитуде или фазе) сигналами.

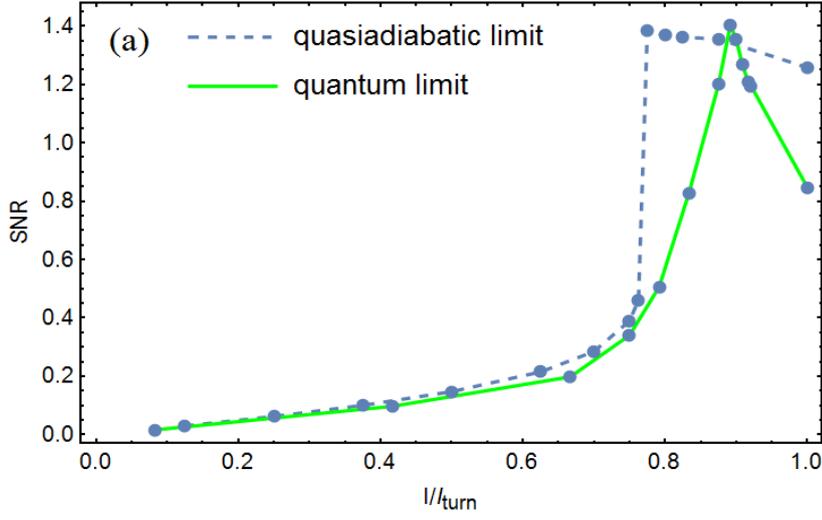


Рисунок 29 – Отношение сигнал/шум в сравнении нормированной накачкой (нормировка на величину накачки в области поворотной точки петли бистабильных стационарных решений) в квазиadiaбатическом и квантовом пределе.

3.3. ЭФФЕКТ КВАНТОВОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО КВАНТОВОГО ШУМА

Рассмотрим внешний квантовый сигнал. Опишем взаимодействие моды резонатора с фотонами сжатого сигнала с помощью эффективного гамильтониана (в приближении вращающейся волны) [85]:

$$H_{\text{squeezed-pump}} = \kappa \hat{\phi}^+ \hat{a}_{sq} + h. c. \quad (3.9)$$

Здесь операторы уничтожения (рождения) фотонов сжатого света (сигнальной моды параметрического рассеянного света), представлены в виде [32]:

$$\hat{a}_{sq} = S^+(r, \theta) \hat{a} S(r, \theta) = \cosh(r) \hat{a} - e^{i\theta} \sinh(r) \hat{a}^+, \quad (3.10a)$$

$$\hat{a}_{sq}^+ = S^+(r, \theta) \hat{a}^+ S(r, \theta) = \cosh(r) \hat{a}^+ - e^{-i\theta} \sinh(r) \hat{a} \quad (3.10b)$$

Выражения (3.10) получены с помощью оператора сжатия (в модели обычного нелинейного $\chi^{(2)}$ параметрического осциллятора) [32]:

$$S(r, \theta) = \exp\left(\frac{1}{2} \xi^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2} \xi \hat{a}^{+2}\right) \quad (3.11)$$

где $\xi = r e^{i\theta}$ – комплексный параметр сжатия.

Источником сжатых фотонов могут служить квантовые нелинейные системы (например, кристалл с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$ – параметрическим рассеянный свет на кристалле). В квантовых стохастических уравнениях это будет отражаться дополнительным квантовым шумом с комплексной аддитивной (постоянной) диффузией:

$$F_{total} = F_p + F_s + D_{ext}\xi(t). \quad (3.12)$$



Рисунок 30 – Схема поляритонного квантового логического управляемого элемента “И”.

Здесь мы добавили внешний квантовый шум к естественному шуму рассматриваемой квантовой системы. Это можно представить в квантовом фазовом пространстве, как добавление случайного процесса со сложными комплексными диффузионными компонентами [86]:

$$D_R = \frac{1}{4}e^{-2r}, D_I = \frac{1}{4}e^{2r}, D_{ext} = D_R + iD_I. \quad (3.13)$$

где r сжатие по амплитуде.

Тогда полную диффузию в (3.12) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{D}'(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_{ext}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_{in}(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

где $\mathbf{D}_{in} = (D_{in}, D_{in}^*, 0, 0)^T$.

При этом диффузии следует складывать как вектора в расширенном (восьми-мерном) фазовом пространстве. Будем модулировать основной фон (лазерную накачку) сжатым сигналом на входе. При определенном значении параметра сжатия (по амплитуде) происходит скачок в верхнее состояние на стационарной кривой, Рис.31а. Это вызвано смещением вектора диффузии, что смещает квантовый порог (по интенсивности фоновой накачки), в рассмотренном на рис.31 случае, уменьшая его значение (сдвигая лева по

интенсивности накачки). Следует отметить, что эффект переключения наблюдается и в случае сжатого вакуума (когда интенсивность $I_s = 0$) – см. красная штрихпунктирная кривая на рис. 31б. Кроме того, такое переключение наблюдается, если мы фиксируем амплитуду сжатия, но управляем сжатием по фазе, см. Рис.31б.

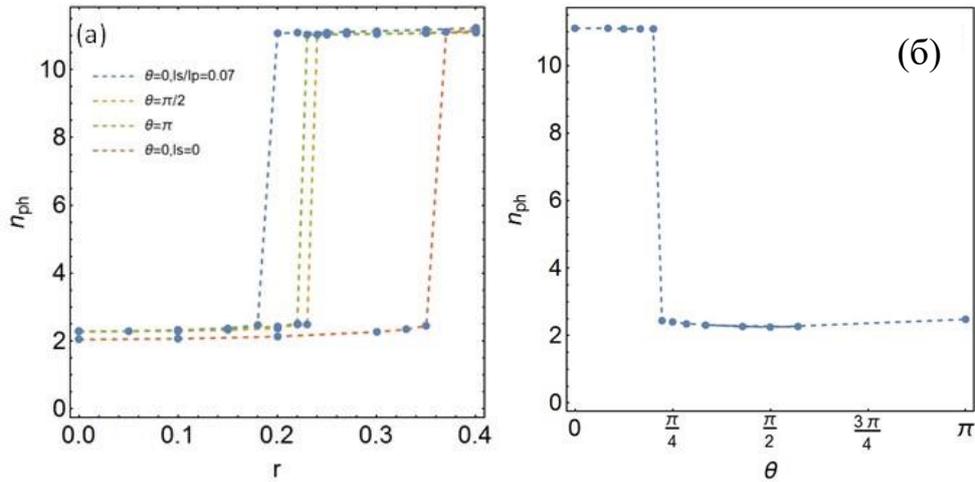


Рисунок 31 – (а) Квантовый фазовый переход под действием сжатого внешнего сигнала; (б) квантовый фазовый переход под действием сжатого вакуума ($I_s=0$) при $r=0.37$.

Регулируя внешним квантовым (сжатым) сигналом квантовый порог, можно управлять квантовым стохастическим резонансом.

3.4. КВАНТОВЫЙ ПОЛЯРИТОННЫЙ ТРИГГЕР

Как известно, шумы затрудняют работу логических элементов, работающих на эффекте бистабильности, здесь мы предлагаем использовать шумы (квантовые) как переключатель для режима стохастического резонанса. Рассмотрена модель поляритонного логического элемента, работающего одновременно как с классическими, так и с квантовыми сигналами, за счет управления квантовым стохастическим резонансом определенным образом сжатым сигналом, см. Рис.31б.

Логические базовые элементы “И” и “НЕ” на основе классического эффекта бистабильности экситон-поляритонной системы были предложены в работе [42]. Влияние шумов (как квантовых, так и тепловых) существенно ограничивают работу подобных устройств.

При рассмотрении влияния квантового шума на стохастический резонанс в поляритонной бистабильной системе (см. предыдущий раздел), выяснилась принципиальная возможность с помощью шумов внешнего сжатого квантового светового сигнала (с определенной степенью сжатия по фазе и/или числу фотонов) производить смещение квантового порога в квазиadiaбатическом режиме, в ту или иную сторону. Это позволяет использовать логический квантовый сигнал как затвор. Принцип работы подобного логического элемента показан на рис.31б с соответствующей алгеброй, представленной ниже в табл. 1.

В поляритонном логическом базовом элементе – управляемом “И” (control “AND”), контролирующим каналом является сжатый свет, а в качестве сигналов в управляемом канале выступает слабый классический когерентный сигнал на частоте лазерной накачки (промодулированный с фоновой накачкой). Устройство при этом работает в режиме управляемого квантового стохастического резонанса. Квантовый сигнал с некоторой степенью сжатия по фазе (параметр θ) и/или амплитуде (параметр r). При определенном значении этого параметра сжатия, происходит скачок в верхнее бистабильное состояние. Квантовый шум внешнего сжатого сигнала, сдвигает квантовый порог (влево по интенсивности накачки). Переключения можно осуществлять как управлением сжатием по амплитуде, так и по фазе. Управляющими же параметрами будут значения сжатия по амплитуде r и/или по фазе θ .

Принцип действия логических элементов

Мы определяем физическую основу логики элемента “И” следующим образом:

Логической «1» в управляющем квантовом канале является такая область параметров сжатия квантовых состояний входного оптического сигнала, при которой произойдет переключение из одного бистабильного состояния в другое, с соответствующим квантовым скачком интенсивности нелинейного отклика устройства с условием того, что на вход устройства подается классический сигнал с такой интенсивностью, которая соответствует

логической единице. Без этого сигнала или с его интенсивностью меньшей, чем пороговая интенсивность, переключения не происходит. Физической основой является смещение квантового порога описанного выше $I_{th} \rightarrow I_{qth}$.

С другой стороны, если на вход подается такой сигнал («1»), но управляющий канал находится в состоянии логического «0» (в закрытом состоянии, т.е. квантовый порог не смещен), то переключения также не происходят. Стоит отметить что интенсивность сигнала должна быть ниже некоторого значения. Действительно, необходимо подавать данный сигнал в состоянии логической единицы, чтобы он был ниже некоторого порогового значения, который определяется начальным состоянием системы. В противном случае при достаточной интенсивности классического сигнала мы преодолеваем квантовый порог даже при отсутствии квантового сигнала, т.е. $I_s(“1”) + I_p < I_{th}$.

Для сигнала в состоянии логического «0» для любого шума в квантовом канале система не может преодолеть потенциальный барьер (т.е. мощности шума недостаточно для преодоления квантового порога), и система остается в изначальном состоянии. Для этого необходимо чтобы $I_p < I_{qth}$.

Если же квантовый канал открыт (т.е. квантовый порог сдвинут), то система будет реагировать на входной сигнал в режиме квантового стохастического резонанса, т.е. при входном сигнале «0» на выходе будет «0», а при «1» во входном канале будет и на выходе «1» (см. табл. 1). Таким образом, произойдет квантовый скачок; при этом входной сигнал может быть как дискретным (в рассматриваемом нами случае), так и аналоговым, т.е. непрерывным. Стоит отметить, что хотя это является жестким типом бифуркации, но если входной или управляющий канал возвращается в состояние «0», то и система также возвращается в свое предыдущее состояние. Таким образом, условия работы данного устройства заключаются в следующем:

– Если интенсивность входного сигнала I_s много меньше, чем фоновая накачка I_p (поддерживающий стационарный рабочий режим в нижнем

состоянии на петле бистабильности), то входной сигнал должен быть откалиброван так, чтобы $I_s + I_p < I_{th}$ и $I_s + I_p > I_{qth}$, $I_p < I_{qth}$.

– Для четкого различия между логическими переменными «0» и «1» необходимо выбрать квазиadiaбатический режим.

– Состояние системы с открытым управляющим квантовым каналом должно соответствовать работе в качестве усиливающего элемента с использованием квантового стохастического резонанса для данного типа сигналов.

Сигнал, входной канал	Контролирующий канал (внешний квантовый шум)	ВЫХОД
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Таблица 1. Таблица истинности управляющего логического элемента “И”.

Рассмотрим принцип работы другого базового логического элемента “НЕ”. В этом случае режим устройства также выбирается до квантового порога (например, в бистабильном нижнем состоянии) в квазиadiaбатическом режиме. На вход подается квантовый сжатый оптический сигнал, при этом управляющим параметром здесь также служит комплексный параметр сжатия $\xi = r e^{i\theta}$. Пусть логическим состоянием «1» будет то состояние сжатого света, когда параметр сжатия по фазе θ меньше, чем $\pi/4$ для сжатого вакуума ($I_s = 0$), а логический «0» – для сжатия по фазе больше чем $\pi/4$ (см. рис31б) или сигнал отсутствует. Для работы выбирается принцип прерывания, т.е. система непрерывно отправляет логический «0»; при этом входящие сжатые импульсы света модулируют сигнал. Если рабочая точка выбирается в верхнем

состоянии петли бистабильности, то таким же образом может быть организована логика и для этого случая.

Шум в системе можетт препятствовать работе логических элементов работающих на основе бистабильных/мультистабильных состояниях. Но учет и управление границей стабильных/метастабильных состояний внешним шумом, позволяет использовать шум в логических элементах.

ГЛАВА 4. САМОЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННОГО КОНДЕНСАТА

В этой главе рассмотрено влияние теплового нагрева квантовой ямы под действием лазера (нерезонансной накачки конденсата) на образование поляритонного БЭКа. тепловое расширение кристаллической структуры квантовой ямы приводит к локальному изменению ширины запрещенной зоны полупроводника (GaAs), что ведет к образованию эффективной потенциальной ямы, приводящий к возникновению локализованных устойчивых солитонных структур в микропроводе (1D-объект). Результаты работы опубликованы в статье [87].

4.1. УПРАВЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ НА ПОЛЯРИТОННЫЙ КОНДЕНСАТ В СЛУЧАЕ НАГРЕВА РЕШЕТКИ КВАНТОВОЙ ЯМЫ

Ширина запрещенной зоны полупроводников уменьшается с увеличением температуры. Это можно понять исходя из того, что межатомное расстояние увеличивается с увеличением амплитуды колебаний атомов при тепловом нагреве. Этот эффект количественно определяется коэффициентом линейного расширения материала. С ростом температуры увеличивается энергия электронов в валентной зоне, что увеличивает вероятность теплового заброса (электрон-фононный эффект) с валентной зоны в зону проводимости тем самым возрастает уровень потолка валентной зоны и уровня Ферми в валентной зоне, это приводит к уменьшению ширины запрещенной зоны. Механическая модуляция межатомного расстояния, например, путем приложения, высокого сжимающего (растягивающего) напряжения, также вызывает увеличение (уменьшение) запрещенной зоны. Температурная зависимость энергетической ширины запрещенной зоны была определена экспериментально, получив следующее выражение для E_g как функции температуры T [88]:

$$E_g(T) = E_g(0) - \frac{\alpha T^2}{T + \beta}, \quad (4.1)$$

где $E_g(0)$, α и β эмпирические параметры.

Образование устойчивого солитонного решения в микропроводе за счет механизма самолокализации поляритонного конденсата по типу поляритонного механизма. Конструкция микропровода как 1D объекта, показана на рис.32. Верхнее Брэгговское зеркало частично вытравлено, образуя провод. Когерентный лазерный пучок падает под углом вдоль оси x, создавая поляритонный волновой пакет с контролируемым значением квазиимпульса k.

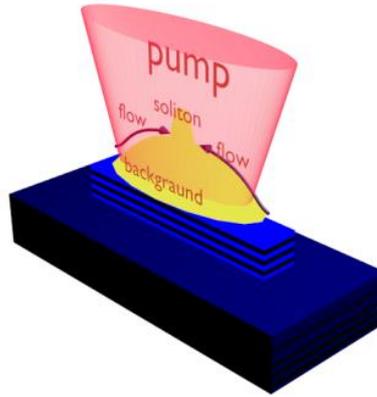


Рисунок 32 – схема образования поляритонного солитона.

Запишем дифференциальное уравнение на волновую функцию конденсата ψ_{LP} , в квазиклассическом пределе – уравнение типа Гросс-Питаевского:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{LP}}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_{LP}} + \hbar g_C |\psi_{LP}|^2 + \hbar g_R n_R + \frac{i\hbar}{2} (R n_R - \gamma_C) \right] \psi_{LP}, \quad (4.2a)$$

где g_C – коэффициент кубической нелинейности поляритонной моды, обуславливает отталкивающее взаимодействие поляритонов; g_R – коэффициент взаимодействия конденсата и резервуара горячих экситонов; γ_C – коэффициент потерь поляритонов; R – коэффициент рассеивание горячих экситонов на конденсате.

И уравнение число горячих некогерентных экситонов n_R , которая связана с уравнением на конденсат и в которую входит внешняя накачка:

$$\frac{\partial n_R}{\partial t} = P(x) - \gamma_R n_R - R n_R |\psi_{LP}|^2, \quad (4.2b)$$

где P – величина накачки; γ_R – коэффициент диссипации горячих экситонов.

Отметим, что в пределе $\gamma_R \gg \gamma_C$, можно адиабатически исключить динамическое уравнение на резервуар и использовать на него стационарное выражение

$$n_R = \frac{P}{\gamma_R + R|\psi|^2}. \quad (4.3)$$

Интенсивное рассеивание горячих экситонов на фононы (акустические) вызывает, нагрев решетки квантовой ямы. Тепловой нагрев играет отрицательную роль, вызывая эффекты квантовой декогеренции и дополнительной неустойчивости поляритонного конденсата. Но тепло, выделяемое при конденсации, может также играть и положительную роль, помогая локализовать поляритонные конденсаты в плоскости полости. Температурный градиент, возникающий в решетке с квантовой ямой при нерезонансной накачке резервуара горячих экситонов, вызывает перенормировку запрещенной зоны полупроводника, что приводит к снижению энергии экситона и, таким образом, способствует локализации поляритонов.

Действительно, при распространении тепловой волны по кристаллической решетке квантовой ямой, происходит тепловое расширение кристалла, что ведет к локальным изменениям ширины запрещенной зоны полупроводника. В этом случае экситоны эффективно взаимодействуют с упруго-деформированной решеткой (из-за её нагрева), т.е. движутся в температурном потенциале, создаваемом самой решеткой. Тогда уравнение для поляритонов будет являться диссипативным уравнением Гросса-Питаевского (которое переходит в уравнение Гинзбурга-Ландау) с усилением от резервуара горячих экситонов, описываемом некоторым нелинейным тепловым вкладом $\alpha(T, |\psi|^2)$, зависящим от плотности конденсата, где T – температура.

В этом случае, рассмотрим связанные уравнения для поля поляритонного конденсата и населенности резервуара горячих экситонов:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_{LP}} + \hbar g_c |\psi|^2 + \hbar g_R n + \frac{i\hbar}{2} (Rn - \gamma_c) + \alpha(T, |\psi|^2) \right] \psi, \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P(x, y) - \gamma_R n - Rn |\psi|^2. \quad (4.4b)$$

здесь m_{LP} – эффективная масса поляритона, $\hbar g_c$ – энергия поляритон-поляритонного отталкивания (кубическая нелинейность), в то время как $\hbar g_R$ описывает отталкивание между конденсатными поляритонами и экситонами горячего резервуара.

Значения g_r и g_c представляют собой скорости распада конденсата и резервуара горячих экситонов, которые уравниваются некогерентной накачкой P в стационарном режиме. Распад горячих экситонов в конденсат происходит со скоростью R . В уравнении (4.4б) функция $P(x)$ является, по сути, скоростью образования горячих экситонов; она определяется профилем накачки. Мы рассматриваем непрерывную нерезонансную лазерную накачку с супер-Гауссовой формой пучка

$$P = P_0 e^{-(x/d)^w}, \quad (4.5)$$

где d – ширина пучка и w – это порядок супер-Гауссового пучка, x – координата.

Последний член в (4.4а) учитывает тепловой нагрев решетки (зависимость от градиента теплового поля) из-за рассеивания горячих экситонов на резервуаре, что обуславливает сдвиг нижней поляритонной ветки. Эффект теплового воздействия основан на изменении ширины запрещенной зоны материала (полупроводника) для квантовой ямы. Уравнение теплового потока типа Джеффриса-Каттанео может быть выражено следующим образом [89]:

$$\tau_H \frac{dQ}{dt} + Q = -\zeta \nabla T, \quad (4.6)$$

где τ_n – время тепловой релаксации (порядка нескольких пикосекунд), ζ – теплопроводность среды, Q – тепловой поток.

Когда $\tau_n = 0$, уравнение (4.7) сводится к закону Фурье и, если приращение внутренней энергии пропорциональна приращению температуры $dE = CdT$ (где C – теплоемкость решетки), как для твердого тела, то уравнение теплового баланса имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = -divQ + Q_{ext}, \quad (4.7)$$

где Q_{ext} характеризует взаимодействия с полем поляритонного конденсата и экситонами, определим ее как

$$Q_{ext} = \mu n |\psi|^2. \quad (4.8)$$

Температура тела является термодинамической величиной отражающей статистические средние микроскопических величин характеризующей движения, колебания атомов в газе, колебаний решетки в твердом теле. Тепло переносится возбуждением ближайшего соседа, с изменением импульса и энергии в микроскопических масштабах и распространяются в виде волн. Из (4.8) уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \nabla^2 T + \kappa n |\psi|^2, \quad (4.9)$$

где $c = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau_n}}$ – скорость тепловой волны. В (4.9) мы ввели температуропроводность $\kappa = \frac{\xi}{c}$.

В итоге мы имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, состоящих из 3-х дифференциальных уравнений (4.4а), (4.4б) и (4.9). Для анализа таких уравнений сделаем ряд упрощений.

В работе [53], было обнаружено, что скорость распространения тепловой волны меньше скорости поляритонного конденсата. Тогда в стационарном случае ($\tau \rightarrow \infty$) получаем уравнение Пуассона:

$$c^2 \nabla^2 T = -\kappa n |\psi|^2. \quad (4.10)$$

Мы предполагаем нагрев мгновенным и локальным, так как диффузионный перенос тепла происходит намного медленнее (нано и

микросекунды) чем динамика поляритонного конденсата, тогда приращение температуры определяется следующим образом,

$$\delta T = \beta R n |\psi|^2, \quad (4.11)$$

где β – феноменологический коэффициент, зависящий от теплофизических свойств квантовой ямы.

В уравнении (4.11) величина $\alpha(T, |\psi|^2)$ с одной стороны определяет тепловое воздействие на систему, с другой стороны, является красным смещением нижней поляритонной ветке, поэтому

$$\alpha(\delta T) = \Delta E_{pol} = E_{LP}(T) - E_{LP}(0) \approx \Delta E_X |C_X|^2, \quad (4.12)$$

здесь $T = T_0 + \delta T$ – температура решетки; T_0 – температура решетки без конденсата и ΔT -локальное изменение температуры.

Разложим в ряд Тейлора выражение для ширины запрещенной зоны (4.12) и учтя тот факт что энергия экситона равна ширине запрещенной зоны, получаем

$$\hbar\omega_{ex}(\delta T) = \bar{E}_{ex}(T) - 2\alpha_0 T_0 \delta T - \alpha_0 \delta T^2, \quad (4.13)$$

где $\bar{E}_{ex} = \hbar\omega_{ex}(0) - \frac{bT_0^2}{a}$ и a, b – эмпирические параметры.

Изменение экситонной энергии можно легко получить из (4.13)

$$\Delta E_X = -2\alpha_0 T_0 \delta T - \alpha_0 \delta T^2, \quad (4.14)$$

Из (4.12) и (4.14) получаем термическую поправку к уравнению Гинзбурга-Ландау

$$\alpha(\delta T) = -2\tilde{\alpha}_0 T_0 \delta T - \tilde{\alpha}_0 \delta T^2, \quad (4.15)$$

где $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 |C_X|^2 \approx \alpha_0$.

С учетом (4.11) получаем

$$\alpha(\delta T) = -\beta_1 n |\psi|^2 - \beta_2 n^2 |\psi|^4, \quad (4.16)$$

где были введены следующие обозначения: $\beta_1 = 2\tilde{\alpha}_0 \beta R$ и $\beta_2 = \tilde{\alpha}_0 \beta^2 R^2$.

Для известного полупроводникового материала GaAs в работе были взяты такое значение: $\alpha_0 = 1,325 \times 10^{-3}$ мэВ/К⁻² [88]. Знак минус в уравнении (4.16) соответствует эффективному притяжению между

поляритонами. Это обстоятельство существенно влияет на спектральную и пространственную структуру конденсата.

С учетом тепловых поправок уравнение Гинзбурга-Ландау (4.4а) принимает следующий вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_{LP}} + \hbar g_c |\psi|^2 + \hbar g_R n + \frac{i\hbar}{2} (Rn - \gamma_c) - \beta_1 n |\psi|^2 - \beta_2 n^2 |\psi|^4 \right] \psi, \quad (4.17)$$

Тепловой эффект проявляется в нелинейностях высших порядков и при образовании эффективной потенциальной ямы в системе, т.е. отвечает за силы, удерживающие конденсат, в то время как нелинейность g_c разрушает его.

Рассмотрим образование поляритонного конденсата в одномерном (1D) случае, $\nabla^2 \rightarrow \partial_{xx}$ (для микропровода). Тогда происходит самолокализация поляритонного конденсата, но без необходимости использования накачки специального типа (или ловушек для его удержания).

В одномерной системе координат комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау принимает вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-D \partial_{xx} + \hbar g_c |\psi|^2 + \hbar g_R n + \frac{i\hbar}{2} (Rn - \gamma_c) - \beta_1 n |\psi|^2 - \beta_2 n^2 |\psi|^4 \right] \psi, \quad (4.18)$$

где $D = (1 + i\Gamma_e) \frac{\hbar^2}{2m_{LP}}$, Γ_e – малое значение параметра, учитывающее релаксацию конденсата [90]. Мы перенормируем скорости вынужденного рассеяния в конденсате и коэффициенты взаимодействия для одномерного случая [91]: $(R^{(1D)}, g^{(1D)}) = (R^{(2D)}, g^{(2D)}) / \sqrt{2\pi d^2}$. В случае одномерного микропровода, ширина профиля d будет порядка входного Гауссова импульса, в данной работе было взято значение $d=240$ мкм.

4.2. СТАЦИОНАРНОЕ ОДНОРОДНОЕ РЕШЕНИЕ

Изучим однородное стационарное решение системы уравнений (4.46) и (4.18) и обсудим её устойчивость. Рассмотрим случай, однородной стационарной накачки, используя следующий анзац [92]:

$$\psi(x, t) = \phi e^{ik_0 x - i\mu t/\hbar}, \quad (4.19)$$

$$n(x, t) = n_0. \quad (4.20)$$

Используя анзац (4.19-4.20) и подставляя его в уравнение Гинзбурга-Ландау (4.18), получаем обыкновенное одномерное дифференциальное уравнение на профиль стационарного состояния поляритонного поля:

$$D\partial_{xx}\phi = -\mu\phi + \tilde{g}_c(n)|\phi|^2 + g_R n - \tilde{g}_c'(n)|\phi|^4 + \frac{i\hbar}{2}(Rn - \gamma_c)\phi \quad (4.21)$$

При слабой однородной накачке P , конденсат отсутствует $\psi=0$, и плотность экситонов является линейной функцией $n_h = \frac{P}{\gamma_R}$. Это решение является динамически стабильным до тех пор, пока скорость рассеивание экситонов на конденсат R , не способна преодолеть потери в конденсате γ_c , то есть $R(n_0) < \gamma_c$. Порог накачки $P=P_{th}$ при которой наступает детальное равновесие между скоростью притока и оттока энергии $R(n_0)=\gamma_c$ в конденсате, соответствует значению $P_{th} = \frac{\gamma_c \gamma_R}{R}$. Когда накачка становится больше этого значения, однородное решение становится не устойчивым и возникает конденсат. Значение P_{th} является порогом образования поляритонного БЭКа. При этом плотность горячих экситонов фиксируется на значении $n_h \equiv n_0 = \frac{\gamma_c}{R}$, а плотность конденсата определяется из связи между резервуаром и конденсатом дается выражением (4.3).

Плотность однородного конденсата становится линейной функцией от накачки $|\psi_h|^2 = \frac{(P - P_{th})}{\gamma_c}$ и частота осцилляции (химический потенциал) макроскопической волновой функции конденсата зависит от плотности числа частиц конденсата:

$$\mu_h = k_0^2 + \hbar g_c |\psi_h|^2 + \hbar g_R n_h, \quad (4.22)$$

где k_0 – волновое число набегающей волны. При этом минимальное значение химического потенциала

$$\mu_h^{\min} = \hbar g_c |\psi_h|^2 + \hbar g_R n_h, \quad (4.23)$$

С учетом тепловых эффектов частота конденсата становится нелинейной функцией от накачки:

$$\mu_h(k) = k_0^2 + \frac{(P - P_{th})}{\gamma_c} \left(g_c - \frac{\gamma_c}{R} \beta_1 \right) + \frac{g_R \gamma_c}{R} - \beta_2 \frac{(P - P_{th})^2}{R^2} \quad (4.24)$$

Тогда становится ясно, что необходимым условием существования токовых солитонов является то, что кинетическая энергия намного меньше, чем нелинейная энергия волны. В случае однородного стационарного устойчивого решения (4.19) кинетическая энергия конденсата равна нулю $k_0 = 0$.

Перепишем уравнение (4.25) для стационарного состояния (при неоднородной Гауссовой накачки) в полярных координатах с использованием преобразования Маделунга [92]:

$$\psi = \sqrt{\rho(x)} e^{i\varphi(x) - i\mu t} \quad (4.25)$$

Здесь μ – химический потенциал конденсата и $\varphi(x)$ – относительная фаза поляритонного конденсата, характеризующая максимальное число частиц во время бозонной стимуляции при образовании поляритонного конденсата [91,93].

Из (4.22) и (4.26) получаем следующую систему уравнений на фазу и плотность конденсата:

$$\partial_x j = (Rn - \gamma_c) \rho, \quad (4.26)$$

$$\sqrt{\rho} \hbar \mu = \left[D \partial_{xx} + m_{LP} \frac{j^2}{\rho^2} + V(x) \right] \sqrt{\rho}, \quad (4.27)$$

Скорость потока вероятности, как известно, характеризуется током,

$$j = \frac{i\hbar}{2m_{LP}} (\psi \partial_x \psi^* - \psi^* \partial_x \psi). \quad (4.28)$$

Здесь мы ввели поляритонный ток $j = \frac{\hbar}{m_{LP}} \rho \partial_x \varphi$, и эффективный

потенциал

$$V(x) = \hbar g_R n + \hbar g_C \rho + \alpha(\delta T) \equiv \hbar g_R n + \tilde{g}_C \rho + \tilde{g}'_C \rho^2, \quad (4.29)$$

где также мы ввели перенормированные эффективные нелинейности:

$$\tilde{g}_C = \hbar g_C - \beta_1 n \text{ и } \tilde{g}'_C = -\beta_2 n^2.$$

4.3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНОГО РЕШЕНИЯ

Для анализа устойчивости однородного конденсата применим подход Боголюбова [94] и возмущаем однородные стационарные решения малыми флуктуациями $\delta\psi, \delta\psi^*$ и δn . Методом линеаризации, около стационарных решений (4.19), из уравнений (4.4) и (4.18) получаем линейную систему алгебраических уравнений, спектр собственных значений которых даст информацию об её устойчивости. Возмущения конденсата можно разложить по их Фурье компонентам (анализ устойчивости на основе возмущений плоскими волнами Бенджамина-Фейровского [95]):

$$\psi(x, t) = \left(\psi_h + \sum_q \delta\psi e^{\lambda t + i q x} + \text{к.с.} \right) e^{-i\mu t + i k_0 x} \quad (4.30)$$

$$n_R(t) = n_h + \left(\delta n e^{\lambda t + i q x} + \text{к.с.} \right), \quad (4.31)$$

Вектор возмущения $u^T = (\delta\psi, \delta\psi^*, \delta n)$ и q – квазиволновой вектор возмущения плоской волны.

Собственные значения линеаризованной системы называются Ляпуновскими характеристическими показателями [96], если хотя бы один из них больше нуля, то система не устойчива. Анализ устойчивости однородных решений сводится к анализу собственных значений линеаризованной системы уравнений (4.4) и (4.18) [97]:

$$\|L_q - \lambda E\| = 0, \quad (4.32)$$

где E – единичная матрицы, а Якобиан имеет вид:

J

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma_e}{\hbar}q^2 - i\Omega(P) - i\frac{\hbar}{2m}q^2 & -i\Omega(P) & \frac{R}{2}\sqrt{\frac{(P-P_{th})}{\gamma_c}} - i\theta(P) \\ i\Omega(P) & -\frac{\Gamma_e}{\hbar}q^2 + i\Omega(P) + i\frac{\hbar}{2m}q^2 & \frac{R}{2}\sqrt{\frac{(P-P_{th})}{\gamma_c}} + i\theta(P) \\ -\sqrt{\gamma_c(P-P_{th})} & -\sqrt{\gamma_c(P-P_{th})} & -\frac{RP}{\gamma_c} \end{pmatrix},$$

(4.33)

где мы ввели следующие обозначения: $\Omega = \frac{(P-P_{th})}{\hbar} \left(\frac{g_c}{\gamma_c} - \frac{1}{R} \left(\beta_1 + 2\frac{\beta_2}{R}(P-P_{th}) \right) \right)$,

$$\theta(P) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{(P-P_{th})}{\gamma_c}} \left(g_R - \frac{(P-P_{th})}{\gamma_c} \left(\beta_1 + 2\beta_2 \frac{(P-P_{th})}{R} \right) \right).$$

Характеристический полином на Ляпуновский показатель λ является алгебраическим кубическим уравнением,

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (4.34)$$

Здесь были введены следующие обозначение коэффициентов:

$$A = \frac{RP}{\gamma_c} + \frac{2\Gamma_e q^2}{\hbar}, \quad B = 2\frac{R}{\gamma_c} P \frac{\Gamma_e}{\hbar} q^2 + R(P-P_{th}) + q^4 \frac{\Gamma_e^2}{\hbar^2} + \frac{\hbar^2}{4m^2} q^4 + \frac{\hbar}{m} q^2 \Omega(P),$$

$$C = P \frac{R}{\gamma_c} \left(q^4 \frac{\Gamma_e^2}{\hbar^2} + \frac{\hbar^2}{4m^2} q^4 + \frac{\hbar}{m} q^2 \Omega \right) + \frac{q^2 \Gamma_e R}{\hbar} (P-P_{th}) - \frac{\hbar}{m} \theta \sqrt{\gamma_c (P-P_{th})} q^2.$$

Разделим λ на действительную и мнимую части $\lambda = \lambda_R + i\lambda_i$ и определим границу устойчивости из условия $\lambda_R = 0$ получаем систему:

$$\begin{cases} \lambda_i (\lambda_i^2 - B) = 0, \\ \lambda_i = \frac{C}{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0, \\ C = AB. \end{cases} \quad (4.35)$$

Из первого условия получаем первую границу потери устойчивости однородного решения (см. рисунок)

$$P_1 = \gamma_c^2 \frac{g_R - \frac{\Gamma_e R m}{\hbar} - 2\beta_2 P_{th}^2 / (\gamma_c R) + P_{th} \beta_1 / \gamma_c}{\left(R g_c - 2\beta_2 \frac{\gamma_c}{R} \right)} \quad (4.36)$$

В отсутствии тепловых эффектов этот порог ниже:

$$P_1 = \frac{\gamma_C g_R}{\gamma_R g_C} P_{th}. \quad (4.37)$$

А вторая граница характеризует потерю устойчивости на моды с большим квазиволновым числом q ,

$$P_2 = \gamma_C^2 \frac{g_R - \Gamma_e R m / \hbar - 2\beta_2 P_{th}^2 / (\gamma_C R) + P_{th} \beta_1 / \gamma_C}{\left(R g_C - 2\beta_2 \frac{\gamma_C}{R} \right)} \quad (4.38)$$

Для анализа устойчивости и моделирования динамики, были взяты следующие параметры системы [87]:

$$\Gamma_e \frac{m_{LP}}{\hbar} = 5 \cdot 10^{-4}, \hbar g_C = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ мЭВ} \cdot \text{мкм}, g_R = 2g_C, \gamma_C = 0.33 \text{ пс}^{-1}, \gamma_R = 2\gamma_C, R = 0.0075 \text{ пс}^{-1}$$

На рис.33а показана диаграмма устойчивости стац диаграмма устойчивости стационарного решения с учетом термических эффектов, $\beta=0.1 \text{ К} \cdot \text{пс} \cdot \text{мкм}$.

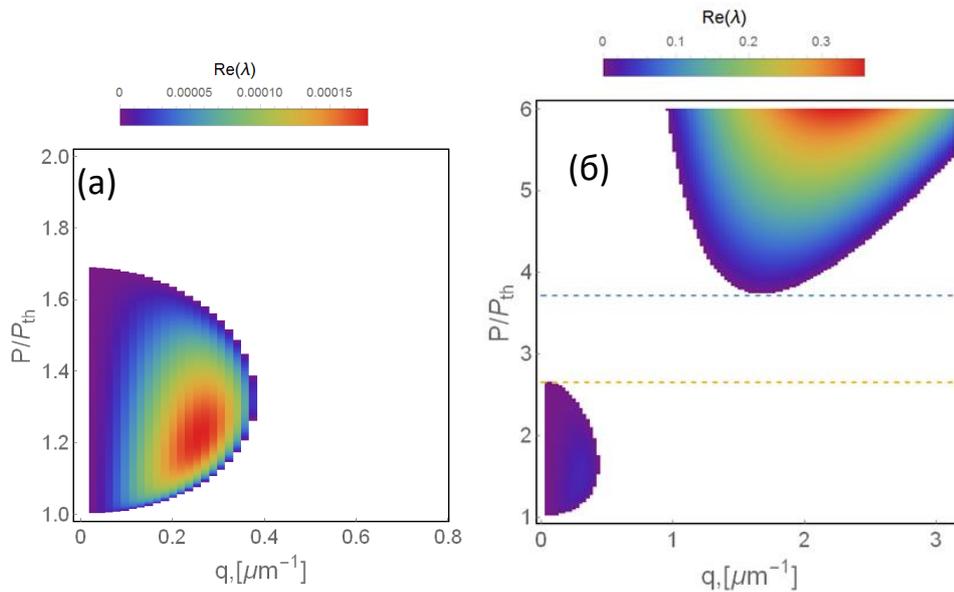


Рисунок 33 – Диаграмма устойчивости стационарного решения ионарных решений без учета термических эффектов. На рис.33б показана в случаях (а) $\beta=0$ и (б) $\beta=0.1 \text{ К} \cdot \text{пс} \cdot \text{мкм}$, закрашенная область соответствует неустойчивости такого решения (16).

Первая область до порога накачки P_1 , характеризует нестабильность основного конденсата в статическом состоянии ($k=0$) длинноволновыми возмущениями, при мощностях накачки, которая выше порогового значения P_{th} , но ниже некоторого критического значения P_1 . С учетом тепловых

эффектов эта область немного больше чем обычно (см. панели (а) и (б) на рис.33). Однородное решение (4.26) устойчиво по Ляпунову в области между P_1 и P_2 . Также стоит отметить, что с ростом β , эта область сужается, как показано штриховыми линиями на рисунке 1в, которые соответствуют порогам P_1 и P_2 . Нагрев решетки также приводит к неустойчивости, которая вызывает возбуждение состояний с большими значениями импульсов q элементарных возбуждений и происходит для всех мощностей накачки выше некоторого критического значения P_2 , что приводит к образованию не тривиальных солитонных решений. Эта область возникает в случае учета тепловых эффектов и отсутствует иначе. Стоит также отметить, что тепловые эффекты самолокализации возникают при $\beta > \beta_{cr}$ (как видно из диаграммы 1г, слева и справа область солитонных решений ограничена).

С ростом β области не устойчивости начинают сближаться и при характерном значении:

$$\beta_{th} = \frac{g_c}{2\alpha T_0 \gamma_c}, \quad (4.39)$$

они сравниваются, это означает что при этом значении эффективная нелинейность \tilde{g}_c в эффективном потенциале, становится такой, что устойчивое однородное решение исчезает.

4.4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

Численное моделирование уравнений (4.46) и (4.18) были проведены на основе метода расщепления по физическим процессам [98], который является одним из псевдоспектральных методов нахождения численного решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для временной компоненты применялась конечно-разностная схема Эйлера, а для координатной – преобразование Фурье с алгоритмами быстрого преобразования Фурье. Моделирование осуществлялось с помощью программного пакета MATLAB. Начальное условие (однородного конденсата – см. Рис.34а) выбрано в виде белого шума с супер-гауссовой накачкой –

рис.34в. Результаты вычисления приведены на рис.34, продемонстрировано образование светлого стационарного sink-солитона [99] путем сложения стоков (светлые солитоны двигающиеся от края к центру) от краев системы и дальнейшее сложение их в светлый солитон – показано на рис.35б, профиль этого солитона изображен на рис.35г.

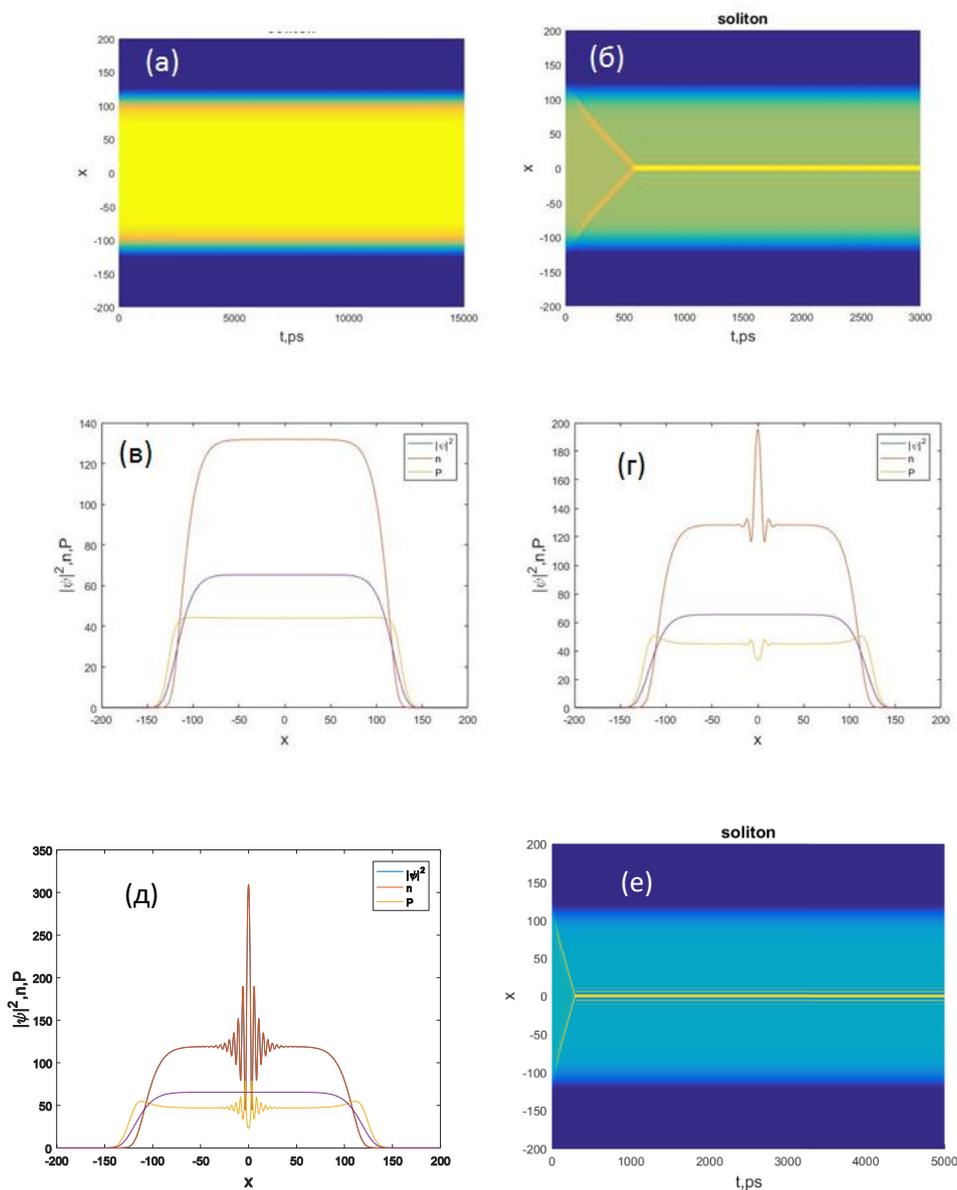


Рисунок 34 – Динамика поляритонного конденсата. а) Однородное стационарное решение при $\beta=0$. б) Самолокализация поляритонного конденсата, при образовании двух солитонных решения, при $\beta=0.1K \cdot ps \cdot \mu m$. в) Профиль однородного решения, соответствующего изображению (а). г) Профиль солитонного решения, соответствующего изображению (б).

При малых значениях параметра β и достаточно большой интенсивности накачки реализуется однородное стационарное решение, повторяющее профиль накачки. Если β достаточно велико, то наблюдается образование светлого *sink*-солитона с характерным стационарным пиком, см. Рис.34б и рис.34г. Здесь возникают два случая, когда параметры системы такие, что стационарное решение в виде $\psi(x,t) = \phi e^{ik_0 x - i\mu t/\hbar}$ устойчиво к малым возмущениям, но образуется энергетически более выгодное решение – солитонное решение, т.е. однородное решение в этом случае является метастабильным/не стабильным.

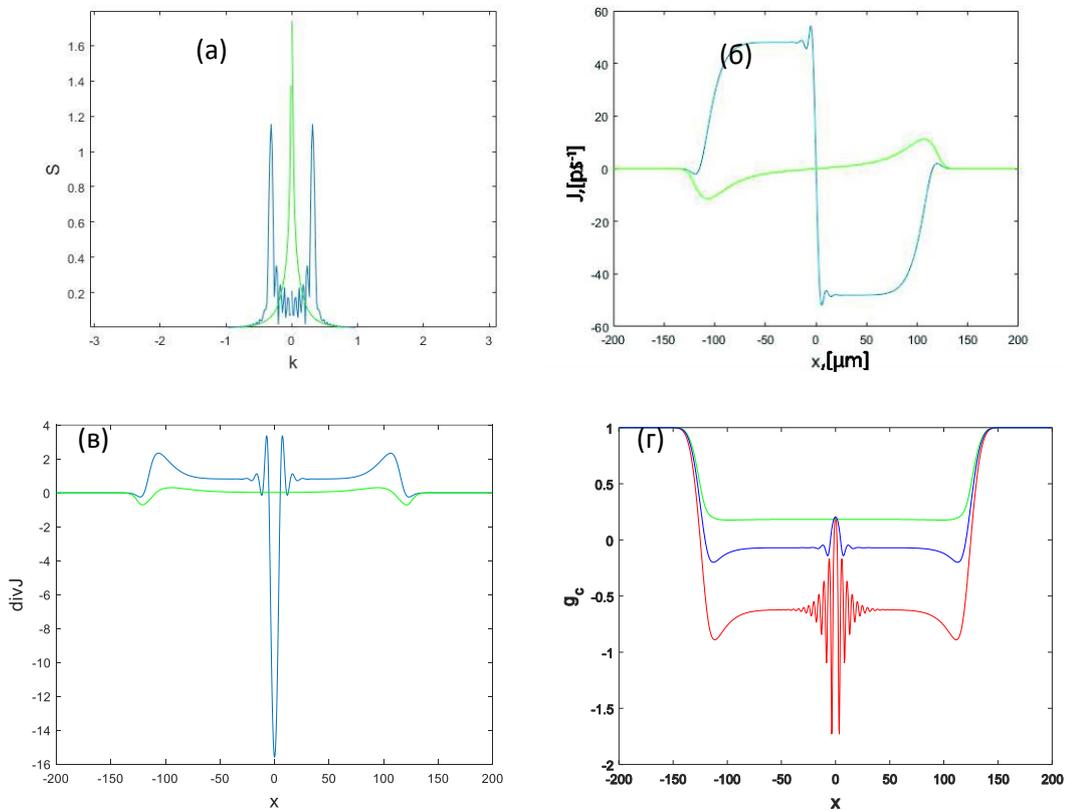


Рисунок 35 – а) Пространственные спектры, соответствующих случаям, а) и б) на рис.34 (зеленая кривая соответствует однородному решению, синяя – солитонному решению). б) Поток вероятности поляритонной «жидкости» J . в) Дивергенция в случае однородного стационарного решения (зеленая линия) и солитонного решения (синяя линия). г) Плотность конденсата в зависимости от интенсивности накачки.

Солитонное решение возникает из-за неустойчивости стационарного решения, а именно – в присутствии таких стабильных мод с ненулевым

квазиволновым числом q , на которые распадется однородное решение с $q=0$. Это аналогично спонтанному нарушению симметрии, когда основное решение обладает симметрией (в данном случае – с волновым вектором возмущения q). Пространственные спектр устойчивого решения и метастабильного решения изображены на рис.36а – отмечены зеленым и синим цветом, соответственно. Шум в системе вместе с термической перенормировкой эффективной нелинейности \tilde{g}_c приводит к образованию (по краям системы) двух светлых солитонов с волновыми числами, соответствующим значениям (k) и ($-k$), см. спектр на рис.35а.

Центры масс таких солитонов движутся к центру микропровода, и возникает ток у левой и правой границ структуры. Поток вероятности подобных солитонных режимов изображен на рис.35б: для левого солитона ток положителен и имеет определенное постоянное значение (постоянная скорость солитона), он движется с левой стороны системы к центру. Скорость правого солитона – отрицательна, так как он движется с правой стороны к центру. Когда эти солитоны сталкиваются, то они, обладая противоположными по знаку квазимпульсами, но одинаковыми амплитудой и скоростью, встречаясь в центре, интерферируют, образуя стационарный устойчивый светлый солитон. В области столкновения дивергенция тока испытывает скачок, см. Рис.35в. Образование локализованного стационарного конденсата поляритонов из двух стоковых солитонов при учете локального нагрева решетки системы (микропровода), мы интерпретируем как коллективный поляронный эффект. Речь здесь идет о полярон – квазичастице, возникающей при миграции электрона в деформируемом поле кристалла; при движении электрон поляризует/деформирует кристаллическую структуру и, тем самым, наводит поле виртуальных фононов в области локализации электрона. Поэтому взаимодействие между электроном и эффективным потенциалом фононного поля и приводит к возникновению новой квазичастицы – полярону с эффективной массой большей, чем электронная масса и зависящей от величины электрон-фононного взаимодействия.

Действительно, конденсат нагревает кристаллическую решетку микропровода, тем самым создавая эффективную потенциальную яму. Это придает импульс локализованному конденсату на границах системы и вследствие этого возникает ток, см. Рис.35б.

Химический потенциал однородного решения является квадратичной функцией от накачки, с ростом накачки она убывает, и меньше чем, если бы мы не учитывали термические эффекты. Отметим, что она убывает вплоть до области потери устойчивости однородного решения, и если там нет солитонных устойчивых решений, то возникают хаотические решения и gain-солитоны в системе. Химический потенциал неоднородного решения (соответствующая частоте конденсата), почти константа. В области параметров системы (в том числе накачки) где появляются солитонные решения, химический потенциал становится отличным от однородного случая на величину кинетической энергии $\sim k^2$, токовых солитонов. Это проявляется в пространственном спектре в виде двух пиков с квазиимпульсами k и $-k$ (импульсы токов). При этом, чем выше накачка, тем больше зазор между спектральными пиками.

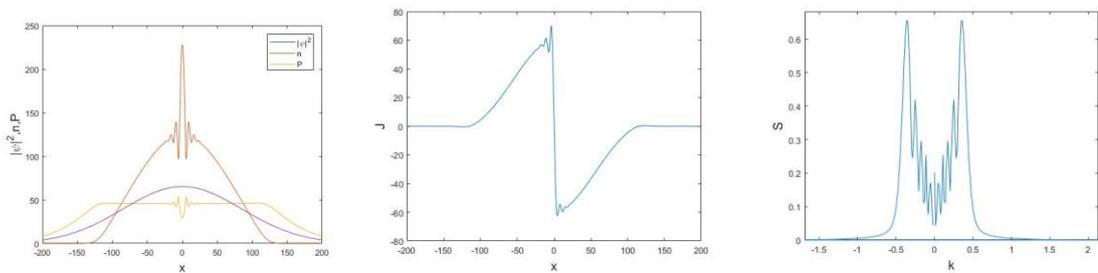


Рисунок 36 – Численное моделирование комплексного уравнения Гросс-Питаевского в случае гауссовой накачки.

При определенных параметрах системы солитоны неустойчивы к модуляционным возмущениям, формируются нестабильные хаотические турбулентные потоки (см. Рис.37б) и ветвящиеся светлые пики с неустойчивой динамикой, но с сохранением формы. Стоит отметить, что эти ветвящиеся солитонообразные структуры слипаются, рассеиваются и гаснут, и сваливаются к краю структуры, но не формируют солитон. Однако, в области

1 (см. Рис.34в) образование стационарных стабильных солитонных структур, может возникнуть не только из двух стоковых солитонов, но также он может спонтанно образовываться из хаотической динамики “дождевых” солитонов, как продемонстрировано на рис.37в.

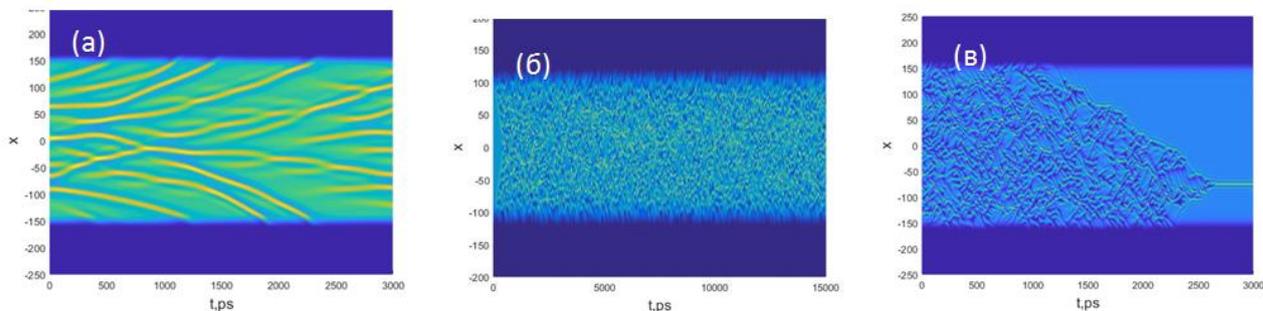


Рисунок 37 – Численное моделирование комплексного уравнения Гросс-Питоевского в случае гауссовой накачки с параметрами. Динамика поляритонного конденсата для параметров:

4.5. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ОБРАЗОВАНИЯ СВЕТЛОГО СОЛИТОНА ИЗ СТОКОВЫХ СОЛИТОНОВ

Для понимания физических процессов образования светлых солитонов из стоковых солитонов [99], обратимся к модели интерференции нелинейных волн, см. рис.38б.

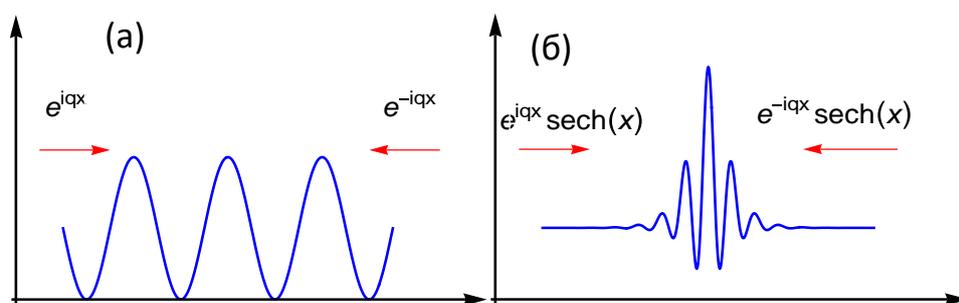


Рисунок 38 – (а) Интерференция плоских волн. (б) Интерференция нелинейных волн с образованием светлого пика.

В начале, рассмотрим взаимодействие двух плоских встречных волн e^{ikx} и e^{-ikx} . В линейном случае, когда интерферируют только две плоские волны, образуется стандартная интерференционная картина, как показано на рис.38а. В случае же интерференции двух нелинейных волн, причем с диссипацией, может возникнуть локализованный пик – светлый солитон, с проявлением

некоторых колебательных особенностей амплитуды около пика, как это показано на рис.36б. Запишем уравнение Гинзбурга-Ландау в компактной форме:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[iD' \partial_{xx} + i\tilde{g}_c |\psi|^2 + \Gamma \right] \psi, \quad (4.40)$$

где $D' = \frac{D\hbar^2}{2\hbar m_{LP}}$, $\tilde{g}_c = -g_c + \frac{\beta_1}{\hbar} n$, $\Gamma = \frac{(Rn - \gamma_c)}{2}$.

Когда одна из волн достигает области, занятой другой, возникающая интерференция приводит к затуханию волн (области провала на рис.39б). Из (4.40) ясно, что существование и устойчивость однородного стационарного состояния с $n_h > 0$ (которое в общем случае также может быть в виде плоской волны) требует положительности эффективной нелинейности $\tilde{g}_c > 0$ и условия энергетического баланса притока и оттока энергии из конденсата, а именно $\Gamma = 0$, из чего следует что при $n = n_0 = \frac{\gamma_c}{R}$, возмущение стационарного состояния с такой однородной плотностью экспоненциально затухает, что является причиной вышеупомянутого сглаживания интерференции. Любые области с плотностью выше n_0 соответствуют чистым потерям, а области с плотностью ниже n_0 – чистому усилению. Тем не менее, нетривиальные (неплоские волны) стационарные решения могут в такой системе возникнуть. Это объясняется тем, что перенормированная эффективная нелинейность \tilde{g}_c , в области между началом зарождения тока и центром, становится отрицательной, что, как известно ведёт к образованию солитонного решения (эффект самофокусировки). При этом в центре эффективная нелинейность положительная (но окруженная двумя потенциальными ямами), что приводит обычно к расталкиванию конденсата, но за счет перенормировки возникает некая эффективная потенциальная яма, при этом энергия конденсата для солитонного решения в этой области, меньше чем энергия основного состояния однородного решения. Это объясняет образование солитонных решений, возникающих при численном моделировании, в области устойчивых однородных решений.

Резюмируя можно сделать следующие выводы: если, мы пренебрегаем тепловым нагревом решетки, то наблюдается колоколообразное решение (Гауссова накачка) или однородное решение конденсата пропорциональная накачки. При этом поляритонный ток постепенно увеличивается с расстоянием от центра и уменьшается на периферии пятна конденсата. Если же мы учитываем тепловые эффекты, то мы наблюдаем появление новой нетривиальной особенности в пространственном распределении поляритонного конденсата. Наблюдутся два распространяющихся тока к центру пятна накачки. Такие токи можно интерпретировать, как два диссипативных светлых солитона распространяющихся на однородном фоне $|\psi_h|^2$. После столкновения, в результате интерференции образуется светлый солитон с осциллирующими интерференционными хвостами (см. рис.34д). Центр пика соединяет два входящих потока, такие решения были обнаружены ранее в теории комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау. Стоит также отметить, что положения пика может быть не только в центре, например, если такой солитон зарождается из “дождевых” солитонов, положение пика при этом произвольное (см. рис.37в). Скорость тока пропорциональна рассогласованию двух волновых векторов. Если баланс восстанавливается через некоторое время, ток стабилизируется в новой позиции.

Образование локализованного стационарного конденсата поляритонов из двух стоковых солитонов при учете локального нагрева решетки системы (микропровода), мы интерпретировали как коллективный поляритонный эффект. В самом деле, конденсат, нагревает решетку, тем самым создавая эффективную потенциальную яму, это придает импульс локализованному конденсату на границах системы и возникает ток.

Экспериментально наблюдалась подобные проявления, термически индуцированного самолокализованного состояния поляритонного конденсата [53], при возбуждении микрорезонатора фемтосекундными лазерными импульсами. Вместо ожидаемого диффузионного рассеивания поляритонов из

места действия лазера, в этих экспериментах наблюдался коллапс поляритонов в светлое пятно. Наблюдаемая локализация интерпретировалась как эффект образования коллективного полярона, вызванного локальным нагревом кристаллической решетки. Формирование локализованных состояний поляритонной сверхтекучести было продемонстрировано как теоретически, так и экспериментально в различных микрорезонаторных системах. Наиболее яркими примерами являются светлые и темные солитоны, которые образуются в областях отрицательной и положительной активной массы поляритона. В настоящей главе теоретически изучено образование нового типа локализованных состояний – бозонные поляроны, которые соответствуют решению типа стоковых солитонов в уравнении Гинзбурга-Ландау. Это новое топологическое состояние формируется под неоднородной нерезонансной накачкой и представляет собой светлый стоячий солитон в виде яркого пика, образованный в месте интерференции двух встречных поляритонных токов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был обнаружен эффект антигруппировки и сверхгруппировки излучения микростолбика с экситон-поляритонной системой в области около тройного резонанса при слабом излучении системы $\langle n \rangle \sim 10^{-3}$, так и при более интенсивном излучении $\langle n \rangle \sim 1$ с выраженным значением параметра Манделя. Если механизм нетрадиционной суб-Пуассоновской статистики двойных систем основан на квантовой деструктивной интерференции, то механизм предложенной в данной работе основан на подчинение квантовых флуктуаций фотонной моды экситонной, при слабой антигруппировки экситонной моды с превосходящим фотонную моду населенностью.

В одиночных микростолбиках статистика поляритонов близка к Пуассоновской. На основе механизма нетрадиционной фотонной блокады, обнаружен эффект квантовой поляритонной блокады микростолбцового димера.

Управление границей диссипативного фазового перехода внешним квантовым шумом одновременно с эффектом квантового стохастического резонанса, позволяют реализовывать логические элементы с использованием внешнего шума как переключатель в логических устройствах на основе эффекта поляритонной бистабильности.

Разработаны физические принципы модели квантового поляритонного логического элемента, работающего в квазиadiaбатическом бистабильном режиме и управляемого как классическими, так и квантовыми внешними сигналами/шумами. Эти устройства устойчивы к внешним «вредным» шумам (тепловым, дробовым и др.) и могут быть полезны для различных приложений, например, в квантовых и классических устройствах фотоники и квантовой электроники, а также для создания элементов квантовой информатики и квантовой криптографии.

Было обнаружено, что, нагрев решетки поляритонным конденсатом приводит к эффекту тепловой самолокализации поляритонного конденсата –

образования стокового солитона при нагреве лазерной накачкой решётки микрорезонатора с квантовой ямой, что эффективно меняет параметры экситон-поляритонной системы. При образовании в этой схеме с микропроводом поляритонного конденсата (БЭК) в его месте локализации наводится эффективный потенциал. Это приводит к формированию стокового солитона – локализованного устойчивого конденсата аналогично состоянию полярона, который возникает при эффективном взаимодействии поля упругой деформации решетки с электроном. Такие состояния могут быть использованы в разных приложениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ П1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Запишем основное кинетическое уравнение на матрицу плотности многомодовой квантовой (с учетом её открытой квантовой динамики) в Марковском и Борновском приближениях, с помощью введения супероператоров Линдблада (линейный гамильтониан взаимодействия резервуара с модами), в случае пренебрежения тепловыми шумами, мы можем записать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_c, \rho] + \sum_i \gamma_i (2\hat{\phi}_i \rho \hat{\phi}_i^\dagger - \rho \hat{\phi}_i^\dagger \hat{\phi}_i - \hat{\phi}_i^\dagger \hat{\phi}_i \rho), \quad (\text{П1.1})$$

где γ_i диссипация на фотонную моду.

Перейдем от линейного операторного дифференциального уравнения (П1.1) на матрицу плотности определенной в Гильбертовом пространстве, к s -числовому дифференциальному уравнению в частных производных на обобщенную P -функцию определенную на некотором квантовом фазовом пространстве. Матрица плотности можно выразить через эту функцию с помощью определенного проекционного оператора на квантовое фазовое пространство следующим образом

$$\hat{\rho} = \int d\mu(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}) \hat{\Lambda}(\mathbf{x}), \quad (\text{П1.2})$$

где $\{\mathbf{x}\} = \{\phi_i, \phi_i^\dagger\}, i=1, 2, \dots, N$, и $\hat{\Lambda}(\{\mathbf{x}\}) = \frac{|\phi_N\rangle \dots |\phi_i\rangle \dots |\phi_1\rangle \langle \phi_1^{\dagger*} | \dots \langle \phi_i^{\dagger*} | \dots \langle \phi_N^{\dagger*} |}{\langle \phi_1^{\dagger*} | \dots \langle \phi_i^{\dagger*} | \dots \langle \phi_N^{\dagger*} | |\phi_N\rangle \dots |\phi_i\rangle \dots |\phi_1\rangle}$, —

недиагональный проекционный оператор, а $d\mu(\{\mathbf{x}\})$ — мера интегрирования.

Заметим, что в данном представлении ϕ и χ имеют смысл s -чисел (коммутирующая алгебра).

Используя уравнение на матрицу плотности (П1.1), получим уравнение Фоккер Планка, взяв производную по времени от (П1.2) и подставляя туда (П1.1), при этом интегрирование происходит по всему фазовому пространству, получаем

$$\int \frac{\partial P(\phi, \phi^+)}{\partial t} \hat{\Lambda}(\phi, \phi^+) d\mu(\phi, \phi^+) = -\frac{i}{\hbar} [H_c, \rho] + \gamma (2\hat{\phi}\rho\hat{\phi}^+ - \rho\hat{\phi}^+\hat{\phi} - \hat{\phi}^+\hat{\phi}\rho). \quad (\text{П1.3})$$

Подставляя вместо матрицы плотности интеграл (A2) в (A3), получаем следующее уравнение:

$$\int \frac{\partial P}{\partial t} \hat{\Lambda} d\mu = -i\Delta \int P [H_c, \hat{\Lambda}] d\mu + \gamma \int P (2\hat{\phi}\hat{\Lambda}\hat{\phi}^+ - \hat{\Lambda}\hat{\phi}^+\hat{\phi} - \hat{\phi}^+\hat{\phi}\hat{\Lambda}) d\mu. \quad (\text{П1.4})$$

Используя стандартные правила операторной алгебры получим следующие правила перехода к P-представлению:

$$\hat{a}^+ \rho \rightarrow \alpha^+ - \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad (\text{П1.5})$$

$$\rho \hat{a} \rightarrow \alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha^+}, \quad (\text{П1.6})$$

$$\rho \hat{a}^+ \rightarrow \alpha^+, \quad (\text{П1.7})$$

$$\hat{a} \hat{a}^+ \rho \rightarrow \alpha \left(\alpha^+ - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \quad (\text{П1.8})$$

$$\rho \hat{a} \hat{a}^+ \rightarrow \alpha^+ \left(\alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha^+} \right), \quad (\text{П1.9})$$

$$\hat{a} \rho \hat{a}^+ \rightarrow |\alpha|^2, \quad (\text{П1.10})$$

$$\hat{a} \rho \rightarrow \alpha, \quad (\text{П1.11})$$

$$\rho \hat{a}^+ \hat{a} \rightarrow \left(\alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha^+} \right) \alpha^+, \quad (\text{П1.12})$$

$$\hat{a}^+ \rho \hat{a} \rightarrow \left(\alpha^+ - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(\alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha^+} \right), \quad (\text{П1.13})$$

$$2\hat{a}\rho\hat{a}^+ - a^+a\rho - \rho a^+a \rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^+} \alpha^+. \quad (\text{П1.14})$$

Применяя правила (П1.5)-(П1.14) к выражениям в коммутационных скобках в (П1.4) получаем следующее уравнение Фоккера-Планка,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[-\sum_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} A_i(\mathbf{x}) + \sum_i \frac{\partial^2}{\partial \phi_i^2} D_{ii}(\mathbf{x}) + \text{э.с.} \right] P. \quad (\text{П1.15})$$

Стоит отметить, что при переходе от (П1.3) к (П1.15) мы пренебрегли функцией квазираспределения на границе фазового пространства устремлённого в бесконечность (при интегрировании по частям).

В общем случае, когда мы учитываем индуцированные резервуаром тепловые фотоны в супероператоре Линдблада появляется слагаемое вида $2\gamma n_{th} \left[\left[\hat{\phi}, \rho \right], \hat{\phi}^+ \right]$, где $\bar{n}_{th} = \frac{1}{\exp[\hbar\omega / k_B T_R] - 1}$ – среднее число частиц с энергией $\hbar\omega$ индуцируемая резервуаром, согласно флуктуационно-диссипативной теореме.

В матрице диффузии D (в общем случае тензоре), возникают недиагональные матричные элементы,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[-\sum_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} A_i(\mathbf{x}) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial \phi_i \partial \phi_j} D_{ij}(\mathbf{x}) + \text{э.с.} \right] P. \quad (\text{П1.16})$$

Хотя если резервуары для каждого мод не коррелированы, друг с другом, матрица диффузии будет квазидиагональной. Применяя процедуру описанную выше и правила (П1.5)-(П1.14), к основному кингетическому уравнению (2.22), получаем следующие уравнение Фоккера-Планка,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial \phi} \left(-(i\Delta_{ph} + \gamma_{ph})\phi + E_d - i\omega_R \chi \right) - \frac{\partial}{\partial \chi} \left(-(-i\Delta_{ex} + \gamma_{ex})\chi - i\omega_R \phi - 2i\alpha \chi^+ \chi^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} (-i\alpha \chi^2) + \text{э.с.} \right] P \quad (\text{П1.17})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ П2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Решим уравнение Фоккера-Планка (П1.17), найденную в приложении П1 в стационарном режиме методом потенциалов. В этом состоянии левая часть этого уравнения обращается в ноль

$$\frac{\partial P(\chi, \chi^+)}{\partial t} = 0. \quad (\text{П2.1})$$

Тогда правую часть уравнения (П1.17) можно записать через сумму токов вероятности. Эта сумма в условии стационарности должен быть равна нулю

$$\sum_i^4 \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{П2.2})$$

где $x = \{\phi, \phi^+, \chi, \chi^+\}$; здесь j – плотность тока вероятности, который определяется через дрейф и диффузию

$$j_i = A_i - \frac{\partial D_{il}}{\partial x_i}, l = 1, 2, \dots \quad (\text{П2.3})$$

Для решения уравнения методом потенциалов необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}. \quad (\text{П2.4})$$

При условии потенциальности (П2.4) каждый i -ый элемент плотности тока вероятности обращается в ноль. Где мы ввели обобщенную силу, которая вычисляется из матрицы диффузии и сносом по следующей формуле [38]

$$V_i(\alpha) = (D_{ii}(\alpha))^{-1} (2A_i(\alpha) + \partial_i D_{ii}(\alpha)), \quad (\text{П2.5})$$

где $\alpha = \chi, \chi^+$. Снос (дрейф) задается столбцом

$$A = \begin{pmatrix} (-i\Delta_{ex} + \gamma_{ex})\chi + \frac{i\omega_R E_d}{(i\Delta_{ph} + \gamma_{ph})} + \frac{\omega_R^2 \chi}{(i\Delta_{ph} + \gamma_{ph})} + 2i\alpha\chi^+ \chi^2 \\ (i\Delta_{ex} + \gamma_{ex})\chi^+ - \frac{i\omega_R E_d}{(-i\Delta_{ph} + \gamma_{ph})} + \frac{\omega_R^2 \chi^+}{(-i\Delta_{ph} + \gamma_{ph})} - 2i\alpha\chi^{+2} \chi \end{pmatrix}. \quad (\text{П2.6})$$

А матрица диффузии имеет диагональный вид,

$$D = \begin{pmatrix} -2i\alpha\chi^2 & 0 \\ 0 & 2i\alpha\chi^{+2} \end{pmatrix}. \quad (\text{П2.7})$$

Из выражения (П2.5) мы легко получаем выражение для обобщенной силы

$$V_1(\mathbf{a}) = i \frac{\left((-i\Delta + \gamma_{ex})\chi + \frac{i\omega_R E_d}{(i\Delta_{ph} + \gamma_{ph})} + \frac{\omega_R^2 \chi}{(i\Delta_{ph} + \gamma_{ph})} + 2i\alpha\chi^2 \chi^+ \right) - 2i\alpha\chi}{\alpha\chi^2} =. \quad (\text{П2.8})$$

$$= (-\psi + 2) \frac{1}{\chi} + \sigma E_d \frac{1}{\chi^2} - 2\chi^+$$

где ввели такую замену констант,

$$\psi = -\frac{1}{\alpha} \left(\left(\Delta + \frac{\Delta_{ph} \omega_R^2}{(\Delta_{ph}^2 + \gamma_{ph}^2)} \right) + i \left(\gamma_{ex} + \frac{\gamma_{ph} \omega_R^2}{(\Delta_{ph}^2 + \gamma_{ph}^2)} \right) \right); \sigma = \frac{1}{\alpha} \frac{\omega_R (i\Delta_{ph} - \gamma_{ph})}{(\Delta_{ph}^2 + \gamma_{ph}^2)}.$$

Вторая компонента обобщенной силы эрмитово сопряжена первой:

$$V_2(\mathbf{a}) = (-\psi^* + 2) \frac{1}{\chi^+} + \sigma^* E_d \frac{1}{\chi^{+2}} - 2\chi. \quad (\text{П2.9})$$

Как отмечалось выше, для того что бы стационарное решение было потенциальным необходимо выполнение условия потенциальности, в нашем случае оно имеет просто вид

$$\partial_2 V_1(\mathbf{a}) = \partial_1 V_2(\mathbf{a}). \quad (\text{П2.10})$$

Сразу видно, что наши потенциалы выполняют эти условия $\partial_{\chi^+} V_1(\mathbf{a}) = -2$, $\partial_{\chi} V_2(\mathbf{a}) = -2$. Решение уравнения Фоккера-Планка в стационарном режиме имеет такой вид,

$$P(\{\mathbf{a}\})_{SS} = \exp\left(-\sum_{i=1}^2 \int V_i(\{\mathbf{a}\}) d\alpha_i\right). \quad (\text{П2.11})$$

Проинтегрируем обобщенные силы в этом выражении

$$\begin{aligned} P(\mathbf{a})_{SS} &= \exp\left(-\int \left[(-\psi + 2)\frac{1}{\chi} + \sigma E_p \frac{1}{\chi^2} - 2\chi^+\right] d\chi\right) \times \\ &\times \exp\left(-\int \left[(-\psi^* + 2)\frac{1}{\chi^+} + \sigma^* E_d \frac{1}{\chi^{+2}} - 2\chi\right] d\chi^+\right) \\ &= \exp\left[-(-\psi + 2)\ln(\chi) - (-\psi^* + 2)\ln(\chi^+) + \frac{\sigma}{\chi} E_p + \frac{\sigma^*}{\chi^+} E_d + 2\chi^+ \chi\right] \end{aligned}$$

(П2.12)

Используя известное тождество $e^{a \ln(x)} = x^a$, получаем выражение для стационарного P- распределения,

$$P(\mathbf{a})_{SS} = N \chi^{\psi-2} \chi^{+(\psi^*-2)} \exp\left[\frac{\sigma}{\chi} E_p + \frac{\sigma^*}{\chi^+} E_d + 2\chi^+ \chi\right] \quad (\text{П2.13})$$

Здесь N – нормировочный множитель на P-функцию, определяемый из условия

$$\int P(\chi, \chi^+) d\chi d\chi^+ = 1 \quad (\text{П2.14})$$

Введем переменные $B = \chi^{-1}$, $B^+ = (\chi^+)^{-1}$, и разложим в ряд Тейлора экспоненту $\exp[2\chi^+ \chi]$ в подынтегральной функции интеграла (П2.13),

$$I = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \left[B^{-\psi-n} (B^+)^{-\psi^*-n} \exp[E_d \sigma B + E_d \sigma^* B^+] \right] dB dB^+. \quad (\text{П2.15})$$

Гамма функцию можно представить таким интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (\text{П2.16})$$

а обратная гамма функция выражается интегралом Ханкеля

$$\Gamma(z)^{-1} = \frac{i}{2\pi} \int_C (-t)^{-z} e^{-t} dt. \quad (\text{П2.17})$$

Заменим переменную t на другую переменную таким образом, $t = -\sigma B$, тогда

$$(\Gamma(\psi + n))^{-1} = \frac{\sigma^{-\psi-n+1}}{2\pi i} \int_C (B)^{\psi-n} e^{\sigma B} dB, \quad (\text{П2.18})$$

и нормировочный интеграл принимает вид в виде суммы интегралов Ханкеля,

$$I = -4\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sigma^{\psi+(n-1)} (\sigma^*)^{\psi^*+(n-1)}}{n! \Gamma(\psi + n) \Gamma(\psi^* + n)}. \quad (\text{П2.19})$$

Эту сумму можно выразить через гипергеометрический ряд

$${}_0F_2(\psi, \psi^*, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \Gamma(\psi) \Gamma(\psi^*)}{n! \Gamma(\psi + n) \Gamma(\psi^* + n)}, \quad (\text{П2.20})$$

получаем такое выражение для искомого интеграла

$$N = -4\pi^2 \frac{I_d^{\text{Re}\psi-1} \sigma^{\psi} (\sigma^*)^{\psi^*}}{|\sigma|^2 \Gamma(\psi) \Gamma(\psi^*)} {}_0F_2(\psi, \psi^*, 2I_d |\sigma|^2). \quad (\text{П2.21})$$

получаем такое выражение на нормировочный множитель

$$N = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{I_d |\varepsilon|^2 \left| \Gamma\left(-i \frac{\gamma}{\alpha}\right) \right|^2}{\left| (-E_d \varepsilon)^{-i \frac{\gamma}{\alpha}} \right|^2 {}_0F_2\left(-i \frac{\gamma}{\alpha}, i \frac{\gamma^*}{\alpha}, 2I_d |\varepsilon|^2\right)}. \quad (\text{П2.22})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ ПЗ. РАСЧЕТ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

Используя интеграл Шлаффлиса на функцию Бесселя получаем следующие выражения для функции Бесселя [100]

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{2\pi i} \int_C t^{\nu-1} \exp\left[t - \frac{z^2}{4t}\right] dt, \quad (\text{ПЗ.1})$$

Получаем следующее соотношение для функции Вигнера для экситонов:

$$W(\chi) = N' e^{-|\chi|^2} \left| \frac{J_{-i\frac{\gamma}{\alpha}-1}(\sqrt{-8E_d\sigma\chi^*})}{(-\chi^*)^{-(i\frac{\gamma}{\alpha}+1)/2}} \right|^2, \quad (\text{ПЗ.2})$$

где N' – нормированная константа, определяемая следующим выражением:

$$N' = \frac{2}{\pi \left| (-2E_d\sigma)^{-i\frac{\gamma}{\alpha}-1} \right|} \frac{\Gamma(-i\frac{\gamma}{\alpha})\Gamma(i\frac{\gamma}{\alpha})}{{}_0F_2(i\gamma^*/\alpha, -i\gamma/\alpha, 2|\sigma E_d|^2)}. \quad (\text{ПЗ.3})$$

Из (ПЗ.2) получаем функцию Вигнера для фотонного излучения экситон-поляритонной системы:

$$W(\phi) = N'' e^{-\frac{(\gamma_{ph} \text{Im}\phi + \Delta_{ph} \text{Re}\phi)^2 + (\gamma_{ph} \text{Re}\phi - \Delta_{ph} \text{Im}\phi - E_d)^2}{\omega_R^2}} \left| \frac{J_{-i\frac{\gamma}{\alpha}-1} \left(\sqrt{-8E_d\sigma \frac{(iE_d + \phi^*(\Delta_{ph} - i\gamma_{ph}))}{\omega_R}} \right)}{\left(\frac{(iE_d + \phi^*(\Delta_{ph} - i\gamma_{ph}))}{\omega_R} \right)^{-(i\frac{\gamma}{\alpha}+1)/2}} \right|^2, \quad (\text{ПЗ.4})$$

В (ПЗ.4) была введена новая нормировочная константа (в соответствии с Якобианом преобразование экситонных s -чисел в фотонные переменные в интегральном виде):

$$N'' = \frac{\omega_R^2}{\Delta_{ph}^2 + \gamma_{ph}^2} N'. \quad (\text{ПЗ.5})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ П4. ВЫВОД ОСНОВНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНДБЛАДА В БАЗИСЕ ФОКОВСКИХ СОСТОЯНИЙ

Разложим матрицу плотности на матричные элементы в фоковском базисе

$$\rho = \sum_{n',m',n,m} \rho_{n',m',n,m} |m',n'\rangle \langle n,m|, \quad (\text{П4.1})$$

Подставляя разложение (П4.1) в основное кинетическое уравнение (2.22), можно получить систему линейных дифференциальных уравнений, На матричные элементы $\rho_{n',m',n,m} = \langle n',m' | \rho | n,m \rangle$:

$$\frac{d}{dt} \rho_{n',m',n,m} = T_{n',m',n,m}^{i',j',i,j} \rho_{i',j',i,j} \quad (\text{П4.2})$$

Где $T_{n',m',n,m}^{i',j',i,j}$ - суперматрица преобразования с суммированием по повторяющимся индексам.

$$\begin{aligned} T_{n',m',n,m}^{i',j',i,j} = & -i\omega_{ph} (m'-m) \delta_{n',m',n,m}^{i',j',i,j} - i\omega_{ex} (n'-n) \delta_{n',m',n,m}^{i',j',i,j} - ig \sqrt{n'(m'+1)} \delta_{n',m',n,m}^{i'+1,j'-1,i,j} + \\ & + ig \sqrt{m(n+1)} \delta_{n',m',n,m}^{i',j',i-1,j+1} - ig \sqrt{m'(n'+1)} \delta_{n',m',n,m}^{i'-1,j'+1,i,j} + ig \sqrt{n(m+1)} \delta_{n',m',n,m}^{i',j',i+1,j-1} - \\ & - i\chi (n'(n'-1) - n(n-1)) \delta_{n',m',n,m}^{i',j',i,j} + E \left(\sqrt{m'} \delta_{n',m',n,m}^{i',j'+1,i,j} - \sqrt{m+1} \delta_{n',m',n,m}^{i',j',i,j-1} \right) - \\ & - E^* \left(\sqrt{m'+1} \delta_{n',m',n,m}^{i',j'-1,i,j} - \sqrt{m} \delta_{n',m',n,m}^{i',j',i,j+1} \right) + 2\gamma_{ph} \sqrt{(m'+1)(m+1)} \delta_{n',m',n,m}^{i',j'-1,i,j-1} - \\ & - \gamma_{ph} (m'+m) \delta_{n',m',n,m}^{i',j',i,j} + 2\gamma_{ex} \sqrt{(n'+1)(n+1)} \delta_{n',m',n,m}^{i'-1,j',i-1,j} - \gamma_{ex} (n'+n) \delta_{n',m',n,m}^{i',j',i,j} \end{aligned} \quad (\text{П4.3})$$

Уменьшим размерность матрицы плотности

$$\begin{aligned} T_{x,y}^{x',y'} = & -i\omega_{ph} (m'-m) \delta_{x,y}^{x',y'} - i\omega_{ex} (n'-n) \delta_{x,y}^{x',y'} - ig \sqrt{n'(m'+1)} \delta_{x,y}^{x'+N_{ex}+1,y'-N_{ph}-1} + \\ & + ig \sqrt{m(n+1)} \delta_{x,y}^{x'-1,y'+1} - ig \sqrt{m'(n'+1)} \delta_{x,y}^{x'-N_{ex}-1,y'+N_{ph}+1} + ig \sqrt{n(m+1)} \delta_{x,y}^{x'+1,y'-1} - \\ & - i\chi (n'(n'-1) - n(n-1)) \delta_{x,y}^{x',y'} + E \left(\sqrt{m'} \delta_{x,y}^{x',y'+N_{ph}+1} - \sqrt{m+1} \delta_{x,y}^{x',y'-1} \right) - \\ & - E^* \left(\sqrt{m'+1} \delta_{x,y}^{x',y'-N_{ph}-1} - \sqrt{m} \delta_{x,y}^{x',y'+1} \right) + 2\gamma_{ph} \sqrt{(m'+1)(m+1)} \delta_{x,y}^{x',y'-N_{ph}-2} - \\ & - \gamma_{ph} (m'+m) \delta_{x,y}^{x',y'} + 2\gamma_{ex} \sqrt{(n'+1)(n+1)} \delta_{x,y}^{x'-N_{ex}-2,y'} - \gamma_{ex} (n'+n) \delta_{x,y}^{x',y'} \end{aligned} \quad (\text{П4.4})$$

Где $0 \leq i', i, n', n \leq N_{ex}, 0 \leq j', j, m', m \leq N_{ph}$ И

$$x = (N_{ex} + 1)n' + n, x' = (N_{ex} + 1)i' + i, y = (N_{ph} + 1)m' + m, y' = (N_{ph} + 1)j' + j.$$

Двойная дельта функция имеет такой смысл

$$\delta_{x,y}^{x',y'} = \begin{cases} 1, & \text{if } x = x', y = y' \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{n',m',n,m}}{dt} = & -i\omega_{ph}(m'-m)\rho_{n',m',n,m} - i\omega_{ex}(n'-n)\rho_{n',m',n,m} - ig\sqrt{n'(m'+1)}\rho_{n'-1,m'+1,n,m} + \\
& + ig\sqrt{m(n+1)}\rho_{n',m',n+1,m-1} - ig\sqrt{m'(n'+1)}\rho_{n'+1,m'-1,n,m} + ig\sqrt{n(m+1)}\rho_{n',m',n-1,m+1} - \\
& - i\chi(n'(n'-1) - n(n-1))\rho_{n',m',n,m} + E(\sqrt{m'}\rho_{n',m'-1,n,m} - \sqrt{m+1}\rho_{n',m',n,m+1}) - \\
& - E^*(\sqrt{m'+1}\rho_{n',m'+1,n,m} - \sqrt{m}\rho_{n',m',n,m-1}) + 2\gamma_{ph}\sqrt{(m'+1)(m+1)}\rho_{n',m'+1,n,m+1} - \\
& - \gamma_{ph}(m'+m)\rho_{n',m',n,m} + 2\gamma_{ex}\sqrt{(n'+1)(n+1)}\rho_{n'+1,m',n+1,m} - \gamma_{ex}(n'+n)\rho_{n',m',n,m}
\end{aligned} \tag{П4.5}$$

Сделаем систему одномерной и считаем это так

$$\begin{aligned}
& \rho_{0,0,0,0}, \rho_{0,0,0,1}, \dots, \rho_{0,0,0,N_{ph}}, \rho_{0,0,1,0}, \dots, \rho_{0,0,N_{ex},0}, \rho_{0,0,1,1}, \dots, \rho_{0,0,N_{ex},1}, \dots, \rho_{0,0,N_{ex},N_{ph}}, \\
& \rho_{0,1,0,0}, \dots, \rho_{0,N_{ph},0,0}, \dots, \rho_{0,N_{ph},N_{ex},N_{ph}}, \rho_{1,0,0,0}, \dots, \rho_{N_{ex},N_{ph},N_{ex},N_{ph}}
\end{aligned}$$

Введем соответствующий вектор $x = \left\{ x(1), \dots, x(i), \dots, x\left(\left(N_{ph}+1\right)^2\left(N_{ex}+1\right)^2\right) \right\}$

Матрица T, тогда принимает вид

$$\begin{aligned}
T_{x,y}^{x',y'} = & -i\omega_{ph}(m'-m)\delta_{x,y}^{x',y'} - i\omega_{ex}(n'-n)\delta_{x,y}^{x',y'} - ig\sqrt{n'(m'+1)}\delta_{x,y}^{x'+N_{ex}+1,y'-N_{ph}-1} + \\
& + ig\sqrt{m(n+1)}\delta_{x,y}^{x'-1,y'+1} - ig\sqrt{m'(n'+1)}\delta_{x,y}^{x'-N_{ex}-1,y'+N_{ph}+1} + ig\sqrt{n(m+1)}\delta_{x,y}^{x'+1,y'-1} - \\
& - i\chi(n'(n'-1) - n(n-1))\delta_{x,y}^{x',y'} + E(\sqrt{m'}\delta_{x,y}^{x',y'+N_{ph}+1} - \sqrt{m+1}\delta_{x,y}^{x',y'-1}) - \\
& - E^*(\sqrt{m'+1}\delta_{x,y}^{x',y'-N_{ph}-1} - \sqrt{m}\delta_{x,y}^{x',y'+1}) + 2\gamma_{ph}\sqrt{(m'+1)(m+1)}\delta_{x,y}^{x',y'-N_{ph}-2} - \\
& - \gamma_{ph}(m'+m)\delta_{x,y}^{x',y'} + 2\gamma_{ex}\sqrt{(n'+1)(n+1)}\delta_{x,y}^{x'-N_{ex}-2,y'} - \gamma_{ex}(n'+n)\delta_{x,y}^{x',y'}
\end{aligned} \tag{П4.6}$$

Мы получаем систему из $(N+1)^2$ уравнений на матричные элементы, для облегчение процедуры вычисления мы вместо двух индексов m и m' введем один индекс $s=m+1+(N+1)*(m')$, тогда $\rho_{m',m} = \rho_s$. Уравнение на матрицу плотности матрично выражается так

$$\frac{d\rho}{d\tau} = A\rho \tag{П4.7}$$

Где A матрица размером $(N+1)^4$ а и определяется так:

$$\begin{aligned}
A(s, j) = & -i\Delta / \gamma(m'-m)\delta_{s,j} - i\chi / \gamma(m'(m'-1) - m(m-1))\delta_{s,j} + F / \gamma(\sqrt{m'}\delta_{s-N-1,j} - \sqrt{m+1}\delta_{s+1,j}) - \\
& - F / \gamma(\sqrt{m'+1}\delta_{s+N+1,j} - \sqrt{m}\delta_{s-1,j}) + \sqrt{(m'+1)(m+1)}\delta_{s+N+2,j} - (m'+m)\delta_{s,j} / 2
\end{aligned} \tag{П4.8}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] QUANDELA [электронный ресурс] URL: <https://www.quandela.com/e-delight>
- [2] Zhang, J., Zhang, L., & Xu, W. (2012). Surface plasmon polaritons: physics and applications. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 45(11), 113001.
- [3] Basov, D. N., Asenjo-Garcia, A., Schuck, P. J., Zhu, X., & Rubio, A. (2020). Polariton panorama. *Nanophotonics*, 10(1), 549-577.
- [4] Гросс Е.Ф. Новые исследования по экситонному поглощению света. //Доклады Академии Наук.—1957. — № 12. С. 21-22.
- [5] Пекар. С.И. Добавочные световые волны в кристаллах и экситонное поглощение// УФН. — 1962. — Т. 77. – Вып. 2. – С. 309 – 319.
- [6] Schneider, T., Gao, W., Zentgraf, T., Schumacher, S., & Ma, X. (2023). Multistable topological edge states in double-wave chains of polariton condensates. arXiv preprint arXiv:2303.12593.
- [7] Hopfield J. J. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals // *Physical Review*. – 1958. – Т. 112. – №. 5. – С. 1555.
- [8] Weisbuch, C., Nishioka, M., Ishikawa, A., & Arakawa, Y. (1992). Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity. *Physical review letters*, 69(23), 3314.
- [9] Sanjib Ghosh, Rui Su, Jiaxin Zhao, Antonio Fieramosca, Jinqi Wu, Tengfei Li, Qing Zhang, Feng Li, Zhanghai Chen, Timothy Liew, Daniele Sanvitto, Qihua Xiong (2022). Microcavity exciton polaritons at room temperature. *Photonics Insights*, 1(1), R04-R04.
- [10] Anantharaman, S. B., Jo, K., & Jariwala, D. (2021). Exciton–photonics: from fundamental science to applications. *ACS nano*, 15(8), 12628-12654.
- [11] Gerard, J., Barrier, D., Marzin, J. Y., Kuszelewicz, R., Manin, L., Costard, E., Thierry-Mieg V., Rivera, T. (1996). Quantum boxes as active probes for photonic microstructures: The pillar microcavity case. *Applied Physics Letters*, 69(4), 449-451.
- [12] Reitzenstein, S., & Forchel, A. (2010). Quantum dot micropillars. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 43(3), 033001.
- [13] Vahala, K. J. (2003). Optical microcavities. *nature*, 424(6950), 839-846.

- [14] Schneider, C., Winkler, K., Fraser, M. D., Kamp, M., Yamamoto, Y., Ostrovskaya, E. A., & Höfling, S. (2016). Exciton-polariton trapping and potential landscape engineering. *Reports on Progress in Physics*, 80(1), 016503.
- [15] Alexey Kavokin, Jeremy J. Baumberg, Guillaume Malpuech, Fabrice P. Laussy *Microcavities*. – Oxford University Press, 2017.
- [16] Benjamin Besga, Cyril Vaneph, Jakob Reichel, et.al. Polariton boxes in a tunable fiber cavity // *Phys. Rev. Applied*. – 2015. – Vol. 3. – No.1. – 1-6 pp.
- [17] Tassone, F., & Yamamoto, Y. (1999). Exciton-exciton scattering dynamics in a semiconductor microcavity and stimulated scattering into polaritons. *Physical Review B*, 59(16), 10830.
- [18] A. Baas, J. Ph. Karr, H. Eleuch, E. Giacobino (2004) Optical bistability in semiconductor microcavities *Physical Review A* 69.2, 023809.
- [19] Wouters, M. (2007). Resonant polariton-polariton scattering in semiconductor microcavities. *Physical Review B*, 76(4), 045319.
- [20] A.A. Elistratov, Yu.E. Lozovik, Polariton Bose condensate in an open system: ab initio approach, *Phys. Rev. B* 97 (2018) 014525.
- [21] Haug, H., Cao, H. T., & Thoai, D. T. (2010). Coherence and decoherence of a polariton condensate. *Physical Review B*, 81(24), 245309.
- [22] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, et al. Bose–Einstein condensation of exciton polaritons. *Nature* 443.7110 (2006): 409-414.
- [23] R. Balili, V. Hartwell, D. Snoke, et al. Bose-Einstein condensation of microcavity polaritons in a trap. *Science* 316.5827 (2007): 1007-1010.
- [24] Dalfovo, F., Giorgini, S., Pitaevskii, L. P., & Stringari, S. (1999). Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Reviews of modern physics*, 71(3), 463.
- [25] Deng, H., Weihs, G., Santori, C., Bloch, J., and Yamamoto, Y. (2002). Condensation of semiconductor microcavity exciton polaritons. *Science*, 298(5591), 199-202.
- [26] Schlosshauer, M. (2019). Quantum decoherence. *Physics Reports*, 831, 1-57.
- [27] Howard J. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 1 Master Equations and Fokker-Planck Equations*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1st ed. 1999. edition, 1999

- [28] Heinz-Peter Breuer, Francesco Petruccione, et al. The theory of open quantum systems. Oxford University Press, 2002.
- [29] Walls D.F., Milburn G.J.: Quantum optics. Springer Science and Business Media. – 2007. – P. 370.
- [30] Скалли М. О. Зубайри М. С. Квантовая оптика: Пер. с англ./Под ред. В. В. Самарцева. – М.: Физматлит, —2003. — 512 с.
- [31] Gyamfi, J. A. (2020). Fundamentals of quantum mechanics in Liouville space. European Journal of Physics, 41(6), 063002.
- [32] Шляйх, Вольфганг Питер. Квантовая оптика в фазовом пространстве. Физматлит, 2005.
- [33] Wigner, E. "On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium." Physical Review 40.5 (1932): 749.
- [34] H.Weyl, «Quantenmechanik und Gruppentheorie», Zeitschrift für Physik, 46 (1927) pp. 1-46.
- [35] J.E. Moyal, «Quantum mechanics as a statistical theory», Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 45 (1949) pp. 99-124.
- [36] H.J. Groenewold, «On the Principles of elementary quantum mechanics», Physica,12 (1946) pp. 405-460.
- [37] Gilchrist A., Drummond P.D., Gardiner C.W. Positive P representation: Application and validity// Physical Review Letters— 1997. — Vol.55, No.4, 3014— 3032pp.
- [38] Drummond P.D, McNeil K.J. and Walls D.F. Non-equilibrium Transitions in Sub/Second Harmonic Generation // Optica Acta. — 1981. — vol.27. — No.2. — P. 211-225.
- [39] Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления: Пер. с англ./Под ред. С.П. Малышенко., М., – 1974. – 299 с.
- [40] Drummond P D, Gardiner C W 1980 Generalized P-representations in quantum optics Journal of Physics 3 2353–2368.
- [41] S.R.K. Rodriguez, W. Casteels, F. Storme, et al. Probing a dissipative phase transition via dynamical optical hysteresis. Physical review letters 118.24 (2017): 247402.

- [42] Espinosa-Ortega, T., and T. C. H. Liew. Complete architecture of integrated photonic circuits based on AND and NOT logic gates of exciton polaritons in semiconductor microcavities. *Phys Rev B* 87 (2013): 195305.
- [43] H. Abbaspour, G. Sallen, S. Trebaol, et al. Effect of a noisy driving field on a bistable polariton system. *Physical Review B* 92.16 (2015): 165303.
- [44] Thomas Fink, Anne Schade, Sven Hofling, et al. Signatures of a dissipative phase transition in photon correlation measurements. *Nature Physics* 14.4 (2018): 365-369.
- [45] Gammaitoni, L., Hänggi, P., Jung, P., et al. Stochastic resonance. *Reviews of modern physics* 70.1 (1998): 223.
- [46] Fauve S and Heslot F 1983 Stochastic resonance in a bistable system *Phys. Lett. A* 97 113.
- [47] Löfstedt, R., and S. N. Coppersmith. Quantum stochastic resonance. *Physical review letters* 72.13 (1994): 1947.
- [48] McNamara B, Wiesenfeld K and Roy R 1988 Observation of stochastic resonance in a ring laser *Phys. Rev. Lett.* 60 2626.
- [49] Dykman M, Velikovich A, Golubev G and Luchinskii D 1991 Stochastic resonance in an all-optical passive bistable system *Sov. Phys. JETP Lett.* 53 193.
- [50] Joshi A and Xiao M 2006 Stochastic resonance in atomic optical bistability *Phys. Rev. A* 74(1) 013817.
- [51] Wouters, M. & Carusotto, I. Excitations in a nonequilibrium bose-einstein condensate of exciton polaritons. // *Physical Review L.* – 2007. – Vol.99. No.18. 1-5pp.
- [52] Rodriguez, Ferney & Quiroga, L. & Tejedor, C. & Martin, M. & Vina, L. & Andre, R.. (2008). Control of non-Markovian effects in the dynamics of polaritons in semiconductor microcavities. *Physical Review B.* 78. 10.1103/PhysRevB.78.035312.
- [53] Dominici, L., Petrov, M., Matuszewski, M, et al. Real-space collapse of a polariton condensate. *Nature communications* 6.1 (2015): 1-9.
- [54] Demirchyan S.S., **Khudaiberganov T.A.**, Chestnov I.Yu., Alodjants A.P. Quantum fluctuation in the system of exciton polaritons in semiconductor microcavities// *Opt. Technol.* – 2017. – Vol.84. – 75-81 pp.

- [55] **Khudaiberganov T. A.**, Chestnov I. Y., and Arakelian S. M. (2022). Quantum statistics of light emitted from a pillar microcavity. *Applied Physics B*, 128(7), 1-9.
- [56] **Khudaiberganov, T.A.**, Chestnov I.Yu. S.S. Demirchyan *Journal of Physics Conference Series*. Photon statistics of semiconductor microcavity polaritons – 2018. – Vol.951. – No.1
- [57] **Khudaiberganov, T. A.**, Chestnov, I. Y., & Arakelian, S. M. (2023). Nonclassical polariton phenomena in a triple-micropillar system.
- [58] Sanvitto, Daniele, and Stéphane Kéna-Cohen. "The road towards polaritonic devices." *Nature materials* 15.10 (2016): 1061-1073.
- [59] Yulin A.V., Egorov O.A., Lederer F. and Skryabin D.V. Dark polariton solitons in semiconductor microcavities // *Physical Review A*. – 2008. – Vol.78. No.6. – 1-4 pp.
- [60] Lugiato L.A., Oldano C., Fabre C., Giacobino E., Self-Pulsing and Chaos in Optical Parametric Oscillators. // *Physical Review Letters*— 1988. —Vol.10, No.8, 959—977pp.
- [61] Richard M., Kasprzak J., Baas A., Kundermann S., Lagoudakis K., Wouters, M., Iacopo Carusotto, Regis Andre, Benoit Deveaud-Pledran and Dang, L. (2010). Exciton-polariton Bose-Einstein condensation: advances and issues. *International journal of nanotechnology*, 7(4-8), 668-685.
- [62] Gavrilov, S. S. (2020). Nonequilibrium transitions, chaos, and chimera states in exciton–polariton systems. *Physics-Uspekhi*, 63(2), 123.
- [63] Демидович, Б. П. (2008). Лекции по математической теории устойчивости. Лань.
- [64] Kinsler, Paul, and Peter D. Drummond. "Quantum dynamics of the parametric oscillator." *Physical Review A* 43.11 (1991): 6194.
- [65] Berdou C. et al. One hundred second bit-flip time in a two-photon dissipative oscillator // *PRX Quantum*. – 2023. – Т. 4. – №. 2. – С. 020350.
- [66] Casteels, Wim, Rosario Fazio, and Christiano Ciuti. "Critical dynamical properties of a first-order dissipative phase transition." *Physical Review A* 95.1 (2017): 012128.
- [67] Benary, J., Baals, C., Bernhart, E., Jiang, J., Röhrle, M., & Ott, H. (2022). Experimental observation of a dissipative phase transition in a multi-mode many-body quantum system. *New Journal of Physics*, 24(10), 103034.

- [68] Kessler, E. M., Giedke, G., Imamoglu, A., Yelin, S. F., Lukin, M. D., & Cirac, J. I. (2012). Dissipative phase transition in a central spin system. *Physical Review A*, 86(1), 012116.
- [69] Chaturvedi, S., Gardiner, C. W., Matheson, I. S., & Walls, D. F. (1977). Stochastic analysis of a chemical reaction with spatial and temporal structures. *Journal of Statistical Physics*, 17, 469-489.
- [70] Drummond, P. D., & Walls, D. F. (1981). Quantum theory of optical bistability. II. Atomic fluorescence in a high-Q cavity. *Physical Review A*, 23(5), 2563.
- [71] Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985. – Т. 423.
- [72] C. Gardiner, *Stochastic methods: a handbook for the natural and social sciences* 4th ed, Springer (2009), ISBN 978-3-540-70712-7.
- [73] Emma Gau (2023). Euler–Maruyama Method (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/69430-euler-maruyama-method>), MATLAB Central File Exchange. Retrieved July 7, 2023.
- [74] Mavrogordatos, T. K. (2017). Quantum phase transitions in the driven dissipative Jaynes-Cummings oscillator: From the dispersive regime to resonance. *Europhysics Letters*, 116(5), 54001.
- [75] K. V. Kheruntsyan Wigner function for a driven anharmonic oscillator *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 1 (1999) 225–233.
- [76] Frank Jahnke, Christopher Gies, Marc Asmann et al. Giant photon bunching, superradiant pulse emission and excitation trapping in quantum-dot nanolasers / Frank Jahnk, Christopher Gies, Marc Asmann, Manfred Bayer, H.A.M. Leymann, Alexander Foerster, Jan Wiersig, Christian Schneide, Martin Kamp and SvenHofling //Nature Communication— 2016. — Vol.7, No.11, 1-7pp.
- [77] A. Verger, C. Ciuti,¹ and I. Carusotto Polariton quantum blockade in a photonic dot// *Phys. Rev. B* 73, 193306 (2006)
- [78] Flayac, H., & Savona, V. (2017). Unconventional photon blockade. *Physical Review A*, 96(5), 053810.
- [79] K. M. Birnbaum, A. Boca, R. Miller, A. D. Boozer, T. E. Northup, and H. J. Kimble, Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom, *Nature* 436, 87-90 (2005).

- [80] Eduardo Zubizarreta Casalengua, Juan Camilo López Carreño, Fabrice P. Laussy, and Elena del Valle (2020). Conventional and Unconventional Photon Statistics. *Laser Photonics Rev.* 2020, 14, 1900279
- [81] Mandel L. Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence // *Optics letters.* – 1979. – T. 4. – №. 7. – C. 205-207.
- [82] Ruiz-Sánchez R., Rechtman R., Rubo Y. G. Autonomous chaos of exciton-polariton condensates // *Physical Review B.* – 2020. – T. 101. – №. 15. – C. 155305.
- [83] **Khudaiberganov T.**, and Arakelian S. Quantum polariton trigger // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* – IOP Publishing, 2020. – T. 896. – №. 1. – C. 012126.
- [84] Lofstedt R. and Coppersmith S. N. 1994 Quantum stochastic resonance *Phys. Rev. Lett.* 73(13), 1947-50
- [85] Baragiola, B. Q., Cook, R. L., Brańczyk, A. M., & Combes, J. (2012). N-photon wave packets interacting with an arbitrary quantum system. *Physical Review A*, 86(1), 013811.
- [86] Loudon, R., & Knight, P. L. (1987). Squeezed light. *Journal of modern optics*, 34(6-7), 709-759.
- [87] Yu. Chestnov, **T. A. Khudaiberganov**, A. P. Alodjants, and A. V. Kavokin *Phys. Rev. B* 98, 115302 (2018)
- [88] New Semiconductor Materials. Characteristics and Properties [электронный архив] URL: <http://www.ioffe.ru/SVA/NSM/Semicond/GaAs>
- [89] D. D. Joseph and Luigi Preziosi. Addendum to the Paper "Heat Waves". *Rev. Mod. Phys.*, 62:375, 1990.
- [90] Keeling, J., & Berloff, N. G. (2008). Spontaneous rotating vortex lattices in a pumped decaying condensate. *Physical review letters*, 100(25), 250401.
- [91] Berloff, N. G., Silva, M., Kalinin, et.al. (2017). Realizing the classical XY Hamiltonian in polariton simulators. *Nature materials*, 16(11), 1120-1126.
- [92] Rogers, C., and Malomed, B. (2018). On Madelung systems in nonlinear optics: A reciprocal invariance. *Journal of Mathematical Physics*, 59(5).
- [93] Ohadi, H., Gregory, R. L., Freearde, et.al. (2016). Nontrivial phase coupling in polariton multiplets. *Physical Review X*, 6(3), 031032.

- [94] Chiocchetta, A., & Carusotto, I. (2013). Non-equilibrium quasi-condensates in reduced dimensions. *Europhysics Letters*, 102(6), 67007.
- [95] Bobrovska, N., & Matuszewski, M. (2015). Adiabatic approximation and fluctuations in exciton-polariton condensates. *Physical Review B*, 92(3), 035311.
- [96] Малкин, И. Г. (1966). Теория устойчивости движения. Издательство "Наука", Главная редакция физико-математической литературы.
- [97] Liew, T. C. H., Egorov, O. A., Matuszewski, et.al. (2015). Instability-induced formation and nonequilibrium dynamics of phase defects in polariton condensates. *Physical Review B*, 91(8), 085413.
- [98] Агравал, Г. Нелинейная волоконная оптика: пер. с англ. / Г. Агравал. – М. : Мир, 1996. – 323 с. – ISBN 5-03-002418-2
- [99] Kulczykowski, M., Bobrovska, N., & Matuszewski, M. (2015). Bright sink-type localized states in exciton-polariton condensates. *Physical Review B*, 91(24), 245310.
- [100] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Edition, (1995) Cambridge University Press, ISBN 0-521-48391-3.