

УДК 517.977

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДА К СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2023 г. А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова

Рассматривается задача стабилизации переключаемой интервальной линейной системы с медленными переключениями, недоступными для наблюдения. Решение предлагается искать в классе регуляторов переменной структуры. Для обеспечения работоспособности такого регулятора необходимо построение наблюдателя переключающего сигнала. Настоящая работа посвящена некоторым теоретическим вопросам, связанным с периодом квантования времени работы нейронаблюдателя.

DOI: 10.31857/S0374064123100096, EDN: OOCQAQ

1. Постановка задачи. Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S_{\mathcal{T}}, \quad (1)$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ – непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ – множество всех переключающих сигналов σ , для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ ($\tau > 0$); I – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1); $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ – композиция отображения $[A] : I \rightarrow \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$ ($[A_i] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times n}$ – множество всех квадратных интервальных матриц порядка n) и переключающего сигнала σ , $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ – аналогичная композиция для отображения $[b] : I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$ ($[b_i] \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ – множество всех интервальных векторов размерности n); пары интервальных матриц ($[A_i], [b_i]$), $i = \overline{1, m}$, определяют режимы функционирования системы (1); $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ – управляющий вход.

Переключаемую интервальную систему (1) будем понимать как бесконечное семейство обычных переключаемых систем вида

[illegible]

где $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$ (здесь под включением понимается принадлежность каждого элемента матрицы A_i либо столбца b_i соответствующему промежутку – элементу интервальной матрицы $[A_i]$ либо интервального столбца $[b_i]$), $i = \overline{1, m}$, $\sigma \in S_\tau$. При этом если $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ представляет собой последовательность моментов переключения, то $t_j - t_i \geq \tau$ для всех $j > i$.

Далее предполагаем, что переключающий сигнал не доступен для наблюдения.

Задача. Требуется стабилизировать систему (1) в нулевом положении равновесия, т.е. построить обратную связь $u = u(x)$ такую, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S_\tau$ и любых наборов $\{A_1, \dots, A_m\}$ ($A_i \in [A_i]$), $\{b_1, \dots, b_m\}$ ($b_i \in [b_i]$) норма $\|x(t)\|$ соответствующего решения системы (2), замкнутой этой обратной связью, стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

При этом вектор-функция $x(t)$ определяется как решение линейной нестационарной системы с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma \in S_T,$$

где $A_{\sigma(t)} \in \{A_1, \dots, A_m\}$, $b_{\sigma(t)} \in \{b_1, \dots, b_m\}$. Далее для векторов будем использовать нормы $\|x\| = \max_i |x_i|$ или $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, а для матриц, соответственно, $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ или $\|A\|_2 = \sqrt{\max_i s_i(A^*A)}$, где $s_i(A^*A)$ – собственные числа матрицы A^*A .

В работе [1] была рассмотрена подобная задача стабилизации для скалярной переключаемой линейной системы без интервальной неопределённости вида

$$\dot{x} = A_{\sigma}x + b_{\sigma}u, \quad \sigma \in S_{\tau}. \quad (3)$$

При этом для её решения был использован подход, заключающийся в построении регулятора переменной структуры (переключаемого регулятора)

$$u = u_{\sigma}(x), \quad (4)$$

каждый режим которого является стабилизирующей обратной связью $u = u_i(x)$ для, соответственно, i -го режима $\dot{x} = A_i x + b_i u$ переключаемой системы (3), т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = A_i x + b_i u_i(x).$$

Отметим, что в предположении полной управляемости пары (A_i, b_i) стабилизирующую обратную связь для каждого режима системы (3) было предложено искать в форме линейной статической обратной связи $u = -k_i^T x$. Известно [2, с. 249], что такая обратная связь всегда существует как решение задачи модального управления.

В настоящей статье для стабилизации системы (1) также предлагается использовать указанный подход и искать стабилизирующую обратную связь в виде переключаемого регулятора вида (4) с режимами в форме линейной статической обратной связи ($u = -k_i^T x$)

$$u = -k_{\sigma}x, \quad \sigma \in S_{\tau}, \quad (5)$$

где $k_{\sigma} = k \circ \sigma$ – композиция отображения $k : I \rightarrow \{k_1^T, \dots, k_m^T\}$ ($k_i \in \mathbb{R}^n$) и переключающего сигнала σ . Тогда система (1), замкнутая регулятором (4), будет иметь вид

$$\dot{x} = [A_{\sigma}]x - [b_{\sigma}]k_{\sigma}x, \quad \sigma \in S_{\tau}. \quad (6)$$

Теперь заметим, что при использовании переключаемого регулятора для стабилизации системы (1) необходимо решить две проблемы. Первая состоит в поиске для каждого интервального режима

$$\dot{x} = [A_i]x + [b_i]u$$

стабилизирующей линейной статической обратной связи $u = -k_i^T x$, существование которой уже не гарантируется легко проверяемым критерием, как в случае обычных (не интервальных) линейных систем. Вместе с этим поиск стабилизирующей обратной связи для каждого режима переключаемой системы (1) неразрывно связан с решением вопроса об устойчивости этой системы, замкнутой соответствующим регулятором (5), поскольку известно, что устойчивость каждого замкнутого режима

$$\dot{x} = ([A_i]x - [b_i]k_i^T)x$$

системы (1) в отдельности ещё не является достаточным условием устойчивости замкнутой переключаемой системы (6).

Вторая проблема состоит в том, что для реализации указанного регулятора необходимо знать моменты переключения режимов и номера активных режимов в каждый момент времени, для того чтобы обеспечить синхронность переключений регулятора. Но, по условию, такая информация о переключаемой системе в режиме реального времени не доступна.

В п. 2 настоящей работы для решения первой проблемы предлагается использовать результаты статьи [3], позволяющие свести задачу нахождения стабилизирующей обратной связи для

каждого интервального режима к решению системы линейных матричных неравенств, а для решения задачи устойчивости замкнутой системы (6) будет предложена методика получения оценок времени задержки τ для обеспечения устойчивости переключаемой интервальной системы с устойчивыми режимами на основе результатов работ [4, с. 64; 5, с. 88]. Решение второй проблемы основано на методе построения нейронаблюдателя переключающего сигнала, изложенного в статье [1], и представлено в пп. 3, 4.

2. Выбор режимов переключаемого регулятора. Зафиксируем произвольный номер $i \in I$ и рассмотрим задачу поиска параметров вектора $k_i \in \mathbb{R}^n$, обеспечивающего устойчивость любой системы из семейства

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_i^T)x. \quad (7)$$

Для решения этой задачи может быть использован следующий подход. Для каждой интервальной матрицы $[A_i]$ построим множество вершинных матриц $A_{r,i}$ ($r = \overline{1, 2^{n^2}}$), т.е. таких матриц, элементы которых принимают только крайние значения (либо $\underline{a}_{ij}$, либо $\overline{a}_{ij}$) из соответствующих промежутков $[a]_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$. Аналогично строим множества вершинных векторов $b_{q,i}$ ($q = \overline{1, 2^n}$).

Далее в соответствии с методикой, изложенной в [3], по вершинным матрицам $A_{r,i}$ и векторам $b_{q,i}$ интервальных семейств $[A_i]$ и $[b_i]$ строятся специальные множества матриц $F_{l,i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и векторов $g_{l,i} \in \mathbb{R}^n$ ($l = \overline{1, \kappa}$, где $\kappa = 2^{n^2+n}$), после чего вектор обратной связи k_i находим из системы линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} P_i F_{l,i}^T + F_{l,i} P_i + z_i g_{l,i}^T + g_{l,i} z_i^T < 0, \\ P_i > 0, \quad l = \overline{1, \kappa}. \end{cases} \quad (8)$$

Если (z_i, P_i) – решение системы (8), то $k_i^T = -z_i^T P_i^{-1}$. При этом функция

$$V_i(x) = x^T P_i x$$

является общей квадратичной функцией Ляпунова для семейства систем (7).

Итак, пусть стабилизирующие обратные связи $u = -k_i^T x$ для каждого i -го режима системы (1) построены. Рассмотрим теперь вопрос об оценке времени задержки τ , которое гарантирует устойчивость замкнутой системы (6) при любом $\sigma \in S_\tau$.

Зафиксируем номер $i \in \{1, \dots, m\}$ и рассмотрим произвольную систему

$$\dot{x} = (A - bk_i^T)x, \quad (9)$$

где $A \in [A_i]$, $b \in [b_i]$. В работе [3] показано, что матрица такой системы может быть представлена в виде

$$A - bk_i^T = \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i), \quad \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l = 1, \quad \lambda_l \geq 0, \quad (10)$$

где $\Psi_l^{(i)}(k_i) = F_{l,i} - g_{l,i} k_i^T$.

Пусть пара (z_i, P_i) – решение системы (8). В [3] показано, что тогда для всех $l = \overline{1, \kappa}$ выполняется неравенство

$$(\Psi_l^{(i)}(k_i))^T Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i) < 0,$$

где $k_i^T = -z_i^T P_i^{-1}$, $Q_i = P_i^{-1}$. Отсюда и из (10) имеем

$$\begin{aligned} (A - bk_i^T)^T Q_i + Q_i (A - bk_i^T) &= \left(\sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i) \right)^T Q_i + Q_i \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l \Psi_l^{(i)}(k_i) = \\ &= \sum_{l=1}^{\kappa} (\lambda_l (\Psi_l^{(i)}(k_i))^T Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i)) = - \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l H_l^{(i)}, \end{aligned}$$

где $H_l^{(i)} = -((\Psi_l^{(i)}(k_i))^T Q_i + Q_i \Psi_l^{(i)}(k_i))$ – положительно определённые матрицы.

Таким образом,

$$(A - bk_i)^T Q_i + Q_i(A - bk_i) = - \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l H_l^{(i)},$$

причём матрица $H^{(i)} = \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l H_l^{(i)}$ является положительно определённой. Отсюда получаем, что система (9) асимптотически устойчива, а в силу произвольности выбора матрицы A и вектора b получаем, что обратная связь $u = -k_i^T x$ обеспечивает устойчивость семейства замкнутых систем (7).

Далее пусть $h_{\min}^{(i)}$ – минимальное собственное значение матрицы $H^{(i)}$. Тогда имеем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} h_{\min}^{(i)} &= \min_{\|x\|_2=1} (x^T H^{(i)} x) = \min_{\|x\|_2=1} \left(x^T \left(\sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l H_l^{(i)} \right) x \right) = \min_{\|x\|_2=1} \left(\sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l (x^T H_l^{(i)} x) \right) \geq \\ &\geq \min_{\|x\|_2=1} \left(\sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l (h_l^{(i)} \|x\|_2^2) \right) \geq \min_{\|x\|_2=1} \left(\|x\|_2^2 \left(\sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l h_l^{(i)} \right) \right) = \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l h_l^{(i)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $h_l^{(i)}$ – минимальные собственные значения матриц $H_l^{(i)}$. Обозначим $\mu_i = \min_l h_l^{(i)}$. Тогда из (11) получаем

$$h_{\min}^{(i)} \geq \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l h_l^{(i)} \geq \mu_i \sum_{l=1}^{\kappa} \lambda_l = \mu_i,$$

т.е.

$$h_{\min}^{(i)} \geq \mu_i. \quad (12)$$

В соответствии с [4, с. 56] для любого решения $x(t)$ системы (9) выполнено неравенство

$$\|x(t)\|_2 \leq c_i e^{-\theta_i(t-s)} \|x(s)\|_2, \quad t \geq s \geq 0,$$

где $c_i = \sqrt{M_i/m_i}$, $\theta_i = h_{\min}^{(i)}/(2M_i)$, а m_i и M_i – соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы Q_i . В силу (12)

$$e^{-\theta_i(t-s)} \leq e^{-\nu_i(t-s)} \quad \text{при} \quad t > s \geq 0,$$

где $\nu_i = \mu_i/(2M_i)$, а тогда для любого решения $x(t)$ системы (9) получаем

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{n} \|x(t)\|_2 \leq c_i \sqrt{n} e^{-\nu_i(t-s)} \|x(s)\|_2 \leq c_i \sqrt{n} e^{-\nu_i(t-s)} \|x(s)\| \quad \text{при} \quad t > s \geq 0.$$

Обозначив $c_{ii} = c_i \sqrt{n}$, $\alpha_{ii} = -\nu_i$, запишем последнее неравенство в виде

$$\|x(t)\| \leq c_{ii} e^{\alpha_{ii}(t-s)} \|x(s)\|, \quad t \geq s \geq 0. \quad (13)$$

На основании изложенного выше и достаточного условия устойчивости переключаемой линейной системы, полученного в работе [5], справедлива

Теорема 1. Пусть для переключаемой интервальной линейной системы (1) при любом $i \in I$ совместна система линейных матричных неравенств (8) и (z_i, P_i) – её соответствующее решение. Тогда переключаемый регулятор

$$u = -k_{\sigma} x, \quad k_i^T = -z_i^T P_i^{-1}, \quad \sigma \in S_{\tau}, \quad (14)$$

стабилизирует систему (1) при

$$\tau > \frac{2 \ln c}{|\alpha|},$$

где $c = \max_i c_{ii}$, $\alpha = \max_i \alpha_{ii}$.

3. Построение нейронаблюдателя режимов замкнутой переключаемой системы.

Как уже было упомянуто выше, отсутствие информации о значении переключающего сигнала в процессе функционирования переключаемой системы не даёт возможности непосредственно использовать переключаемый регулятор (14). Для того чтобы обеспечить синхронность переключений самой системы и регулятора, необходимо построить наблюдатель, который бы формировал в каждый момент времени оценку переключающего сигнала $\sigma(t)$. В настоящей работе, как и в статье [1], предлагается строить оценку переключающего сигнала на основе нейросетевого подхода, который заключается в том, что в качестве упомянутого выше наблюдателя режимов используется нейронная сеть. Считаем, что выходом такой нейросети является оценка $\hat{\sigma}(t)$ недоступного для измерения переключающего сигнала $\sigma(t)$. При этом регулятор переменной структуры будет иметь вид

$$u = -k_{\hat{\sigma}}x, \quad (15)$$

где $\hat{\sigma}(t)$ – оценка переключающего сигнала, $\hat{\sigma}(t) \in \{1, \dots, m\}$, а векторы $k_i \in \mathbb{R}^n$ выбираются из условий устойчивости семейств матриц $[A_i] - [b_i]k_i$.

Пара – переключаемый регулятор и нейронная сеть – в [1] была названа *нейрорегулятором*. Систему (1), замкнутую нейрорегулятором, можно представить переключаемой системой следующего вида:

$$\dot{x} = ([A_{\sigma}] - [b_{\sigma}]k_{\hat{\sigma}})x, \quad \sigma \in S_{\tau}, \quad \hat{\sigma} \in [S]_{\varepsilon_p}, \quad (16)$$

где $\varepsilon_p = \tau/p$ – достаточно малая положительная константа, $p \in \mathbb{N}$ – некоторый фиксированный параметр алгоритма наблюдения, $[S]_{\varepsilon_p}$ – множество переключающих сигналов, для которых моменты переключений принадлежат множеству $\{l\varepsilon_p, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Перенумеруем (от 1 до m^2) все возможные режимы

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_j)x, \quad i, j = \overline{1, m},$$

переключаемой системы (16), присвоив каждому (ij) -му режиму соответствующий номер $s = (i-1)m + j$. Введём функцию $\xi : \{1, \dots, m^2\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, отображающую каждый номер s в соответствующий ему индекс i , т.е. $\xi(s) = i$.

Как и в случае построения нейронаблюдателя для переключающего сигнала обычной переключаемой системы, рассмотренной в [1], работа нейронной сети в качестве наблюдателя переключающего сигнала для переключаемой интервальной системы (1) также осуществляется в процессе функционирования системы и состоит в том, что для заданной дискретной последовательности моментов времени $l\varepsilon_p, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, по каждой паре измерений вектора состояния $(x(l\varepsilon_p), x((l+1)\varepsilon_p))$ нейронная сеть в момент времени $t = (l+1)\varepsilon_p$ должна определять номер s текущего режима переключаемой системы (16). Также как и в [1] обозначим выход нейросети в момент $l\varepsilon_p$ через $N[l\varepsilon_p]$. На основе данной информации оценка $\hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$ переключающего сигнала $\sigma(t)$ строится следующим образом:

$$\hat{\sigma}(t) \equiv \xi(N[l\varepsilon_p]) \quad \text{при } t \in [l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p), \quad l \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

В результате переключение векторов k_i стабилизирующей обратной связи задаёт переключающий сигнал (17) с некоторым заданным начальным условием $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_0$ ($\hat{\sigma}_0 \in \{1, \dots, m\}$). Описанный наблюдатель далее обозначаем через $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$. По аналогии с [1] введём дискретную ошибку оценивания $e_{\sigma}[l\varepsilon_p]$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) сигнала $\sigma(t)$:

$$e_{\sigma}[l\varepsilon_p] = \max_{i=0, l-1} \mu_{i\tau}^{(i+1)\tau},$$

где $\mu_{i\tau}^{(i+1)\tau}$ – количество промежутков вида $[j\varepsilon_p, (j+1)\varepsilon_p) \subset [i\tau, (i+1)\tau]$, для которых $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}(j\varepsilon_p)$.

Заметим, что построение описанного нейронаблюдателя для переключаемой интервальной системы является существенно более сложной задачей по сравнению с обычной системой, рассмотренной в статье [1], поскольку в данном случае каждый режим, по сути, представляет

собой континуальное семейство систем, в связи с чем теперь речь идёт о распознавании с помощью нейросети различных семейств линейных динамических систем.

4. Квантование времени работы наблюдателя переключающего сигнала. Одной из основных проблем обеспечения работоспособности переключаемого регулятора (15) является правильный выбор величины ε_p (периода срабатывания нейронаблюдателя). Учитывая, что режимы регулятора (15) могут переключаться только в дискретные моменты времени $t = l\varepsilon_p$ и при этом ещё могут возникать ошибки в распознавании режимов замкнутой системы (16), практически неизбежно будут возникать неустойчивые режимы на промежутках времени, длина которых будет зависеть от величины ε_p . И для того чтобы при этом обеспечить стремление нормы решения к нулю, необходимо рассчитать “правильное” значение величины ε_p в зависимости от возможной ошибки оценивания переключающего сигнала и от величины задержки τ . Решим этот вопрос.

Итак, для каждого замкнутого режима

$$\dot{x} = ([A_i] - [b_i]k_j)x, \quad i \neq j, \quad (18)$$

построим интервальное расширение

$$\dot{x} = [\Lambda_{ij}]x, \quad [\Lambda_{ij}] = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n} : |\Lambda - \Lambda_{ij}^\circ| \leq \Delta\Lambda_{ij}\}, \quad (19)$$

где Λ_{ij}° – центральный элемент интервального семейства, $\Delta\Lambda_{ij}$ – размах интервальной неопределённости и $A_i - b_i k_j \in [\Lambda_{ij}]$ для любых $A \in [A_i]$ и $b \in [b_i]$. Знаки модуля $|\cdot|$ и неравенства $\leq$ относительно матриц далее понимаем поэлементно.

Рассмотрим следующие системы:

$$(\Sigma_1) \quad \dot{x} = \Lambda_{ij}^\circ x,$$

$$(\Sigma_2) \quad \dot{x} = (|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})x,$$

$$(\Sigma_3) \quad \dot{x} = |\Lambda_{ij}^\circ|x.$$

Пусть $J_{ij}^{(l)}$ – жорданова нормальная форма (ЖНФ) для матрицы системы Σ_l , $r_{ij}^{(l)}$ – размер максимальной клетки Жордана для $J_{ij}^{(l)}$, $M_{ij}^{(l)}$ – соответствующая матрица преобразования к ЖНФ $J_{ij}^{(l)}$. Обозначим

$$\alpha_{ij}^{(l)} = \max_{\lambda_k^{(ijl)} \in \text{Spec } J_{ij}^{(l)}} \text{Re } \lambda_k^{(ijl)}, \quad c_{ij}^{(l)} = \|(M_{ij}^{(l)})^{-1}\| \|(M_{ij}^{(l)})\|, \quad P_{ij}^{(1)}(t) = \sum_{k=0}^{r_{ij}^{(1)}-1} \frac{t^k}{k!}.$$

Тогда, в соответствии с [6, с. 57], для норм матриц Коши систем Σ_l , $l = 1, 2, 3$, выполняются оценки

$$\begin{aligned} \|e^{\Lambda_{ij}^\circ(t-s)}\| &\leq c_{ij}^{(1)} e^{\alpha_{ij}^{(1)}(t-s)} P_{ij}^{(1)}(t-s), \\ \|e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)}\| &\leq c_{ij}^{(2)} e^{\alpha_{ij}^{(2)}(t-s)} P_{ij}^{(2)}(t-s), \\ \|e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}\| &\leq c_{ij}^{(3)} e^{\alpha_{ij}^{(3)}(t-s)} P_{ij}^{(3)}(t-s) \end{aligned} \quad (20)$$

при любых $t > s \geq 0$.

Пусть теперь Λ – некоторая произвольная матрица из семейства $[\Lambda_{ij}]$. Тогда, в соответствии с [7, с. 88], для матрицы Коши системы

$$\dot{x} = \Lambda x \quad (21)$$

при любых $t > s \geq 0$ имеем следующую оценку:

$$|e^{\Lambda(t-s)} - e^{\Lambda_{ij}^\circ(t-s)}| \leq e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}$$

или

$$e^{\Lambda_{ij}^\circ(t-s)} - e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)} + e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)} \leq e^{\Lambda(t-s)} \leq e^{\Lambda_{ij}^\circ(t-s)} + e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}.$$

Отсюда для любого решения системы (21) справедлива оценка

$$\|x(t)\| = \|e^{\Lambda(t-s)}x(s)\| \leq \|e^{\Lambda(t-s)}\| \|x(s)\| \leq \|e^{\Lambda_{ij}^\circ(t-s)} + e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)} - e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}\| \|x(s)\|.$$

Учитывая (20) и неравенство

$$\|e^{\Lambda_{ij}^\circ(t-s)} - e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)} + e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}\| \leq \|e^{\Lambda_{ij}^\circ(t-s)}\| + \|e^{(|\Lambda_{ij}^\circ| + \Delta\Lambda_{ij})(t-s)}\| + \|e^{|\Lambda_{ij}^\circ|(t-s)}\|,$$

получаем

$$\|x(t)\| \leq \left(\sum_{l=1}^3 c_{ij}^{(l)} e^{\alpha_{ij}^{(l)}(t-s)} P_{ij}^{(l)}(t-s) \right) \|x(s)\|, \quad t > s \geq 0.$$

Введём обозначения

$$c_{ij} = 3 \max\{c_{ij}^{(1)}, c_{ij}^{(2)}, c_{ij}^{(3)}\}, \quad \alpha_{ij} = \max\{\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \alpha_{ij}^{(3)}\}, \quad r_{ij} = \max\{r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, r_{ij}^{(3)}\}$$

и окончательно будем иметь

$$\|x(t)\| \leq c_{ij} e^{\alpha_{ij}(t-s)} P_{ij}(t-s) \|x(s)\|, \quad t > s \geq 0, \quad (22)$$

где $P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{r_{ij}-1} t^k/k!$. И поскольку каждая система семейства (18) принадлежит также семейству (19), то для любого решения режима (18) верна та же оценка (22). Обозначим

$$\rho = \max_{i \neq j} \alpha_{ij}, \quad \beta = \max_{i \neq j} c_{ij}, \quad r = \max_{i \neq j} r_{ij}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\rho > 0$.

Основываясь теперь на неравенствах (13), (22) и основном результате работы [1], сформулируем достаточное условие устойчивости замкнутой системы (16).

Теорема 2. Пусть для замкнутой системы (16) при любом переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и любом начальном условии $x(0) \in \mathbb{R}^n$ наблюдатель $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ генерирует оценку $\hat{\sigma} \in [S]_{\varepsilon_p}$ с ошибкой, удовлетворяющей условию

$$e_\sigma[l\tau] \leq \theta$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{N}$, $0 \leq \theta \leq [p/2]$.

Тогда если

$$\tau > \frac{2 \ln h}{|\alpha|},$$

где $h = c^{\theta+2} \beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}$, то для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения системы (16) стремится к нулю:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Здесь $P(t) = \sum_{k=0}^{r-1} t^k/k!$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М.* Теоретические аспекты построения нейрорегулятора для переключаемых систем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1548–1556.
2. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976.
3. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М.* Достаточные условия существования стабилизирующих регуляторов для переключаемых интервальных систем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 534–544.
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М., 2014.
5. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* Сверхстабилизация линейных динамических объектов при действии операторных возмущений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 7. С. 865–876.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
7. *Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В.* Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. М., 2006.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 07.06.2023 г.

После доработки 26.07.2023 г.

Принята к публикации 25.08.2023 г.