ТБИЛИССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРУЗИНСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ ФИЛОСОФСКОГО ОБЩЕСТВА СССР

ЛОГИКА АРИСТОТЕЛЯ

МАТЕРИАЛЫ СИМПОЗИУМА

16—17 ноября 1983 г., г. Тбилиси

ТБИЛИСИ 1985

Сборник содержит доклады,заслушанные на всесоюзном симпозиуме по логике Аристотеля.В них изложены результаты,полученные советскими учеными при исследовании таких важных историко-логических проблем,как отношение различных уточнений ассерторической силлогистики к разделам символической логики,понимание силлогистических методов доказательства,в частности,метода эктезиса средствами современной методологии науки,реконструкция аподиктической силлогистики в качестве самостоятельной формально-дедуктивной теории и др.Сборник рассчитан как на специалистов-логиков,так и на философов и математиков,интересующихся вопросами истории логики.

Редакторы: доктор философских наук,проф.В.А.Смирнов,
кандидат философских наук Л.И.Мчедлишвили

В.И.МАРКИН

СЕМАНТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АПОДИКТИЧЕСКОЙ СИЛЛОГИСТИКИ АРИСТОТЕЛЯ

Настоящая работа посвящена анализу теоретико-модельными средствами так называемой аподиктической силлогистики Аристотеля. Эта дедуктивная система, представляющая собой теорию выводов из высказываний о необходимо присущем и неприсущем (аподиктических высказываний) и высказываний о присущем и неприсущем (ассерторических высказываний), изложена Стагиритом в главах 8 – II первой книги "Первой Аналитики". Известно, что аподиктическая силлогистика Аристотеля вызывала множество возражений у его последователей, считалась в корне ошибочной. Задача данной работы состоит в том, чтобы найти такие семантические условия истинности аподиктических и ассерторических высказываний, которые детерминировали бы принятие, по возможности, всех правильных и отбрасывание всех неправильных принципов аподиктической силлогистики Аристотеля. После построения семантики для силлогистики будет решаться вопрос об аксиоматизации класса общезначимых в этой семантике формул.

Аподиктическую силлогистику Аристотеля естественно рассматривать как расширение его ассерторической силлогистики. Поэтому уместно начать нашу работу с семантической экспликации аристотелевских ассерторических высказываний.

Следуя Я.Лукасевичу [4], будем предполагать, что в основе силлогистики лежит классическая логика высказываний. Язык ассерторической силлогистики содержит общие термины (для их обозначения используем буквы S, P, Q, M, ...), логические связки $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$, константы a ("все...суть..."), i ("некоторые...суть..."), e ("ни одно...не суть..."), o ("некоторые...не суть"), а также левую и правую скобки. Элементарными формулами являются выражения типа SaP, SiP, SeP, SoP. Сложные формулы имеют вид $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, где A и B – формулы. $(A \equiv B)$, как обычно, является сокращением для $(A \supset B) \& (B \supset A)$.

Строим теоретико-множественную семантику ассерторической силлогистики Аристотеля. Моделью является пара $\langle \mathcal{D}, \varphi \rangle$, где $\mathcal{D}$ – непустое множество объектов, а φ – функция, приписывающая термину некоторое подмножество $\mathcal{D}$, т.е. $\varphi: T \xrightarrow{\varphi} 2^{\mathcal{D}}$, где T – множество терминов языка. С моделью $\langle \mathcal{D}, \varphi \rangle$ связываем функцию $|\ |$, приписывающую каждой формуле языка элемент множества $\{И, Л\}$ и определяемую по индукции:

И1. $|SaP| = И$, е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$ и $\varphi(S) \neq \emptyset$

И2. $|SiP| = И$, е.т.е. $\dot{\exists} M\,(|MaS| = И$ и $|MaP| = И)$

И3. $|SeP| = И$, е.т.е. $|SiP| = Л$

И4. $|SoP| = И$, е.т.е. $|SaP| = Л$

(Легко заметить, что, согласно данным условиям истинности, утвердительные высказывания предполагают, а отрицательные не предполагают непустоту своих терминов. Согласно исследованиям В.А.Бочарова [2], такое понимание категорических высказываний имел в виду сам Аристотель.)

Означивание сложных формул в модели $\langle \mathcal{D}, \varphi \rangle$ определяется обычным образом. Формула A истинна в модели $\langle \mathcal{D}, \varphi \rangle$, е.т.е. $|A| = И$. Формула A общезначима ($\models A$), е.т.е. она истинна во всякой модели указанного типа.

Класс общезначимых формул аксиоматизирует система, аксиомами которой являются аксиомы классического исчисления высказываний, а также формулы следующих типов:

A1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$ (модус Barbara)

A2. $(MaP \,\&\, MaS) \supset SiP$ (модус Darapti)

A3. $SaP \equiv \neg SoP$ (законы диагоналей)

A4. $SiP \equiv \neg SeP$

A5. $SaP \supset SaS$

A6. $SaP \supset PaP$ [1].

Правилами вывода являются

R1. $\dfrac{\vdash A,\ \vdash A \supset B}{\vdash B}$ (modus ponens)

R2. $\dfrac{\vdash (MaS \,\&\, MaP) \supset A}{\vdash SiP \supset A}$, где M не содержится в заключении [2].

---

1) Содержательный смысл A5 и A6 состоит в утверждении непустоты терминов общеутвердительного высказывания, т.к. истинность формулы SaS в семантике равнозначна непустоте S.

2) Правило R2, являющееся реконструкцией аристотелевского принципа i-эктезиса, было предложено Л.И.Мчедлишвили [5].

Данная аксиоматическая система является эквивалентной системе позитивной силлогистики С2, предложенной В.А.Смирновым [7]. Аксиомами С2 являются модусы Barbara и Celarent, законы диагоналей, закон подчинения $SaP \supset SiP$ и принцип обращения $SeP \supset PeS$, а также $SiP \supset SaS$; единственным правилом вывода С2 является modus ponens. Легко показать, что все аксиомы С2 доказуемы в нашей системе и наоборот. Производность правила R2 в системе С2 показана Л.И.Мчедлишвили [5]. Наша формулировка С2 более удобна для доказательства адекватности этой системы предложенной семантике.

<u>МТ I.</u> (метатеорема о непротиворечивости) Всякая формула, доказуемая в системе ассерторической силлогистики, является общезначимой в классе моделей типа $\langle \mathcal{D}, \varphi \rangle$.

Тривиальным образом показывается, что все аксиомы общезначимы и что правило RI сохраняет общезначимость формул. Остается показать, что и R2 инвариантно относительно общезначимости.

Пусть $(MaS \& MaP) \supset A$ общезначимо, а $SiP \supset A$ необщезначимо. Тогда существует модель $\langle \mathcal{D}_1, \varphi_1 \rangle$, такая, что $SiP \supset A$ ложно в этой модели. Следовательно, A в ней ложно, а SiP истинно. Последнее, согласно И2, означает, что существует термин Q, такой, что QaS и QaP истинны в $\langle \mathcal{D}_1, \varphi_1 \rangle$. Отсюда, в силу ИI, следует, что $\varphi_1(Q) \subseteq \varphi_1(S)$ и $\varphi_1(Q) \subseteq \varphi_1(P)$ и $\varphi_1(Q) \neq \emptyset$. Строим теперь модель $\langle \mathcal{D}_2, \varphi_2 \rangle$ следующим образом: $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$, φ_2 приписывает всем терминам, кроме M, тот же самый объем, что и φ_1, а $\varphi_2(M) = \varphi_1(Q)$. Из предыдущего утверждения по построению $\langle \mathcal{D}_2, \varphi_2 \rangle$ следует, что $\varphi_2(M) \subseteq \varphi_2(S)$ и $\varphi_2(M) \subseteq \varphi_2(P)$ и $\varphi_2(M) \neq \emptyset$. Значит, формула $MaS \& MaP$ истинна в $\langle \mathcal{D}_2, \varphi_2 \rangle$. В этой модели формула A должна принять то же самое значение, что и в модели $\langle \mathcal{D}_1, \varphi_1 \rangle$ (а именно, значение "Л"), т.к. M не входит в A, а объемы всех других терминов в обеих моделях совпадают. Итак, имеем, что $MaS \& MaP$ истинно, а A ложно в $\langle \mathcal{D}_2, \varphi_2 \rangle$. Следовательно, формула $(MaS \& MaP) \supset A$ ложна в этой модели, что противоречит допущению о ее общезначимости. Значит, из предположения общезначимости $(MaS \& MaP) \supset A$ вытекает, что формула $SiP \supset A$ также общезначима, если в нее не входит M. МТ I доказана.

Обратную метатеорему доказываем методом Хенкина. Назовем множество формул Γ непротиворечивым, если для любых $A_1, \dots, A_n$ из Γ формула $\neg(A_1 \& \dots \& A_n)$ не доказуема в ~~нашей~~ системе. Пусть T_Γ – множество терминов, входящих в формулы из Γ.

<u>Лемма I.</u> Произвольное непротиворечивое множество формул Γ, такое, что $T \setminus T_\Gamma$ бесконечно, можно расширить до насыщенного непротиворечивого множества Δ, обладающего свойствами: а) все теоремы АС ~~системы~~ входят в Δ; б) $A \supset B \in \Delta$ и $A \in \Delta \Rightarrow B \in \Delta$; в) $\neg A \in \Delta$, е.т.е. $A \notin \Delta$; г) $A \& B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ и $B \in \Delta$; д) $A \vee B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ или $B \in \Delta$; е) $A \supset B \in \Delta$, е.т.е. $A \notin \Delta$ или $B \in \Delta$; ж) для любых терминов S и P, таких, что $SiP \in \Delta$, найдется термин M, такой, что $MaS \& MaP \in \Delta$.

Насыщение Γ до Δ производится следующим образом. Пусть $A_1, A_2, \dots$ – пересчет всех формул. Определяем последовательность множеств $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ следующим образом. $\Delta_0 = \Gamma$; $\Delta_{n+1} = \Delta_n$, если $\Delta_n \cup \{A_n\}$ противоречиво; $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n\}$, если $\Delta_n \cup \{A_n\}$ непротиворечиво и A_n не имеет вида SiP; если же $A_n \equiv SiP$ и указанное множество непротиворечиво, то $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n, MaS \& MaP\}$, где M – термин, не входящий в A_n и формулы из Δ_n (такой термин всегда существует в силу бесконечности $T \setminus T_\Gamma$). Пусть $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$. Можно показать, что Δ обладает свойствами (а) – (ж).

Чтобы доказать непротиворечивость Δ, покажем индукцией по n, что каждое Δ_n непротиворечиво. Δ_0 непротиворечиво по условию леммы. Пусть Δ_n непротиворечиво. Если $\Delta_n \cup \{A_n\}$ противоречиво, то Δ_{n+1} непротиворечиво, т.к. оно совпадает с Δ_n. Если $\Delta_n \cup \{A_n\}$ непротиворечиво и A_n не имеет вида SiP, то также Δ_{n+1} непротиворечиво. Пусть теперь $\Delta_n \cup \{A_n\}$ непротиворечиво и $A_n \equiv SiP$. Допустим, что Δ_{n+1} (равное $\Delta_n \cup \{SiP, MaS \& MaP\}$) противоречиво. Тогда существует множество формул из Δ_{n+1}, отрицание конъюнкции которых доказуемо в нашей системе. Отсюда следует, что $\vdash \neg(MaS \& MaP \& B_1 \& \dots \& B_m)$, где $B_1, \dots, B_m$ – все те формулы указанного списка, которые входят в $\Delta_n \cup \{A_n\}$ и, значит, не содержат M. В силу логики высказываний, имеем: $\vdash (MaS \& MaP) \supset \neg(B_1 \& \dots \& B_m)$, откуда по R 2 получаем, что $\vdash SiP \supset \neg(B_1 \& \ldots \& B_m)$. Следовательно, $\vdash \neg(SiP \& B_1 \& \ldots \& B_m)$ и $\Delta_n \cup \{A_n\}$ противоречиво, что не согласуется с принятым условием. Лемма I доказана.

Далее для произвольного насыщенного непротиворечивого множества формул Δ строим каноническую модель $\langle \mathcal{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$: $\mathcal{D}_\Delta$ – множество терминов языка, $\varphi_\Delta(S) = \{M : MaS \in \Delta\}$.

<u>Лемма 2.</u> Произвольная формула A истинна в канонической модели $\langle \mathcal{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$ для Δ, е.т.е. $A \in \Delta$.

Доказательство ведется индукцией по числу связок в формуле A. Базис индукции включает четыре случая.

I) $A \rightleftharpoons SaP$. Покажем сначала, что $|SaP| = \text{и} \Rightarrow SaP \in \Delta$.

I. $\lvert SaP\rvert = \text{и}$, т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$ и $\varphi(S) \neq \emptyset$	допущение
2. $\dot{\forall} M(MaS \in \Delta \Rightarrow MaP \in \Delta)$	I; $\dot{\&}_\text{и}$, опр. φ и $\subseteq$
3. $QaS \in \Delta$	I; $\dot{\&}_\text{и}$, опр. φ, $\dot{\exists}_\text{и}$
4. $QaS \supset SaS \in \Delta$	A6, (а)
5. $SaS \in \Delta$	3,4; (б)
6. $SaS \in \Delta \Rightarrow SaP \in \Delta$	2; $\dot{\forall}_\text{и}$
7. $SaP \in \Delta$	5,6; $\Rightarrow_\text{и}$

Докажем обратное утверждение.

I. $SaP \in \Delta$	допущение
+2. $MaS \in \Delta$	
3. $(SaP \& MaS) \supset MaP \in \Delta$	AI, (а)
4. $MaP \in \Delta$	I,2,3; (г),(б)
5. $\dot{\forall} M(MaS \in \Delta \Rightarrow MaP \in \Delta)$	4; $\Rightarrow_\text{в}$, $\dot{\forall}_\text{в}$
6. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$	5; опр. φ и $\subseteq$
7. $SaP \supset SaS \in \Delta$	A5, (а)
8. $SaS \in \Delta$	I,7; (б)
9. $\dot{\exists} Q(QaS \in \Delta)$	8; $\dot{\exists}_\text{в}$
I0. $\varphi(S) \neq \emptyset$	9; опр. φ
II. $\lvert SaP\rvert = \text{и}$	6,I0; $\dot{\&}_\text{в}$, II

2) $A \rightleftharpoons SiP$. Покажем, что $|SiP| = \text{и} \Rightarrow SiP \in \Delta$.

I. $\lvert SiP\rvert = \text{и}$, т.е. $\dot{\exists} M(\lvert MaS\rvert = \text{и}$ и $\lvert MaP\rvert = \text{и})$	допущение
2. $\dot{\exists} M(MaS \in \Delta$ и $MaP \in \Delta)$	I; п.I базиса
3. $MaP \& MaS \in \Delta$	2; $\dot{\exists}_\text{и}$, (г)
4. $(MaP \& MaS) \supset SiP \in \Delta$	A2; (а)
5. $SiP \in \Delta$	3,4; (б)

Доказательство обратного утверждения:

I. $SiP \in \Delta$	допущение

2. $\exists M(MaS \& MaP \in \Delta)$ I; (ж)
3. $\exists M(|MaS| = и$ и $|MaP| = и)$ 2; п.I базиса, (г)
4. $|SiP| = и$ 3; И2

3) - 4) Случаи, когда A есть SeP или SoP сводятся, соответственно, к случаям (2) и (I), в силу наличия в Δ аксиом А3 и А4, а также условий истинности И3 и И4.

Доказательство индуктивного перехода тривиально. Лемма 2 доказана.

С использованием лемм 2 и I стандартным образом доказывается метатеорема о семантической полноте нашей системы относительно предложенной семантики:

<u>МТ 2.</u> Всякая формула, общезначимая в классе моделей типа $\langle \mathfrak{D}, \varphi \rangle$, доказуема в системе ассерторической силлогистики.

Теперь, после того как дана экспликация ассерторической силлогистики, попытаемся построить на ее основе аподиктическую аристотелевскую силлогистику. В отличие от Я.Лукасевича, который присоединял модальность к языку ассерторической силлогистики в качестве пропозиционального оператора, мы будем понимать необходимость как особую характеристику связи субъекта и предиката высказывания (т.е. как модальность *de re*, а не *de dicto*). Расширим язык силлогистики константами $a^{\square}$ ("все... необходимо суть..."), $i^{\square}$ ("некоторые... необходимо суть..."), $e^{\square}$ ("ни одно... необходимо не суть..."), $o^{\square}$ ("некоторые... необходимо не суть..."). Класс формул языка пополнится за счет присоединения к элементарным формулам выражений вида $Sa^{\square}P$, $Si^{\square}P$, $Se^{\square}P$, $So^{\square}P$.

Возникает задача построения семантики, в которой бы определялись условия истинности аподиктических высказываний. С этой целью рассмотрим класс моделей типа $\langle \mathfrak{D}, \varphi, \psi^{+}, \psi^{-} \rangle$, где определения $\mathfrak{D}$ и φ прежние, а ψ^{+} и ψ^{-} суть функции, которые так же, как и φ, приписывают терминам языка некоторые подмножества $\mathfrak{D}$. $\psi^{+}(S)$ трактуется содержательно как класс предметов, необходимо обладающих свойством S, а $\psi^{-}(S)$ – как класс предметов, необходимо не обладающих S [I].

I) Правомерность введения в семантику аристотелевской силлогистики понимаемых указанным образом функций ψ^{+} и ψ^{-}

Теперь семантическая экспликация аподиктической силлогистики Аристотеля может осуществляться двумя путями. Можно было бы задать достаточно простые и естественные условия истинности модальных суждений и, постулировав в семантике аналоги некоторых силлогистических законов (в частности, законов обращения), получить в качестве общезначимых все принципы аподиктической силлогистики Аристотеля. Этот подход развивался нами в докладе на координационном совещании по проблемам силлогистики, проходившем в январе 1982 г. в Ленинграде (см. [3]).

Однако при таком подходе, по существу, не выявляется содержательный смысл аподиктических высказываний, т.к. их условия истинности сами по себе не детерминируют принятие силлогистических законов, а для этого приходится вводить ряд ограничений на класс моделей. В настоящей работе мы попытаемся ограничиться минимальным числом содержательно очевидных семантических постулатов. Задача будет состоять в нахождении таких условий истинности модальных высказываний, исходя из которых можно оправдать принимаемые Аристотелем принципы и опровергнуть не принимаемые.

Итак, мы постулируем лишь два дополнительных ограничения на класс моделей типа $\langle \mathfrak{D}, \varphi, \psi^+, \psi^- \rangle$: для всякого S

(i) $\psi^+(S) \subseteq \varphi(S)$ и (ii) $\psi^-(S) \cap \varphi(S) = \varnothing$.

Содержательная приемлемость этих постулатов не вызывает сомнений: условие (i) утверждает, что все, что необходимо присуще объекту, присуще ему, а (ii) – что все, что необходимо не присуще объекту, не присуще ему.

Означивание модальных формул в модели $\langle \mathfrak{D}, \varphi, \psi^+, \psi^- \rangle$ задается следующим образом:

И5. $|Sa^{\square}P| = И$, е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \psi^+(P)$ и $\varphi(S) \neq \varnothing$

И6. $|Si^{\square}P| = И$, е.т.е. $\exists M((|MaS| = И$ и $|Ma^{\square}P| = И)$ или $(|Ma^{\square}S| = И$ и $|MaP| = И))$

обусловлена тем, что Аристотель, по-видимому, принимал эссенциалистский тезис, который гласит, что некоторые предметы сами по себе могут необходимо обладать или же необходимо не обладать некоторыми свойствами.

И7. $|Se^{\square}P| = \text{И}$, е.т.е. $\dot{\forall} M_1 \dot{\forall} M_2 \, (|M_1 a S| = \text{И}$ и $|M_2 a P| = \text{И} \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(M_1) \subseteq \psi^{-}(M_2)$ и $\varphi(M_2) \subseteq \psi^{-}(M_1))$ и $\varphi(S) \neq \emptyset$ и $\varphi(P) \neq \emptyset$

И8. $|So^{\square}P| = \text{И}$, е.т.е. $\dot{\exists} M \, (|M a S| = \text{И}$ и $|M e^{\square} P| = \text{И})$

(Обратим внимание, что, согласно условиям И5 – И8, истинность любого аподиктического высказывания предполагает непустоту его терминов.).

Условия истинности других формул языка сохраняются. Обычным образом определяются понятия истинности в модели $\langle \mathfrak{D}, \varphi, \psi^{+}, \psi^{-} \rangle$ и общезначимости.

Для того чтобы аксиоматизировать класс общезначимых в множестве моделей типа $\langle \mathfrak{D}, \varphi, \psi^{+}, \psi^{-} \rangle$ формул, мы должны добавить к аксиомам ассерторической силлогистики формулы видов

A7. $(Ma^{\square}P \,\&\, SaM) \supset Sa^{\square}P$ (модус Ba$^{\square}$rbara$^{\square}$)

A8. $(Ma^{\square}P \,\&\, MaS) \supset Si^{\square}P$ (модус Da$^{\square}$rapti$^{\square}$)

A9. $(MaP \,\&\, Ma^{\square}S) \supset Si^{\square}P$ (модус Dara$^{\square}$pti$^{\square}$)

A10. $(Me^{\square}P \,\&\, SaM) \supset Se^{\square}P$ (модус Ce$^{\square}$lare$^{\square}$nt)

A11. $(Me^{\square}P \,\&\, MaS) \supset So^{\square}P$ (модус Fe$^{\square}$lapto$^{\square}$n)

A12. $Se^{\square}P \supset Pe^{\square}S$ ($e^{\square}$ -обращения)

A13. $Sa^{\square}P \supset SaP$ (законы перехода от аподиктического к ассерторическому)

A14. $Se^{\square}P \supset SeP$

A15. $Se^{\square}P \supset SaS$ (условие непустоты субъекта $e^{\square}$)

Добавляются также два правила вывода:

R3. $\dfrac{\vdash ((MaS \,\&\, Ma^{\square}P) \vee (Ma^{\square}S \,\&\, MaP)) \supset A}{\vdash Si^{\square}P \supset A}$

R4. $\dfrac{\vdash (Me^{\square}P \,\&\, MaS) \supset A}{\vdash So^{\square}P \supset A}$,

где M не содержится в заключения.[1)]

---

1) Правило R4, представляющее собой реконструкцию аристотелевского принципа эктезиса для высказываний типа $o^{\square}$, было впервые предложено Л.И.Мчедлишвили [6]. Правило R3 предложено мною и Л.И.Мчедлишвили независимо друг от друга. У Аристотеля нет явно сформулированного принципа, аналогичного R3. Однако правомерность данного правила можно обосновать, ссылаясь на факт принятия Аристотелем "смешанного" модуса Darapti только с большей /только с меньшей/ аподиктической посылкой и аподиктическим заключением (это единственный модус такого рода в силлогистике Аристотеля).

В данной системе доказуемы все принимаемые в аристотелевской аподиктической силлогистике принципы: законы перехода от аподиктических высказываний к ассерторическим, законы подчинения и обращения высказываний о необходимом, модусы с обеими и одной аподиктической посылкой. Из отбрасываемых Аристотелем принципов доказуемыми оказываются лишь два модуса: $Bo^{\square}cardo^{\square}$ и $Baro^{\square}co^{\square}$. Однако эти модусы можно доказать с использованием $0^{\square}$-эктезиса таким же образом, каким сам Аристотель доказывает модусы $Bo^{\square}ca^{\square}rdo^{\square}$ и $Ba^{\square}ro^{\square}co^{\square}$.

Таким образом, данная система в достаточной степени адекватно формализует аподиктическую силлогистику Аристотеля. Поэтому, если мы докажем полноту и непротиворечивость этой системы относительно предложенной семантики, то можно будет утверждать, что в данной семантике эксплицируется одно из возможных пониманий смысла аристотелевских аподиктических высказываний.

<u>МТ I.I.</u> Всякая формула, доказуемая в системе аподиктической силлогистики, является общезначимой в классе моделей типа $\langle \mathcal{D}, \varphi, \psi^+, \psi^- \rangle$.

Легко показать, что все модальные аксиомы общезначимы. Инвариантность относительно общезначимости модальных правил доказывается аналогично инвариантности R2 (см. МТ I). Например, для доказательства инвариантности R3 предположим, что $Si^{\square}P \supset A$ ложна в некоторой модели $\langle \mathcal{D}_1, \varphi_1, \psi_1^+, \psi_1^- \rangle$. Отсюда следует ложность в этой модели A и существование термина Q, такого, что $\varphi_1(Q_1) \neq \phi$ и либо (I) $\varphi_1(Q) \subseteq \varphi_1(S)$ и $\varphi_1(Q) \subseteq \psi_1^+(P)$, либо (2) $\varphi_1(Q) \subseteq \psi_1^+(S)$ и $\varphi_1(Q) \subseteq \varphi_1(P)$. Строим модель $\langle \mathcal{D}_2, \varphi_2, \psi_2^+, \psi_2^- \rangle$ так: $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$, функции φ_2, ψ_2^+, ψ_2^- приписывают всем терминам, кроме M, то же самое, что и φ_1, ψ_1^+, ψ_1^-; термину M эти функции приписывают те множества, которые φ_1, ψ_1^+ и ψ_1^-, соответственно, приписывали термину Q. Далее легко показывается, что формула $((MaS \,\&\, Ma^{\square}P) \vee (Ma^{\square}S \,\&\, MaP)) \supset A$ ложна в модели $\langle \mathcal{D}_2, \varphi_2, \psi_2^+, \psi_2^- \rangle$.

Далее доказываем <u>Лемму I.I</u> о том, что всякое непротиворечивое в системе аподиктической силлогистики множество формул Γ, такое, что $T \setminus T_{\Gamma}$ бесконечно, можно расширить до насыщенного непротиворечивого в этой системе множества Δ, обладающего, помимо свойств (а) - (ж), свойствами: (з) для любых S и P, таких, что $Si^{\square}P \in \Delta$, найдется термин M, такой, что $(MaS \& Ma^{\square}P) \vee (Ma^{\square}S \& MaP) \in \Delta$; (и) для любых S и P, таких, что $So^{\square}P \in \Delta$, найдется термин M, такой, что $Me^{\square}P \& MaS \in \Delta$.

Необходимо модифицировать процедуру насыщения Γ до Δ, потребовав следующее: I) если $A_n \equiv Si^{\square}P$ и $\Delta_n \cup \{A_n\}$ непротиворечиво, то $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n, (MaS \& Ma^{\square}P) \vee (Ma^{\square}S \& MaP)\}$; 2) если $A_n \equiv So^{\square}P$ и $\Delta_n \cup \{A_n\}$ непротиворечиво, то $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n, Me^{\square}P \& MaS\}$. В обоих случаях M не должен содержаться в A_n и формулах из Δ_n.

Доказательство непротиворечивости Δ, осуществляемое аналогично соответствующему доказательству из леммы I, требует использования правил вывода R3 и R4.

Для произвольного насыщенного непротиворечивого в системе аподиктической силлогистики множества Δ строим каноническую модель $\langle \mathfrak{D}, \varphi, \psi^+, \psi^- \rangle$ следующим образом: $\mathfrak{D}$ - множество терминов языка, $\varphi(S) = \{M : MaS \in \Delta\}$, $\psi^+(S) = \{M : Ma^{\square}S \in \Delta\}$, $\psi^-(S) = \{M : Me^{\square}S \in \Delta\}$. Легко показать, что, в силу наличия в Δ аксиом AI3 и AI4, для канонической модели выполняются условия (i) $\varphi(S) \subseteq \psi^+(S)$ и (ii) $\varphi(S) \cap \psi^-(S) = \emptyset$.

Теперь докажем <u>Лемму 2.I</u> о том, что произвольная формула A языка аподиктической силлогистики истинна в канонической модели $\langle \mathfrak{D}, \varphi, \psi^+, \psi^- \rangle$ для Δ, е.т.е. $A \in \Delta$.

Базис доказательства включает восемь случаев. Относительно ассерторических элементарных высказываний утверждение леммы уже доказано (смотри доказательство леммы 2).

5) $A \equiv Sa^{\square}P$. Покажем, что $|Sa^{\square}P| = и \Rightarrow SaP \in \Delta$.

I.	$\lvert Sa^{\square}P \rvert = и$, т.е. $\varphi(S) \subseteq \psi^+(P)$ и $\varphi(S) \neq \emptyset$	допущение
2.	$\forall M (MaS \in \Delta \Rightarrow Ma^{\square}P \in \Delta)$	I; $\&_и$, опр. φ, ψ^+ и $\subseteq$
3.	$QaS \in \Delta$	I; $\&_и$, опр. φ, $\exists_и$
4.	$QaS \supset SaS \in \Delta$	A6, (а)
5.	$SaS \in \Delta$	3,4; (б)
6.	$SaS \in \Delta \Rightarrow Sa^{\square}P \in \Delta$	2; $\forall_и$
7.	$Sa^{\square}P \in \Delta$	5,6; $\Rightarrow_и$

Докажем обратное утверждение.

I. $Sa^{\square}P \in \Delta$ допущение

+2. $MaS \in \Delta$

3. $(Sa^{\square}P \& MaS) \supset Ma^{\square}P \in \Delta$ А7, (а)

4. $Ma^{\square}P \in \Delta$ I,2,3; (г),(б)

5. $\dot{\forall} M (MaS \in \Delta \Rightarrow Ma^{\square}P \in \Delta)$ 4; $\Rightarrow_в$, $\dot{\forall}_в$

6. $\varphi(S) \subseteq \psi^{+}(P)$ 5;опр. φ, ψ^{+} и $\subseteq$

7. $Sa^{\square}P \supset SaS \in \Delta$ теорема, (а)

8. $SaS \in \Delta$ I,7; (б)

9. $\dot{\exists} Q (QaS \in \Delta)$ 8; $\dot{\exists}_в$

IO. $\varphi(S) \neq \emptyset$ 9; опр. φ.

II. $|Sa^{\square}P| = и$ 6,IO; $\&_в$,И5

6) $A \equiv Si^{\square}P$. Покажем, что $|Si^{\square}P| = и \Rightarrow Si^{\square}P \in \Delta$.

I. $|Si^{\square}P| = и$, т.е. $\dot{\exists} M ((|MaS| = и$ и $|Ma^{\square}P| = и)$ или $(|Ma^{\square}S| = и$ и $|MaP| = и))$ допущение

2. $(Ma^{\square}P \& MaS) \vee (MaP \& Ma^{\square}S) \in \Delta$ I; $\dot{\exists}_и$, п.I,5 базиса,(г),(д)

3. $(Ma^{\square}P \& MaS) \supset Si^{\square}P \in \Delta$ А8, (а)

4. $(MaP \& Ma^{\square}S) \supset Si^{\square}P \in \Delta$ А9, (а)

5. $Si^{\square}P \in \Delta$ 2,3,4; (а),(б)

Докажем обратное утверждение.

I. $Si^{\square}P \in \Delta$ допущение

2. $\dot{\exists} M ((MaS \& Ma^{\square}P) \vee (Ma^{\square}S \& MaP) \in \Delta)$ I; (з)

3. $\dot{\exists} M ((|MaS| = и$ и $|Ma^{\square}P| = и)$ или $(|Ma^{\square}S| = и$ и $|MaP| = и))$ 2;(г),(д), п.I,5 базиса

4. $|Si^{\square}P| = и$ 3;И6

7) $A \equiv Se^{\square}P$. Покажем, что $|Se^{\square}P| = и \Rightarrow Se^{\square}P \in \Delta$.

I. $|Se^{\square}P| = и$, т.е. $\dot{\forall} M_1 \dot{\forall} M_2 (|M_1aS| = и$ и $|M_2aP| = и \Rightarrow \varphi(M_1) \subseteq \psi^{-}(M_2)$ и $\varphi(M_2) \subseteq \psi^{-}(M_1))$ и $\varphi(S) \neq \emptyset$ и $\varphi(P) \neq \emptyset$. доп.

Легко показать, что т.к. $\varphi(S) \neq \emptyset$ и $\varphi(P) \neq \emptyset$, то

2. $SaS \in \Delta$ и $PaP \in \Delta$

3. $|SaS| = и$ и $|PaP| = и$ 2; п.I базиса

4. $|SaS| = и$ и $|PaP| = и \Rightarrow \varphi(S) \subseteq \psi^{-}(P)$ и $\varphi(P) \subseteq \psi^{-}(S)$ I; $\&_и$, $\dot{\forall}_и$

5. $\varphi(S) \subseteq \psi^{-}(P)$ 4,3; $\Rightarrow_и$, $\&_и$

6. $\dot{\forall} M (MaS \in \Delta \Rightarrow Me^{\square}P \in \Delta)$ 5;опр. φ, ψ^{-} и $\subseteq$

7. $SaS \in \Delta \Rightarrow Se^{\square}P \in \Delta$ 6; $\dot{\forall}_и$

8. $Se^{\square}P \in \Delta$ 7,2; $\Rightarrow_и$

Докажем обратное утверждение.

I. $Se^{\square}P \in \Delta$ допущение

2. $Se^{\square}P \supset (SaS \& PaP) \in \Delta$ теорема, (а)

3. $SaS \in \Delta$ и $PaP \in \Delta$ — I,2; (б),(г)
4. $\varphi(S) \neq \emptyset$ и $\varphi(P) \neq \emptyset$ — 3; опр. φ
+5. $|M_1 a S| = и$ и $|M_2 a P| = и$
6. $M_1 a S \in \Delta$ и $M_2 a P \in \Delta$ — 5; п.I базиса
+7. $Q a M_1 \in \Delta$
8. $(M_1 a S \& Q a M_1) \supset Q a S \in \Delta$ — AI, (г)
9. $Q a S \in \Delta$ — 6,7,8; (г),(б)
I0. $(S e^{\square} P \& Q a S \& M_2 a P) \supset Q e^{\square} M_2 \in \Delta$ — теорема, (а)
II. $Q e^{\square} M_2 \in \Delta$ — I,9,6,I0; (г),(б)
I2. $\dot{\forall} Q\,(Q a M_1 \in \Delta \Rightarrow Q e^{\square} M_2 \in \Delta)$ — II; $\Rightarrow_в$, $\dot{\forall}_в$

Аналогично можно получить

I3. $\dot{\forall} Q\,(Q a M_2 \in \Delta \Rightarrow Q e^{\square} M_1 \in \Delta)$
I4. $\varphi(M_1) \subseteq \psi^-(M_2)$ и $\varphi(M_2) \subseteq \psi^-(M_1)$ — I2,I3; опр. φ, ψ^- и $\subseteq$
I5. $\dot{\forall} M_1 \dot{\forall} M_2 ((|M_1 a S| = и$ и $|M_2 a P| = и) \Rightarrow \varphi(M_1) \subseteq \psi^-(M_2)$ и $\varphi(M_2) \subseteq \psi^-(M_1))$ — I4; $\Rightarrow_в$, $\dot{\forall}_в$
I6. $|S e^{\square} P| = и$ — I5,4; $\&_в$, И7

8) $A \equiv S o^{\square} P$. Покажем, что $|S o^{\square} P| = и \Rightarrow S o^{\square} P \in \Delta$.

I. $|S o^{\square} P| = и$, т.е. $\dot{\exists} M\,(|M a S| = и$ и $|M e^{\square} P| = и)$ — доп.
2. $M e^{\square} P \& M a S \in \Delta$ — I; $\exists_и$, п.I базиса, (г)
3. $(M e^{\square} P \& M a S) \supset S o^{\square} P \in \Delta$ — AII, (а)
4. $S o^{\square} P \in \Delta$ — 2,3; (б)

Докажем обратное утверждение.

I. $S o^{\square} P \in \Delta$ — допущение
2. $\dot{\exists} M\,(M e^{\square} P \& M a S \in \Delta)$ — I; (и)
3. $\dot{\exists} M\,(|M a S| = и$ и $|M e^{\square} P| = и)$ — 2;(г),п.I,7 базиса
4. $|S o^{\square} P| = и$ — 3; И8

Индуктивный переход леммы 2.I доказывается тривиально. Далее стандартным образом доказывается метатеорема о полноте:

<u>МТ 2.I.</u> Всякая формула, общезначимая в классе моделей типа $\langle \mathfrak{D}, \varphi, \psi^+, \psi^- \rangle$, доказуема в системе аподиктической силлогистики.

Из МТ I.I и МТ 2.I следует адекватность аксиоматического исчисления аподиктической силлогистики аристотелевского типа предложенной в настоящей работе семантике.

Литература.

I. Аристотель. Первая Аналитика. Соч., т.2, М., 1978.

2. Бочаров В.А. Аристотель и традиционная логика (Анализ силлогистических теорий). М., 1984 (в печати).
3. Бочаров В.А., Маркин В.И. Совещание по проблемам силлогистики.- Философские науки, №2, 1983.
4. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
5. Мчедлишвили Л.И. Эктезис в ассерторической силлогистике Аристотеля.- В сб.: Симпозиум по логике Аристотеля (тезисы докладов). Тбилиси, 1983.
6. Мчедлишвили Л.И. Интерпретация аподиктической силлогистики Аристотеля.- В сб.: Симпозиум по логике Аристотеля (тезисы докладов). Тбилиси, 1983.
7. Смирнов В.А. Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов.- В сб.: Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1980.