2017 г. март — апрель *т. 72, вып. 2 (434)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 515.14+515.16+514.15

Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками

В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак

Семейство замкнутых многообразий называется когомологически жёстким, если изоморфизм колец когомологий влечёт диффеоморфизм для любых двух многообразий из этого семейства. В центре внимания обзора – результаты о когомологической жёсткости для широких семейств шестимерных и трёхмерных многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками.

Рассматривается класс $\mathscr{P}$ трёхмерных комбинаторных простых многогранников P, отличных от тетраэдра, грани которых не образуют 3- и 4-поясов. Этот класс содержит все математические фуллерены, т. е. простые трёхмерные многогранники, имеющие лишь пятиугольные и шестиугольные грани. Согласно теореме Погорелова, многогранник из класса $\mathscr{P}$ допускает прямоугольную реализацию в пространстве Лобачевского, которая единственна с точностью до изометрии.

Изучаемые семейства гладких многообразий ассоциированы с многогранниками из класса $\mathscr{P}$. Первое семейство составляют трёхмерные малые накрытия над многогранниками из $\mathscr{P}$ или, эквивалентно, гиперболические 3-многообразия типа Лёбелля. Второе семейство состоит из шестимерных квазиторических многообразий над многогранниками из $\mathscr{P}$. Наш основной результат заключается в том, что оба эти семейства являются когомологически жёсткими, т. е. два многообразия M и M' из любого из этих семейств диффеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их кольца когомологий. Более того, доказывается, что если M и M' диффеоморфны, то соответствующие многогранники P и P' комбинаторно эквивалентны. Эти результаты переплетаются с классическими сюжетами геометрии и топологии, которые составили обзорную часть нашей статьи. Речь идёт о комбинаторике трёхмерных многогранников, теореме о четырёх красках, асферических многообразиях, классификации гладких шестимерных многообразий и инвариантности классов Понтрягина. Доказательства в основной части статьи используют технику торической топологии.

Библиография: 68 названий.

Ключевые слова: квазиторическое многообразие, момент-угол-многообразие, гиперболическое многообразие, малое накрытие, простой многогранник, прямоугольный многогранник, кольцо когомологий, когомологическая жёсткость.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9759

Работа первого, второго и четвёртого авторов поддержана РФФИ (гранты № 17-01-00671 и 16-51-55017-ГФЕН). Второй автор поддержан также грантом "Молодая математика России". Третий автор поддержан грантом № 16K05152 Японского фонда содействия науке (JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C)).

Содержание

1. Введение . . . 4
2. Предварительные сведения . . . 8
2.1. Простые многогранники . . . 8
2.2. Торические многообразия . . . 9
2.3. Квазиторические многообразия . . . 11
2.4. Малые накрытия . . . 14
2.5. Прямоугольные многогранники и гиперболические многообразия . . . 15
2.6. Топологические торические многообразия . . . 19
2.7. Симплициальные комплексы и кольца граней . . . 19
2.8. Момент-угол-комплексы и многообразия . . . 20
2.9. Когомологии момент-угол-комплексов . . . 21
2.10. Момент-угол-многообразия, квазиторические многообразия и малые накрытия . . . 24
3. Когомологическая жёсткость . . . 26
4. Класс Погорелова: флаговые 3-многогранники без 4-поясов . . . 30
5. Основные результаты . . . 34
6. Классификация шестимерных многообразий и смежные вопросы . . . 39
Приложение A. Пояса в 3-многогранниках . . . 41
Приложение B. Комбинаторика и конструкции многогранников Погорелова . . . 48
Приложение C. Доказательство леммы 4.5 . . . 56
Приложение D. Доказательство леммы 4.11 . . . 59
Список литературы . . . 62

1. Введение

Следующий наивный вопрос восходит к истокам дифференциальной топологии: для каких гладких многообразий M и M' изоморфизм колец целочисленных когомологий $H^*(M) \cong H^*(M')$ влечёт диффеоморфность M и M'? Разумеется, в общем случае такая импликация неверна, и в XX в. топологами были найдены многие важные серии многообразий, для которых кольцо когомологий или даже гомотопический тип не определяет класс диффеоморфизма. Трёхмерные линзовые пространства, экзотические сферы Милнора и четырёхмерные многообразия Дональдсона дают известные примеры разного уровня сложности. Многие интересные примеры появляются в размерности 6, которой в нашем обзоре уделяется особое внимание. Имеется семейство "фальшивых" комплексных проективных 3-пространств, т. е. односвязных гладких шестимерных многообразий, кольца когомологий которых изоморфны кольцу когомологий пространства $\mathbb{C}P^3$. Все такие многообразия гомотопически эквивалентны $\mathbb{C}P^3$, но, вообще говоря, попарно не диффеоморфны.

Будем говорить, что семейство замкнутых многообразий является *когомологически жёстким*, если изоморфизм колец когомологий $H^*(M) \cong H^*(M')$ влечёт диффеоморфизм $M \cong M'$ для любых двух многообразий из этого семейства.

В данной работе устанавливается когомологическая жёсткость двух семейств многообразий размерности 3 и 6 соответственно. Каждое из этих семейств происходит из важного класса комбинаторных многогранников, который мы называем *классом Погорелова* $\mathscr{P}$. Он состоит из трёхмерных простых многогранников, которые являются флаговыми и не имеют 4-поясов из граней. В частности, многогранники из класса $\mathscr{P}$ не имеют треугольных и четырёхугольных граней. В класс $\mathscr{P}$ входят все математические фуллерены, т. е. простые 3-многогранники, имеющие лишь пятиугольные и шестиугольные грани. Математические фуллерены представляют особый интерес, так как они дают модели физических фуллеренов – молекул углерода, за открытие которых была присуждена Нобелевская премия по химии 1996 г. (см. [9]).

Согласно результатам А. В. Погорелова [56] и Е. М. Андреева [1], класс $\mathscr{P}$ совпадает с классом комбинаторных 3-многогранников, которые реализуются в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ (гиперболическом пространстве) таким образом, что угол между любыми двумя соседними гранями является прямым. Для краткости мы называем такие многогранники *прямоугольными*.

Условия, выделяющие класс Погорелова $\mathscr{P}$, использовались под названием "не-$\triangle$-условие" и "не-$\square$-условие" в конструкции М. Громова [35] кусочно евклидовых кубических пространств неположительной кривизны. Последняя определяется в терминах сравнительного неравенства Александрова–Топоногова (так называемого CAT(0)-*неравенства*). М. Громовым было доказано, что неположительность кривизны (в CAT(0)-смысле) эквивалентна не-$\triangle$-условию (отсутствию 3-поясов в двойственном многограннике), в то время как не-$\square$-условие (отсутствие 4-поясов) влечёт строгую отрицательность кривизны. Как отмечено в [35; § 4.6], барицентрическое подразделение любого многогранника удовлетворяет не-$\triangle$-условию, но добиться выполнения не-$\square$-условия сложнее. Благодаря многогранникам Погорелова и фуллеренам мы теперь имеем очень широкий класс многогранников, удовлетворяющих обоим условиям. Так, из результатов У. Тёрстона [60] следует, что число комбинаторно не эквивалентных фуллеренов с p_6 шестиугольными гранями растёт как p_6^9. Кроме того, мы показываем в следствии B.16, что для любого конечного набора неотрицательных целых чисел p_k, $k \geqslant 7$, существует многогранник Погорелова, у которого число k-угольных граней равно p_k.

Наше первое семейство состоит из *гиперболических 3-многообразий типа Лёбелля*. Термин появился в работе А. Ю. Веснина [61], в которой были введены и изучались эти многообразия. Они строятся по прямоугольным реализациям многогранников из класса Погорелова $\mathscr{P}$ (см. подробности в п. 2.5). Каждое гиперболическое 3-многообразие N типа Лёбелля составлено из восьми экземпляров многогранника $P \in \mathscr{P}$ и является его разветвлённым накрытием – *малым накрытием* над P в смысле М. Дэвиса и Т. Янушкевича [27]. Мы доказываем (см. теорему 5.6), что два таких многообразия N и N' диффеоморфны (или изометричны) тогда и только тогда, когда изоморфны их кольца когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Гиперболические 3-многообразия типа Лёбелля являются асферическими, а их фундаментальные группы являются конечными расширениями коммутантов гиперболических групп отражений – прямоугольных групп Коксетера. Наш результат о когомологической жёсткости имеет чисто алгебраическую интерпретацию: фундаментальные группы многообразий N различаются своими кольцами $\mathbb{Z}_2$-когомологий. Другой пример такой ситуации был изучен в работе [41]: там было показано, что фундаментальные группы малых накрытий, допускающих плоскую риманову метрику (т. е. малых накрытий над n-кубами), различаются своими кольцами $\mathbb{Z}_2$-когомологий (см. также [21]).

В связи с этим отметим известную проблему: описать класс групп, которые реализуются как фундаментальные группы конечных клеточных комплексов. Согласно гипотезе Арнольда–Тома–Фама, в этом классе лежат все группы Артина (в том числе те, для которых соответствующая группа Коксетера бесконечна). В [17] эта гипотеза доказана для большинства групп Артина, включая прямоугольные.

Второе семейство многообразий происходит из торической топологии: оно состоит из квазиторических (или топологических торических) многообразий, соответствующих многогранниками из класса $\mathscr{P}$. Эти многообразия являются шестимерными гладкими многообразиями с действием трёхмерного тора T^3 и пространством орбит $P \in \mathscr{P}$. Мы показываем (см. теорему 5.2 и следствие 5.4), что это семейство является когомологически жёстким, т. е. два многообразия M и M' из данного семейства диффеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их кольца когомологий. В общем случае из диффеоморфизма квазиторических многообразий M и M', не согласованного с действием тора, не вытекает комбинаторная эквивалентность соответствующих многогранников P и P', однако это так в случае, когда многогранники лежат в классе $\mathscr{P}$ (см. теорему 5.2).

Наши доказательства используют комбинаторную и топологическую технику торической топологии. А именно, мы сводим трёхмерное утверждение (теорему 5.6) к шестимерному (теореме 5.2), используя тот факт, что кольцо когомологий малого накрытия и кольцо когомологий квазиторического многообразия (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) имеют одинаковую структуру и различаются только градуировкой. Затем мы поднимаем размерность ещё выше, сводя шестимерное утверждение к некоторым когомологическим свойствам момент-угол-многообразий размерности $m+3$, где m – число двумерных граней многогранника Погорелова. Переход к момент-угол-многообразиям позволил применить ряд нетривиальных комбинаторных и алгебраических лемм, полученных Ф. Фаном, Дж. Ма и К. Вангом [33], [34] при доказательстве когомологической жёсткости момент-угол-комплексов флаговых двумерных сфер, не содержащих бесхордовых циклов длины 4. Семейства многогранников из $\mathscr{P}$ были использованы в [9], [10] при построении фуллеренов.

Остаётся открытым следующий вопрос: является ли всё семейство торических или топологических торических многообразий когомологически жёстким? Удивительно, что до сих пор не найдено ни одного контрпримера к этой общей “торической проблеме когомологической жёсткости”. Этот вопрос является актуальным в связи с классическими задачами классификации односвязных многообразий и проблемой когомологической инвариантности характеристических классов Понтрягина.

В вещественной размерности 6 семейства квазиторических и топологических торических многообразий совпадают и строго содержат семейство (гладких полных алгебраических) торических многообразий. При этом семейство квазиторических (или топологических торических) многообразий над многогранниками из класса $\mathscr{P}$ является очень большим, так как каждый простой 3-многогранник является пространством орбит квазиторического многообразия. Действительно, благодаря теореме о четырёх красках каждый простой 3-многогранник допускает так называемую “характеристическую функцию” (см. предложение 2.9); это замечательное наблюдение принадлежит М. Дэвису и Т. Янушкевичу [27]. Алгебраические торические многообразия, для которых пространство орбит лежит в классе $\mathscr{P}$, встречаются реже, но существуют; много конкретных примеров было построено в недавней работе Ю. Суямы [59]. Среди них, однако, отсутствуют *проективные* торические многообразия. Это следует из результата К. Делоне [29], согласно которому дельзанов 3-многогранник должен иметь хотя бы одну треугольную или четырёхугольную грань.

Обсуждаемая задача о когомологической жёсткости торических многообразий тесно связана с классической задачей алгебраической и дифференциальной топологии о гладкой классификации односвязных многообразий. Основы этой классификации в размерностях $\geqslant 5$ были заложены в работах У. Браудера и С. П. Новикова (см. [6], [52]). С. П. Новиков показал в [51], что для данного односвязного многообразия M размерности $\geqslant 5$ имеется лишь конечное число многообразий M', для которых существует гомотопическая эквивалентность $M \xrightarrow{\simeq} M'$, сохраняющая классы Понтрягина. Там же был отдельно рассмотрен случай малых размерностей 5, 6, 7. Именно в размерности 6 впервые появляются примеры, показывающие, что рациональные классы Понтрягина не являются гомотопически инвариантными. Следующая постановка задачи классификации тесно связана с вопросом о когомологической жёсткости: при каких дополнительных условиях изоморфизм колец целочисленных когомологий влечёт диффеоморфизм многообразий? В этой постановке полные классификационные результаты в размерности 6 были получены в работах Т. Уолла [66], П. Джуппа [40] и А. В. Жубра [67].

Торические, квазиторические и топологические торические многообразия M являются односвязными, а их кольца когомологий $H^*(M)$ порождены двумерными классами. В этом случае, используя результаты классической гомотопической топологии, классификационный результат из [66] и [40] можно усилить: два таких 6-многообразия диффеоморфны, если существует изоморфизм их колец когомологий, сохраняющий первый целочисленный класс Понтрягина p_1 (см. раздел 6). Таким образом, торическая проблема когомологической жёсткости в размерности 6 сводится к задаче об инвариантности класса p_1 при изоморфизмах колец целочисленных когомологий. Эта задача формулируется исключительно в рамках комбинаторики и линейной алгебры. Однако нам не удалось найти прямое доказательство инвариантности класса p_1 при изоморфизмах колец когомологий торических многообразий над 3-многогранниками из класса $\mathscr{P}$. Один из наших основных результатов (теорема 5.2) представляет собой результат о классификации широкого семейства односвязных шестимерных многообразий. Отметим, что наше доказательство не зависит от общих классификационных результатов работ [66] и [40].

Авторы весьма признательны

– Андрею Юрьевичу Веснину за помощь в описании связи наших результатов с гиперболической геометрией, в частности с гиперболическими 3-многообразиями типа Лёбелля и теоремой Погорелова о прямоугольных 3-многогранниках;

– Александру Александровичу Гайфуллину за привлечение нашего внимания к “не-□-условию” Зибенманна в теории гиперболических групп Громова, которое в случае многогранников эквивалентно отсутствию 4-поясов;

– Сергею Петровичу Новикову за полезное и стимулирующее обсуждение задач и результатов гладкой классификации односвязных многообразий и инвариантности классов Понтрягина;

– Фейфею Фану за обсуждение результатов работ [33] и [34] о когомологической жёсткости момент-угол-комплексов.

Мы благодарим Институт математических наук Национального университета Сингапура и организаторов программы по комбинаторной и торической гомотопии на базе этого института за предоставленную возможность обмениваться идеями, заложившими основы этой работы. Мы также благодарим программу Японского фонда содействия науке (JSPS) в Математическом институте Университета Осаки (OCAMI), в рамках которой сложился наш авторский коллектив.

2. Предварительные сведения

В этом разделе собрана необходимая информация о торических многообразиях, квазиторических многообразиях и момент-угол-многообразиях. Подробности можно найти в монографии [14]. Мы также приводим сведения о малых накрытиях и гиперболических многообразиях.

2.1. Простые многогранники. Рассмотрим n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$. *Выпуклым многогранником* P называется непустое ограниченное пересечение конечного числа полупространств в $\mathbb{R}^n$:

$$P = \bigl\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + b_i \geqslant 0 \text{ для } i = 1, \dots, m\bigr\}, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$ и $b_i \in \mathbb{R}$. Мы часто будем фиксировать систему неравенств (2.1) наряду с многогранником P. Будем предполагать, что многогранник P имеет размерность n, т. е. размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего P, равна n. Также будем предполагать, что ни одно из неравенств $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + b_i \geqslant 0$ в (2.1) не является лишним, т. е. ни одно неравенство нельзя убрать, не меняя множество P. Тогда многогранник P имеет m *гиперграней* $F_1, \dots, F_m$, где

$$F_i = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + b_i = 0\}.$$

Каждая гипергрань является многогранником размерности $n-1$. *Гранью* многогранника P называется непустое пересечение гиперграней. Нульмерные грани называются *вершинами*, а одномерные – *рёбрами*.

Многогранник размерности n будем называть *n-многогранником*.

Два многогранника P и Q называются *комбинаторно эквивалентными* (обозначение: $P \simeq Q$), если существует биекция между их гранями, сохраняющая отношение включения. *Комбинаторным многогранником* называется класс комбинаторной эквивалентности многогранников.

Графом многогранника P называется граф G_P из его вершин и рёбер. Граф называется *простым*, если он не содержит петель и кратных рёбер. Связный граф G называется 3-*связным*, если он имеет не меньше 6 рёбер и остаётся связным после удаления из него любых одной или двух вершин со всеми содержащими их рёбрами. Следующий классический результат описывает графы 3-многогранников.

Теорема 2.1 (Э. Штейниц, см. [68; теорема 4.1]). *Граф G является графом 3-многогранника тогда и только тогда, когда он простой, планарный и 3-связный.*

Многогранник P называется *простым*, если в каждой его вершине сходится в точности n гиперграней. Простой многогранник P называется *флаговым*, если любой набор его гиперграней, которые пересекаются попарно, имеет непустое пересечение. *Симплекс* Δ^n не является флаговым при $n \geqslant 2$. *Куб* I^n является флаговым для любого n.

В простом 3-многограннике k-*поясом* (или k-*угольным призматическим элементом*) называется циклическая последовательность $\mathscr{B}_k = (F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$ из $k \geqslant 3$ граней, в которой две грани пересекаются в том и только том случае, когда они являются соседними в этой последовательности (F_{i_k} и F_{i_1} также считаются соседними), и никакие три грани не имеют общей вершины.

Любая треугольная грань в 3-многограннике $P \neq \Delta^3$ окружена 3-поясом. Простой 3-многогранник $P \neq \Delta^3$ является флаговым тогда и только тогда, когда он не содержит 3-поясов.

Фуллереном называется простой 3-многогранник, имеющий лишь пятиугольные и шестиугольные грани. Простое вычисление, использующее эйлерову характеристику, показывает, что число пятиугольных граней в любом фуллерене равно 12. Количество шестиугольных граней может быть любым за исключением 1 (см. [31; предложение 2]). Кроме того, любой фуллерен является флаговым многогранником и не имеет 4-поясов (см. [32] и [9; следствие 3.16]).

2.2. Торические многообразия. *Торическим многообразием* называется нормальное комплексное алгебраическое многообразие V, содержащее алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^n$ в качестве открытого по Зарискому подмножества таким образом, что естественное действие тора $(\mathbb{C}^\times)^n$ на себе продолжается до действия на всём многообразии V. Мы будем рассматривать лишь неособые полные (компактные в обычной топологии) торические многообразия[1].

Имеется взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма комплексных n-мерных торических многообразий и полных неособых вееров в $\mathbb{R}^n$. *Веером* называется конечный набор $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ строго выпуклых полиэдральных конусов σ_i в $\mathbb{R}^n$ такой, что любая грань конуса из Σ лежит

[1] В английском языке для общих торических многообразий используется термин *toric variety*, в то время как неособые полные торические многообразия называются *toric manifolds*. Однако на русский язык оба этих термина переводятся одинаково.

в Σ и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них. Веер Σ называется *неособым* (или *регулярным*), если каждый его конус σ_j порождается частью базиса решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Каждый одномерный конус такого веера Σ порождён примитивным вектором $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{Z}^n$. Веер Σ называется *полным*, если объединение всех его конусов есть всё пространство $\mathbb{R}^n$.

Особый интерес представляют проективные торические многообразия. Каждое проективное (неособое) торическое многообразие V задаётся решёточным дельзановым многогранником P. Для простого n-многогранника P с вершинами в точках решётки $\mathbb{Z}^n$ его *нормальный веер* Σ_P имеет n-мерные конусы σ_v, соответствующие вершинам v многогранника P; при этом конус σ_v порождён примитивными направленными внутрь нормалями к гиперграням, сходящимся в вершине v. Многогранник P называется *дельзановым*, если его нормальный веер Σ_P является неособым. Веер Σ_P задаёт проективное торическое многообразие V_P. Различные решёточные дельзановы многогранники с одним и тем же нормальным веером задают различные проективные вложения одного торического многообразия.

Неприводимые подмногообразия коразмерности один в V, инвариантные под действием тора, соответствуют одномерным конусам веера Σ. В случае, когда многообразие V является проективным, они соответствуют гиперграням многогранника P. Пусть имеется всего m одномерных конусов (или гиперграней); обозначим соответствующие примитивные векторы через $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$, а соответствующие подмногообразия коразмерности один через $V_1, \dots, V_m$.

Теорема 2.2 (В. И. Данилов, Е. Юркевич, см. [14; теорема 5.3.1]). *Пусть V – торическое многообразие комплексной размерности n с соответствующим полным неособым веером Σ. Кольцо когомологий $H^*(V;\mathbb{Z})$ порождено двумерными классами $[v_i]$, двойственными к инвариантным подмногообразиям V_i, и задаётся следующим образом*:

$$H^*(V;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathscr{I}, \qquad \deg v_i = 2,$$

где $\mathscr{I}$ – идеал, порождённый элементами следующих двух типов:

(a) $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, *где векторы $\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_k}$ не порождают конус в Σ*;

(b) $\sum\limits_{i=1}^{m} \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle v_i$ *для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$*.

Удобно рассмотреть целочисленную $(n \times m)$-матрицу

$$\varLambda = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

столбцы которой суть векторы $\boldsymbol{a}_i$, записанные в стандартном базисе решётки $\mathbb{Z}^n$. Тогда идеал (b) в теореме 2.2 порождён n линейными формами $a_{j1}v_1 + \dots + a_{jm}v_m$, соответствующими строкам матрицы $\varLambda$.

Факторпространство проективного торического многообразия V_P по действию компактного тора $T^n \subset (\mathbb{C}^\times)^n$ есть многогранник P. Если торическое многообразие V не является проективным, то факторпространство V/T^n имеет структуру граней, задающую на нём структуру *многообразия с углами.* Эта структура граней локально устроена как грани простого выпуклого многогранника, но глобально может не происходить ни из какого комбинаторного многогранника. Однако в трёхмерном случае факторпространство V/T^3 всегда комбинаторно эквивалентно простому 3-многограннику; это вытекает из теоремы Штейница (теоремы 2.1).

2.3. Квазиторические многообразия. М. Дэвисом и Т. Янушкевичем [27] была предложена топологическая конструкция многообразий, обобщающих проективные торические многообразия. Эти многообразия впоследствии стали известны как квазиторические.

Квазиторическим многообразием над комбинаторным простым n-многогранником P называется топологическое многообразие M размерности $2n$ с локально стандартным действием тора T^n и проекцией $\pi\colon M \to P$, слоями которой являются орбиты T^n-действия. (Действие тора T^n на M называется *локально стандартным*, если каждая точка $x \in M$ содержится в T^n-инвариантной окрестности, эквивариантно гомеоморфной открытому подмножеству в $\mathbb{C}^n$ с линейным эффективным действием тора T^n. Пространство орбит локально стандартного действия тора имеет структуру многообразия с углами. Для квазиторического многообразия M пространство орбит M/T^n гомеоморфно многограннику P.)

Не каждый простой многогранник может быть пространством орбит квазиторического многообразия. Тем не менее квазиторические многообразия образуют намного более широкий класс, чем проективные торические многообразия, и во многом более удобны для топологических конструкций.

Пусть $\mathscr{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ – множество гиперграней многогранника P. Каждое $M_i = \pi^{-1}(F_i)$ является квазиторическим подмногообразием коразмерности 2 в M и называется *характеристическим подмногообразием.* Характеристические подмногообразия $M_i \subset M$ являются аналогами инвариантных дивизоров V_i на торическом многообразии V. Каждое подмногообразие M_i неподвижно под действием замкнутой одномерной подгруппы (окружности) $T_i \subset T^n$ и поэтому соответствует примитивному вектору $\lambda_i \in \mathbb{Z}^n$, определяемому с точностью до знака. Выбор направления вектора λ_i эквивалентен выбору ориентации нормального расслоения $\nu(M_i \subset M)$ или выбору ориентации на M_i при условии, что само M ориентировано. *Полиориентацией* квазиторического многообразия M называется выбор ориентации M и каждого характеристического подмногообразия M_i.

Векторы λ_i являются аналогами образующих $\boldsymbol{a}_i$ одномерных конусов веера, соответствующего торическому многообразию V, или аналогами нормальных векторов к гиперграням многогранника P в случае, когда многообразие V проективно. Однако, вообще говоря, векторы λ_i не обязаны быть нормалями к гиперграням многогранника P.

Имеется следующий аналог теоремы 2.2 для квазиторических многообразий.

Теорема 2.3 [27]. *Пусть M – полиориентированное квазиторическое многообразие размерности $2n$ над простым n-многогранником P. Кольцо когомологий $H^*(M;\mathbb{Z})$ порождено двумерными классами $[v_i]$, двойственными к ори-*

ентированным подмногообразиям M_i, *и задаётся следующим образом*:

$$H^*(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{I}, \qquad \deg v_i = 2,$$

где $\mathscr{I}$ – *идеал, порождённый элементами следующих двух типов*:

(a) $v_{i_1}\cdots v_{i_k}$, *где* $F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_k}=\varnothing$ *в* P;

(b) $\sum\limits_{i=1}^{m}\langle\lambda_i,\boldsymbol{x}\rangle v_i$ *для любого вектора* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^n$.

Нам понадобится простое следствие.

Следствие 2.4. *В обозначениях теоремы* 2.3 *справедливы следующие утверждения*:

(a) *произведение* $[v_{i_1}]\cdots[v_{i_n}]$ *различных* n *классов является образующей группы* $H^{2n}(M)\cong\mathbb{Z}$, *если* $F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}\neq\varnothing$, *и равно нулю в противном случае*;

(b) *при* $i\neq j$ *имеем* $[v_i][v_j]=0$ *тогда и только тогда, когда* $F_i\cap F_j=\varnothing$.

По аналогии с (2.2) введём целочисленную *характеристическую матрицу*

$$\varLambda=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \dots & \lambda_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nm}\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

столбцы которой суть векторы λ_i, записанные в стандартном базисе решётки $\mathbb{Z}^n$. Матрица $\varLambda$ обладает следующим свойством:

$$\det(\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n})=\pm1, \quad \text{если } F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}\neq\varnothing \text{ в } P. \tag{2.4}$$

Заметим, что идеал (b) в теореме 2.3 порождён n линейными формами $\lambda_{j1}v_1+\dots+\lambda_{jm}v_m$, соответствующими строкам матрицы $\varLambda$.

Отображение

$$\lambda\colon \mathscr{F}\to\mathbb{Z}^n, \quad F_i\mapsto\lambda_i,$$

удовлетворяющее условию (2.4), называется *характеристической функцией* простого n-многогранника P. Характеристической функции λ мы можем поставить в соответствие характеристическую матрицу $\varLambda$, зафиксировав порядок гиперграней. *Характеристическая пара* $(P,\varLambda)$ состоит из простого многогранника P с фиксированным порядком гиперграней и его характеристической матрицы $\varLambda$.

Квазиторическое многообразие M задаёт характеристическую пару $(P,\varLambda)$. С другой стороны, каждая характеристическая пара задаёт квазиторическое многообразие при помощи следующей конструкции.

Конструкция 2.5 [27]. Пусть $(P,\varLambda)$ – характеристическая пара. Для каждой гиперграни F_i многогранника P обозначим через T_i одномерную подгруппу в $T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, соответствующую i-му столбцу $\lambda_i\in\mathbb{Z}^n$ характеристической матрицы $\varLambda$. Для каждой точки $x\in P$ определим тор

$$T(x)=\prod_{i\colon x\in F_i}T_i,$$

где предполагается, что $T(x) = \{1\}$, если x не содержится ни в одной гиперграни. Из свойства (2.4) следует, что $T(x)$ вкладывается как подгруппа в T^n. Теперь положим

$$M(P, \Lambda) = P \times T^n / \sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ задаётся следующим образом:

$$(x, t) \sim (x', t'), \quad \text{если } x = x' \text{ и } t' - t \in T(x).$$

Можно показать, что $M(P, \Lambda)$ является квазиторическим многообразием над P.

Замена базиса в решётке соответствует умножению матрицы Λ слева на матрицу из $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. При изменении ориентации i-го характеристического подмногообразия M_i в полиориентации i-й столбец матрицы Λ умножается на -1. Комбинаторная эквивалентность между многогранниками P и P' позволяет отождествить их множества гиперграней $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$, а также их характеристические функции. Эти наблюдения приводят к следующему определению.

Определение 2.6. Две характеристические пары (P, Λ) и (P', Λ') называются *эквивалентными*, если

(a) существует комбинаторная эквивалентность $P \simeq P'$ и

(b) $\Lambda' = A\Lambda B$, где $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, а B есть диагональная $(m \times m)$-матрица с ± 1 на диагонали.

Квазиторические многообразия $M(P, \Lambda)$ и $M(P', \Lambda')$, соответствующие эквивалентным характеристическим парам, эквивариантно диффеоморфны (в слабом смысле). Последнее означает, что существует гомеоморфизм

$$f\colon M(P, \Lambda) \xrightarrow{\cong} M(P', \Lambda')$$

такой, что

$$f(t \cdot x) = \psi(t) \cdot f(x) \quad \text{для любых } t \in T^n \text{ и } x \in M(P, \Lambda),$$

где $\psi\colon T^n \to T^n$ – автоморфизм тора, задаваемый матрицей A. Более того, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.7 (см. [27; предложение 1.8], [14; предложение 7.3.8]). *Имеется взаимно однозначное соответствие между классами эквивариантного гомеоморфизма квазиторических многообразий и классами эквивалентности характеристических пар. В частности, для любого квазиторического многообразия M над многогранником P с характеристической матрицей Λ существует эквивариантный гомеоморфизм $M \cong M(P, \Lambda)$.*

Замечание 2.8. И M, и $M(P, \Lambda)$ были определены в [27] как топологические многообразия. Многообразие $M(P, \Lambda)$ может быть снабжено канонической гладкой структурой как факторпространство момент-угол-многообразия $\mathscr{Z}_P$ по гладкому свободному действию тора (см. [16] и п. 2.10 далее). Однако для гладкого квазиторического многообразия M существование *диффеоморфизма* $M \cong M(P, \Lambda)$ является весьма тонким вопросом (см. обсуждение в [14; § 7.3]).

С другой стороны, в случае шестимерных квазиторических многообразий (который представляет основной интерес в данной работе) существование такого диффеоморфизма вытекает из классификационных результатов Уолла и Джуппа (см. раздел 6).

В размерностях $n \geqslant 4$ существуют простые n-многогранники, которые не допускают ни одной характеристической матрицы $\varLambda$ (см. [27; пример 1.22]). Такой многогранник не может быть пространством орбит квазиторического многообразия. С другой стороны, имеется следующее наблюдение Дэвиса и Янушкевича, которое замечательным образом использует теорему о четырёх красках.

Предложение 2.9 [27]. *Любой простой* 3*-многогранник допускает характеристическую матрицу* $\varLambda$.

Доказательство. В силу теоремы о четырёх красках существует *правильная* 4*-раскраска* гиперграней многогранника P, т. е. такое отображение $\chi\colon \mathscr{F} \to \{1,2,3,4\}$, что

$$\chi(F_i) \neq \chi(F_j), \quad \text{если } F_i \cap F_j \neq \varnothing.$$

Задав правильную 4-раскраску, поставим в соответствие грани i-го цвета i-й базисный вектор $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{Z}^3$, если $i = 1,2,3$, и вектор $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, если $i = 4$. Полученная в результате $(3 \times m)$-матрица $\varLambda$ удовлетворяет условию (2.4), так как любые три из четырёх векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ образуют базис решётки $\mathbb{Z}^3$. Предложение доказано.

Проективное торическое многообразие является квазиторическим многообразием. Непроективное квазиторическое многообразие V может не быть квазиторическим, так как пространство орбит V/T^n может не быть простым многогранником, даже комбинаторно. Первые такие примеры появляются в размерности $n = 4$ (см. [58]). Все торические многообразия комплексной размерности 3, даже непроективные, являются квазиторическими в силу теоремы Штейница (см. теорему 2.1).

2.4. Малые накрытия. Заменяя в определении квазиторического многообразия тор T^n на группу $\mathbb{Z}_2^n \subset T^n$, порождённую n коммутирующими инволюциями, мы приходим к определению малого накрытия [27]. *Малым накрытием* над простым n-многогранником P называется n-мерное многообразие N с локально стандартным действием группы $\mathbb{Z}_2^n$ и проекцией $\pi\colon N \to P$, слоями которой являются орбиты $\mathbb{Z}_2^n$-действия.

Множество вещественных точек проективного торического многообразия V_P (т. е. множество точек, неподвижных относительно комплексного сопряжения) является малым накрытием над P; его иногда называют *вещественным торическим многообразием*.

Теория малых накрытий параллельна теории квазиторических многообразий, и мы лишь обозначим наиболее важные факты.

Теорема 2.10 [27]. *Пусть N – малое накрытие над простым n-многогранником P. Кольцо когомологий $H^*(N;\mathbb{Z}_2)$ порождено одномерными классами $[v_i]$, двойственными к характеристическим подмногообразиям N_i, и задаётся следующим образом*:

$$H^*(N;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{I}, \qquad \deg v_i = 1,$$

где $\mathscr{I}$ – идеал, порождённый элементами следующих двух видов:

(a) $v_{i_1}\cdots v_{i_k}$, *где* $F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_k}=\varnothing$ *в* P;

(b) $\sum\limits_{i=1}^{m}\langle\lambda_i,\boldsymbol{x}\rangle v_i$ *для любого вектора* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_2^n$.

Характеристическая матрица $\varLambda$, соответствующая малому накрытию N, состоит из элементов группы $\mathbb{Z}_2$ и удовлетворяет тому же самому условию (2.4). Эквивалентность $\mathbb{Z}_2$-характеристических пар определяется так же, как для квазиторических многообразий, но группа $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ заменяется на $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_2)$. Малое накрытие N над P эквивариантно гомеоморфно “канонической модели”

$$N(P,\varLambda)=P\times\mathbb{Z}_2^n/\sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ определяется так же, как в случае квазиторических многообразий. Заметим, что $N(P,\varLambda)$ составлено из 2^n экземпляров многогранника P, склеенных вдоль граней.

Приводя $\mathbb{Z}$-характеристическую матрицу по модулю 2, мы получаем $\mathbb{Z}_2$-характеристическую матрицу. Следующий вопрос является открытым.

Проблема 2.11. Пусть дана $\mathbb{Z}_2$-характеристическая пара $(P,\varLambda)$, состоящая из простого n-многогранника P и $(n\times m)$-матрицы $\varLambda$ с элементами из $\mathbb{Z}_2$, удовлетворяющей условию (2.4). Можно ли получить матрицу $\varLambda$ приведением по модулю 2 целочисленной матрицы, удовлетворяющей тому же условию (2.4)?

Ответ на этот вопрос положителен для 3-многогранников.

Предложение 2.12. *Каждая $\mathbb{Z}_2$-характеристическая пара $(P,\varLambda)$ с трёхмерным многогранником P получается приведением по модулю 2 из $\mathbb{Z}$-характеристической пары.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что любая (3×3)-матрица из нулей и единиц с определителем $1 \bmod 2$ имеет определитель ±1, будучи рассмотрена как целочисленная матрица. Действительно, такая матрица либо имеет столбец с двумя нулями, либо имеет вид

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

с точностью до перестановки строк и столбцов. Требуемое свойство проверяется непосредственно.

2.5. Прямоугольные многогранники и гиперболические многообразия. Особенно интересным классом трёхмерных малых накрытий являются *гиперболические* 3-*многообразия типа Лёбелля*, которые были введены и изучались А. Ю. Весниным в [61].

Конструкция 2.13. Пусть P – (компактный) многогранник в трёхмерном пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ с прямыми углами между соседними гранями (*прямоугольный* 3-*многогранник* для краткости). Легко видеть, что такой многогранник P является простым. Обозначим через $G(P)$ группу, порождённую отражениями в гранях $F_1, \dots, F_m$ многогранника P. Это – *прямоугольная группа Коксетера*, имеющая следующее задание образующими и соотношениями:

$$G(P) = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^2 = 1;\ g_i g_j = g_j g_i,\ \text{если } F_i \cap F_j \neq \varnothing \rangle, \tag{2.5}$$

где g_i обозначает отражение в грани F_i. Отражения в соседних гранях коммутируют ввиду прямоугольности. Гиперплоскости, содержащие пару несоседних граней, не пересекаются, поэтому на соответствующие образующие группы $G(P)$ нет соотношений.

Группа $G(P)$ действует на $\mathbb{L}^3$ дискретно с конечными стабилизаторами и фундаментальной областью P. Вершины v многогранников, получаемых из P отражениями, имеют максимальные стабилизаторы, изоморфные группе $\mathbb{Z}_2^3$ и порождённые отражениями в трёх гранях, содержащих v. Отсюда вытекает следующий результат.

Лемма 2.14 [61; лемма 1]. *Рассмотрим эпиморфизм $\varphi^{(k)}\colon G(P) \to \mathbb{Z}_2^k$ для некоторого k. Группа $\operatorname{Ker}\varphi^{(k)} \subset G(P)$ не содержит элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда образы отражений в любых трёх гранях, имеющих общую вершину, линейно независимы в $\mathbb{Z}_2^k$. В этом случае группа $\operatorname{Ker}\varphi^{(k)}$ действует на $\mathbb{L}^3$ свободно.*

Пусть гомоморфизм $\varphi^{(k)}\colon G(P) \to \mathbb{Z}_2^k$ удовлетворяет условию леммы 2.14; тогда факторпространство $N = \mathbb{L}^3/\operatorname{Ker}\varphi^{(k)}$ является замкнутым *гиперболическим* 3-*многообразием*. Оно составлено из $|\mathbb{Z}_2^k| = 2^k$ экземпляров многогранника P и имеет риманову метрику постоянной отрицательной кривизны. Более того, такое многообразие N асферично (имеет гомотопический тип пространства Эйленберга–Маклейна $K(\operatorname{Ker}\varphi^{(k)}, 1)$), так как его универсальное накрытие $\mathbb{L}^3$ стягиваемо.

Гомоморфизм абеленизации $G(P) \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m$ очевидно удовлетворяет условию леммы 2.14. Его ядром является коммутант $G(P)'$ прямоугольной группы Коксетера $G(P)$. Гиперболическое 3-многообразие $\mathscr{R}_P = \mathbb{L}^3/G(P)'$ может быть отождествлено с вещественным аналогом *момент-угол-многообразия* $\mathscr{Z}_P$ (см. пп. 2.8 и 2.10). Многообразие $\mathscr{R}_P$ также известно как *универсальное абелево накрытие* над P (см. [35] и [27]).

Наименьшим возможным k, для которого может существовать эпиморфизм $\varphi^{(k)}\colon G(P) \to \mathbb{Z}_2^k$, удовлетворяющий условию леммы 2.14, является $k = 3$. Соответствующее многообразие $N = \mathbb{L}^3/\operatorname{Ker}\varphi^{(3)}$, составленное из восьми экземпляров многогранника P, было названо в работе [61] *гиперболическим* 3-*многообразием типа Лёбелля*. Ф. Лёбелль построил первые примеры таких многообразий в 1931 г. Эпиморфизм $\varphi^{(3)}$ раскладывается в композицию

$$G(P) \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\varLambda} \mathbb{Z}_2^3,$$

где $\varLambda$ можно рассматривать как линейное отображение $\mathbb{Z}_2$-пространств. Условие леммы 2.14 эквивалентно тому, что $\varLambda$ удовлетворяет условию (2.4), т. е. $\varLambda$ задаётся $\mathbb{Z}_2$-характеристической матрицей. Таким образом, мы можем отождествить гиперболическое многообразие $N = \mathbb{L}^3/\operatorname{Ker}\varphi^{(3)}$ с малым накрытием $N(P, \varLambda)$.

А. В. Погорелов в 1967 г. (см. [56]) поставил вопрос: какие комбинаторные 3-многогранники допускают прямоугольную реализацию в $\mathbb{L}^3$? Результаты Погорелова вместе с результатами работы Е. М. Андреева [1] (1970 г.) дают полный ответ, который в наших терминах формулируется следующим образом.

Теорема 2.15 [56], [1]. *Комбинаторный 3-многогранник может быть реализован как прямоугольный многогранник в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда он простой, флаговый и не имеет 4-поясов. Более того, прямоугольная реализация единственна с точностью до изометрии.*

Замечание 2.16. Более точно, теорема Погорелова утверждала, что комбинаторный 3-многогранник допускает прямоугольную реализацию в $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда он простой, флаговый, не имеет 4-поясов и *допускает реализацию в $\mathbb{L}^3$ с острыми двугранными углами*. Погорелов также доказал единственность прямоугольной реализации.

Андреев рассматривал проблему описания дискретных групп, порождённых отражениями в пространствах Лобачевского. Эта проблема, поставленная Э. Б. Винбергом [64] в 1967 г., сводится к описанию многогранников с двугранными углами π/n, $n \geqslant 2$. Знаменитая теорема Андреева [1] даёт необходимые и достаточные условия для реализуемости в $\mathbb{L}^3$ комбинаторного простого 3-многогранника P с заданными значениями двугранных углов, не превосходящими $\pi/2$. В частности, из неё следует результат Погорелова. В случае, когда P отличен от симплекса и треугольной призмы, условия Андреева заключаются в следующем:

(a) сумма двугранных углов между гранями, сходящимися в одной вершине, больше π;
(b) сумма двугранных углов между гранями, образующими 3-пояс, меньше π;
(c) сумма двугранных углов между гранями, образующими 4-пояс, меньше 2π.

При отсутствии 3- и 4-поясов условия (b) и (c) отпадают, и результат Андреева влечёт, что последнее условие Погорелова на самом деле следует из первых трёх (т. е. из простоты, флаговости и отсутствия 4-поясов).

Мы будем называть класс простых флаговых 3-многогранников без 4-поясов *классом Погорелова* $\mathscr{P}$. Этот класс будет играть важную роль в нашей работе.

Многогранник из класса $\mathscr{P}$ не имеет треугольных и четырёхугольных граней. Из результатов Т. Дошлича [32] вытекает, что класс Погорелова содержит все фуллерены (см. также [8; следствие 3.16] и [9], [10]). Как отмечено во введении, согласно работе [60] число комбинаторно не эквивалентных фуллеренов с p_6 шестиугольными гранями растёт как p_6^9. Отметим также, что в класс $\mathscr{P}$ входят простые 3-многогранники с пяти-, шести- и одной семиугольной гранью, которые используются для построении фуллеренов при помощи операций усечения (см. [9]–[11]). Наконец, мы показываем в следствии B.15, что для любого конечного набора неотрицательных целых чисел p_k, $k \geqslant 7$, существует многогранник Погорелова, у которого число k-угольных граней равно p_k. Все эти факты показывают, что класс многогранников Погорелова весьма широк.

Полезно свести сформулированные выше построения и результаты в следующем утверждении.

Теорема 2.17. *Малое накрытие* $N(P,\Lambda)$ *над* 3*-многогранником* P *из класса Погорелова* $\mathscr{P}$ *имеет структуру гиперболического* 3*-многообразия типа Лёбелля* $\mathbb{L}^3/\operatorname{Ker}\varphi^{(3)}$, *где эпиморфизм* $\varphi^{(3)}$ *задаётся композицией*

$$G(P)\xrightarrow{\text{ab}}\mathbb{Z}_2^m\xrightarrow{\Lambda}\mathbb{Z}_2^3.$$

Более того, 3*-многообразие* $N(P,\Lambda)$ *асферично*.

Условия, задающие класс Погорелова $\mathscr{P}$, также играют роль в теории гиперболических групп Громова. А именно, “не-$\triangle$-условие” из [35; § 4.2.E] для симплициального комплекса $\mathscr{K}$ есть отсутствие пустых треугольников, а “не-$\square$-условие” есть отсутствие бесхордовых 4-циклов. В случае, когда $\mathscr{K}$ есть двойственный комплекс простого многогранника, эти два условия суть отсутствие 3- и 4-поясов соответственно.

Связь между малыми накрытиями и гиперболическими многообразиями была отмечена в работе М. Дэвиса и Т. Янушкевича [27; с. 428], хотя критерий прямоугольной реализуемости многогранника был там сформулирован неверно, так как для прямоугольной реализуемости недостаточно отсутствия треугольных и четырёхугольных граней (см. пример B.4).

Компактные прямоугольные n-многогранники существуют только в пространствах Лобачевского $\mathbb{L}^n$ для $n=2,3,4$. На плоскости Лобачевского имеются прямоугольные m-угольники для любого $m\geqslant 5$. Трёхмерный случай обсуждается в нашем обзоре. В $\mathbb{L}^4$ существуют компактные прямоугольные 4-многогранники, но их классификация до сих пор не известна. Наиболее известным примером является *правильный* 120*-гранник*. Для двух данных прямоугольных многогранников P_1 и P_2 с изометричными гипергранями $F_1\subset P_1$, $F_2\subset P_2$ можно построить новый прямоугольный многогранник путём склеивания P_1 и P_2 вдоль гиперграней $F_1\simeq F_2$. Таким образом можно получить бесконечно много различных прямоугольных многогранников в $\mathbb{L}^4$, начиная с прямоугольного правильного 120-гранника. Все известные примеры прямоугольных 4-многогранников получаются таким образом. Из рассмотрения модели Бельтрами–Клейна легко вытекает, что для любого выпуклого многогранника в пространстве Лобачевского существует комбинаторно эквивалентный ему выпуклый многогранник в евклидовом пространстве. Отсутствие прямоугольных многогранников в $\mathbb{L}^n$ при $n\geqslant 5$ было доказано Э. Б. Винбергом в [65] при помощи неравенств В. В. Никулина [50] на среднее число граней простого многогранника. Из этих неравенств вытекает, что простой многогранник размерности $n\geqslant 5$ должен иметь треугольную или четырёхугольную двумерную грань, что невозможно для прямоугольного многогранника. Обзор известных результатов о прямоугольных многогранниках дан в работе [57].

2.6. Топологические торические многообразия. Торическое многообразие может не быть квазиторическим, а квазиторическое многообразие может не быть торическим. Однако и торические, и квазиторические многообразия являются примерами топологических торических многообразий, введённых в работе [39]. Напомним, что на торическом многообразии имеется алгебраическое действие группы $(\mathbb{C}^\times)^n$ с открытой плотной орбитой. Торическое многообразие имеет атлас из локальных карт, каждая из которых эквивариантно изоморфна сумме комплексных одномерных *алгебраических* представлений группы $(\mathbb{C}^\times)^n$. *Топологическое торическое многообразие* представляет собой компактное гладкое $2n$-мерное многообразие с эффективным гладким действием группы $(\mathbb{C}^\times)^n$, имеющим открытую плотную орбиту, покрытое конечным числом инвариантных открытых подмножеств, каждое из которых эквивариантно диффеоморфно сумме комплексных одномерных *гладких* представлений группы $(\mathbb{C}^\times)^n$. (Последнее условие автоматически вытекает из существования плотной орбиты в алгебраической категории, но не в гладкой категории.)

Кольцо когомологий топологического торического многообразия описывается аналогично торическому и квазиторическому случаю; имеется аналог теорем 2.2 и 2.3 (см. [39; предложение 8.3]).

2.7. Симплициальные комплексы и кольца граней. Пусть $\mathcal{K}$ – (абстрактный) *симплициальный комплекс* на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$, т. е. $\mathcal{K}$ – такой набор подмножеств $I \subset [m]$, что для любого $I \in \mathcal{K}$ все подмножества в I также принадлежат $\mathcal{K}$. Мы будем предполагать, что пустое множество $\varnothing$ и все одноэлементные подмножества $\{i\} \subset [m]$ принадлежат $\mathcal{K}$; последние называются *вершинами* комплекса $\mathcal{K}$. Подмножества $I \in \mathcal{K}$ будем называть *симплексами* (или *гранями*) комплекса $\mathcal{K}$. Любой абстрактный симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ имеет *геометрическую реализацию* $|\mathcal{K}|$, представляющую собой полиэдр в евклидовом пространстве (объединение выпуклых геометрических симплексов).

Негранью комплекса $\mathcal{K}$ называется такое подмножество $I \subset [m]$, что $I \notin \mathcal{K}$. *Недостающей гранью* (или *минимальной негранью*) комплекса $\mathcal{K}$ называется минимальная по вложению негрань в $\mathcal{K}$, т. е. такое подмножество $I \subset [m]$, что I не является симплексом в $\mathcal{K}$, но любое собственное подмножество в I является симплексом в $\mathcal{K}$.

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется *флаговым*, если каждая из его недостающих граней состоит из двух вершин. Эквивалентно, $\mathcal{K}$ является флаговым, если любой набор его вершин, попарно соединённых рёбрами, является набором вершин симплекса. Флаговый комплекс $\mathcal{K}$ определяется своим одномерным остовом (графом) $\mathcal{K}^1$ и получается из графа $\mathcal{K}^1$ заполнением всех его полных подграфов симплексами.

Пусть P – простой n-многогранник с m гипергранями $F_1, \dots, F_m$. Тогда

$$\mathcal{K}_P = \bigl\{I = \{i_1, \dots, i_k\} \in [m] \colon F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \varnothing\bigr\}$$

есть симплициальный комплекс на множестве $[m]$, называемый *двойственным комплексом* многогранника P. Вершины комплекса $\mathcal{K}_P$ соответствуют гиперграням многогранника P, а пустой симплекс $\varnothing$ соответствует самому многограннику P. Геометрически $|\mathscr{K}_P|$ представляет собой $(n-1)$-мерную сферу, разбитую на симплексы как граница *двойственного многогранника* к P.

Определения флагового многогранника и флагового комплекса согласованы: P является флаговым многогранником тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}_P$ является флаговым симплициальным комплексом. При этом k-пояс в многограннике P с $k \geqslant 4$ соответствует *бесхордовому k-циклу* в графе $\mathscr{K}_P^1$.

Барицентрическое подразделение любого симплициального комплекса $\mathscr{K}$ имеет структуру кубического комплекса $\operatorname{cub}(\mathscr{K})$, который канонически вкладывается в кубический комплекс граней m-мерного куба I^m (см. [13; § 1.5]). На кубическом комплексе $\operatorname{cub}(\mathscr{K})$ имеется кусочно евклидова структура, в которой каждая кубическая грань является евклидовым кубом. В [35; § 4] было показано, что соответствующая кусочно евклидова метрика имеет неположительную кривизну (в смысле сравнительного CAT(0)-неравенства Александрова–Топоногова) при выполнении не-$\triangle$-условия для всех линков (что эквивалентно флаговости комплекса $\mathscr{K}$), в то время как не-$\square$-условие влечёт строгую отрицательность кривизны. Гиперболические многообразия, сопоставляемые 3-многогранникам из класса Погорелова (см. п. 2.5), удовлетворяют более сильному условию: на них имеется настоящая риманова метрика постоянной отрицательной кривизны.

Зафиксируем коммутативное кольцо $\mathbf{k}$ с единицей.

Кольцо граней (или *кольцо Стенли–Риснера*) симплициального комплекса $\mathscr{K}$ определяется как факторкольцо кольца многочленов $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$ по идеалу, порождённому негранями в $\mathscr{K}$:

$$\mathbf{k}[\mathscr{K}] = \mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\bigl(v_{i_1}\cdots v_{i_k}\colon \{i_1,\dots,i_k\}\notin\mathscr{K}\bigr).$$

Так как кольцо $\mathbf{k}[\mathscr{K}]$ является факторкольцом кольца многочленов по мономиальному идеалу, оно наследует градуировку (и даже $\mathbb{Z}^m$-градуировку). Мы будем использовать чётные градуировки: $\deg v_i = 2$ и $\operatorname{mdeg} v_i = 2\boldsymbol{e}_i$, где $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{Z}^m$ есть i-й стандартный базисный вектор.

Заметим, что если $\mathscr{K} = \mathscr{K}_P$ для простого многогранника P, то кольцо $\mathbb{Z}[P]$ совпадает с факторкольцом кольца $\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]$ по идеалу (a) в теореме 2.2 или в теореме 2.3.

Симплициальный комплекс $\mathscr{K}$ является флаговым тогда и только тогда, когда $\mathbf{k}[\mathscr{K}]$ есть *квадратичная алгебра*, т. е. факторалгебра $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$ по идеалу, порождённому квадратичными мономами (имеющими у нас градуировку 4).

2.8. Момент-угол-комплексы и многообразия. Пусть $\mathscr{K}$ – симплициальный комплекс на множестве $[m]$, и пусть (D^2,S^1) – пара, состоящая из диска и его граничной окружности. Для каждого симплекса $I=\{i_1,\dots,i_k\}\in\mathscr{K}$ положим

$$(D^2,S^1)^I = \{(x_1,\dots,x_m)\in(D^2)^m\colon x_i\in S^1 \text{ при } i\notin I\}.$$

Момент-угол-комплекс определяется следующим образом:

$$\mathscr{Z}_{\mathscr{K}} = (D^2,S^1)^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I\in\mathscr{K}} (D^2,S^1)^I \subset (D^2)^m. \tag{2.6}$$

Если $|\mathscr{K}|$ гомеоморфно сфере S^{n-1}, то $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ является топологическим многообразием. Если $\mathscr{K}$ является границей выпуклого многогранника или звёздчатой сферой (т. е. происходит из полного симплициального веера), то многообразие $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ имеет гладкую структуру (см. [54]).

В случае $\mathscr{K} = \mathscr{K}_P$ имеется альтернативный способ определить многообразие $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ непосредственно в терминах двойственного простого многогранника P. Пусть выпуклый n-многогранник P задан неравенствами (2.1). Определим отображение

$$i_P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \bigl(\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}\rangle + b_1, \dots, \langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{x}\rangle + b_m\bigr).$$

Мы имеем $i_P(P) \subset \mathbb{R}^m_{\geqslant} = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m\colon y_i \geqslant 0\}$. Также рассмотрим отображение

$$\mu\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m_{\geqslant}, \quad (z_1, \dots, z_m) \mapsto (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2). \tag{2.7}$$

Теперь определим пространство $\mathscr{Z}_P = \mu^{-1}(i_P(P))$; оно входит в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathscr{Z}_P \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "\mu"] \\ P \arrow[r, "i_p"] & \mathbb{R}^m_{\geqslant} \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

Пространство задаётся как пересечение $m-n$ эрмитовых квадрик в $\mathbb{C}^m$, и это пересечение является невырожденным при условии, что многогранник P является простым. В этом случае $\mathscr{Z}_P$ является гладким $(m+n)$-мерным многообразием. Более того, многообразие $\mathscr{Z}_P$ диффеоморфно момент-угол-комплексу $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_P}$. В частности, класс диффеоморфизма многообразия $\mathscr{Z}_P$ зависит лишь от комбинаторного типа многогранника P. Поэтому мы отождествляем многообразие $\mathscr{Z}_P$ с момент-угол-комплексом $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}_P}$ и называем его *момент-угол-многообразием*, соответствующим простому многограннику P. Подробное изложение этих конструкций можно найти в [54] или в [14; гл. 6].

Стандартное покоординатное действие m-мерного тора T^m на $(D^2)^m$ или на $\mathbb{C}^m$ индуцирует *каноническое* T^m-действие на $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ и на $\mathscr{Z}_P$.

Имеется "вещественный" вариант этих конструкций, в котором пара (D^2, S^1) заменяется на (D^1, S^0), а отображение (2.7) заменяется на

$$\mu\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m_{\geqslant}, \quad (y_1, \dots, y_m) \mapsto (y_1^2, \dots, y_m^2).$$

Получаемое n-мерное *вещественное момент-угол-многообразие*

$$\mathscr{R}_P = \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(i_P(P))$$

задаётся как пересечение $m-n$ квадрик в $\mathbb{R}^m$. Оно использовалось при построении гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий в [48], [49], [54].

2.9. Когомологии момент-угол-комплексов. Мы будем рассматривать когомологии с коэффициентами в $\mathbf{k}$. Рассмотрим внешнюю алгебру $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ над $\mathbf{k}$; её образующие удовлетворяют соотношениям

$$u_i^2 = 0 \quad \text{и} \quad u_i u_j = -u_j u_i.$$

Комплекс Кошуля (или *алгебра Кошуля*) кольца граней $\mathbf{k}[\mathscr{K}]$ есть дифференциальная $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^m$-градуированная алгебра $(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[\mathscr{K}],d)$, где

$$\operatorname{mdeg} u_i=(-1,2\boldsymbol{e}_i),\quad \operatorname{mdeg} v_i=(0,2\boldsymbol{e}_i),\qquad du_i=v_i,\quad dv_i=0. \tag{2.9}$$

Алгебра когомологий алгебры $(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[\mathscr{K}],d)$ называется Tor-*алгеброй* и обозначается $\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}[\mathscr{K}],\mathbf{k})$. Она наследует $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^m$-градуировку.

Теорема 2.18 [5], [14; теорема 4.5.5]. *Имеет место изоморфизм (мульти)градуированных коммутативных алгебр*

$$\begin{aligned} H^*(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})&\cong\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}[\mathscr{K}],\mathbf{k}\bigr)\\ &\cong H\bigl(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[\mathscr{K}],d\bigr).\end{aligned}$$

Таким образом, алгебра когомологий момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ приобретает мультиградуировку, а мультиградуированные и градуированные компоненты когомологий $H^*(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ задаются формулами

$$H^{-i,2J}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})=\operatorname{Tor}^{-i,2J}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}[\mathscr{K}],\mathbf{k}\bigr),\quad H^{\ell}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})=\bigoplus_{-i+2|J|=\ell}H^{-i,2J}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}),$$

где $J=(j_1,\dots,j_m)\in\mathbb{Z}^m$ и $|J|=j_1+\dots+j_m$.

Алгебра Кошуля $\bigl(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[\mathscr{K}],d\bigr)$ бесконечно порождена как $\mathbf{k}$-модуль. Определим её факторалгебру

$$R^*(\mathscr{K})=\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[\mathscr{K}]/(v_i^2=u_iv_i=0,\ 1\leqslant i\leqslant m)$$

с индуцированными мультиградуировкой и дифференциалом (2.9). Заметим, что $R^*(\mathscr{K})$ имеет конечный $\mathbf{k}$-базис. Переход к алгебре $R^*(\mathscr{K})$ не изменяет алгебру когомологий. Этот факт может быть доказан либо алгебраически (см. [53; лемма 4.4]), либо с использованием следующей топологической интерпретации.

Лемма 2.19 [14; лемма 4.5.3]. *На $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ имеется структура клеточного пространства, для которой клеточные коцепи изоморфны алгебре $R^*(\mathscr{K})$.*

В частности, имеет место изоморфизм алгебр когомологий

$$H(R^*(\mathscr{K}))\cong H^*(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}).$$

Мультиградуированная компонента $R^{-i,2J}(\mathscr{K})$ может быть ненулевой только при условии, что все координаты вектора $J\in\mathbb{Z}^m$ суть 0 или 1, и то же верно для мультиградуированных групп когомологий $H^{-i,2J}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$.

Мы будем отождествлять подмножества $J\subset[m]$ с векторами $\sum\limits_{j\in J}\boldsymbol{e}_j\in\mathbb{Z}^m$. Для данного $J=\{j_1,\dots,j_k\}\subset[m]$ обозначим через v_J моном

$$v_{j_1}\cdots v_{j_k}\in\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$$

и, аналогично, рассмотрим внешний моном

$$u_J=u_{j_1}\cdots u_{j_k}\in\Lambda[u_1,\dots,u_m].$$

Через $u_J v_I$ обозначим моном $u_J \otimes v_I$ в алгебре Кошуля $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[\mathscr{K}]$. Тогда алгебра $R^*(\mathscr{K})$ имеет конечный $\mathbf{k}$-базис, состоящий из мономов $u_J v_I$, где $J \subset [m]$, $I \in \mathscr{K}$ и $J \cap I = \varnothing$.

Определим *полный подкомплекс* в $\mathscr{K}$, соответствующий подмножеству $J \subset [m]$:

$$\mathscr{K}_J = \{I \in \mathscr{K} : I \subset J\}.$$

Рассмотрим симплициальные коцепи $C^*(\mathscr{K}_J)$ с коэффициентами в $\mathbf{k}$. Пусть $\alpha_L \in C^{p-1}(\mathscr{K}_J)$ обозначает базисную коцепь, соответствующую ориентированному симплексу $L = (l_1, \dots, l_p) \in \mathscr{K}_J$; она принимает значение 1 на L и обращается в нуль на остальных симплексах. Определим $\mathbf{k}$-линейное отображение

$$\begin{aligned} f\colon C^{p-1}(\mathscr{K}_J) &\to R^{p-|J|,2J}(\mathscr{K}), \\ \alpha_L &\mapsto \varepsilon(L, J)\, u_{J \setminus L} v_L, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\varepsilon(L, J)$ – знак, определяемый формулами

$$\varepsilon(L, J) = \prod_{j \in L} \varepsilon(j, J) \quad \text{и} \quad \varepsilon(j, J) = (-1)^{r-1},$$

если j есть r-й элемент упорядоченного по возрастанию множества $J \subset [m]$.

Теорема 2.20 [14; теорема 3.2.9]. *Отображения* (2.10) *вместе образуют изоморфизм коцепных комплексов* $C^*(\mathscr{K}_J) \to R^{*,2J}(\mathscr{K})$, *который индуцирует изоморфизм*

$$\widetilde{H}^{|J|-i-1}(\mathscr{K}_J) \cong \operatorname{Tor}^{-i,2J}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}[\mathscr{K}], \mathbf{k}\bigr),$$

где $\widetilde{H}^k(\mathscr{K}_J)$ *обозначает* k*-ю группу приведённых симплициальных когомологий комплекса* $\mathscr{K}_J$.

Теорема 2.21 [14; теорема 4.5.8]. *Имеем изоморфизмы* $\mathbf{k}$*-модулей*

$$H^{-i,2J}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \cong \widetilde{H}^{|J|-i-1}(\mathscr{K}_J), \qquad H^{\ell}(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}^{\ell-|J|-1}(\mathscr{K}_J).$$

Эти изоморфизмы вместе составляют изоморфизм колец

$$H^*(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}^*(\mathscr{K}_J),$$

где структура кольца в правой части задаётся отображениями

$$H^{k-|I|-1}(\mathscr{K}_I) \otimes H^{\ell-|J|-1}(\mathscr{K}_J) \to H^{k+\ell-|I|-|J|-1}(\mathscr{K}_{I \cup J}),$$

которые индуцированы каноническими вложениями симплициальных комплексов $\mathscr{K}_{I \cup J} \to \mathscr{K}_I * \mathscr{K}_J$ *при* $I \cap J = \varnothing$ *и нулевые в противном случае.*

Предложение 2.22. *Группа трёхмерных когомологий* $H^3(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ *свободно порождена классами* $[u_i v_j] = [u_j v_i]$, *соответствующими парам несмежных вершин* $\{i, j\} \notin \mathscr{K}$. *Если* $\mathscr{K} = \mathscr{K}_P$ *для простого многогранника* P, *то эти трёхмерные классы когомологий соответствуют парам несмежных гиперграней* F_i, F_j.

Пример 2.23. Пусть $\mathscr{K} = 1\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet 2\ \ 3\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet 4$ – объединение двух отрезков. Нетривиальные группы целочисленных когомологий момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ приведены ниже вместе с представляющими образующие коциклами в алгебре $R^*(\mathscr{K})$:

$$\begin{aligned}
&H^0(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \cong \widetilde{H}^{-1}(\varnothing) \cong \mathbb{Z}: && 1;\\
&H^3(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{|J|=2} \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_J) \cong \mathbb{Z}^4: && u_1v_3,\ u_1v_4,\ u_2v_3,\ u_2v_4;\\
&H^4(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{|J|=3} \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_J) \cong \mathbb{Z}^4: && u_1u_2v_3,\ u_1u_2v_4,\ u_3u_4v_1,\ u_3u_4v_2;\\
&H^5(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \cong \widetilde{H}^0(\mathscr{K}) \cong \mathbb{Z}: && u_1u_2u_4v_3 - u_1u_2u_3v_4.
\end{aligned}$$

Коцепи из $C^0(\mathscr{K})$ суть функции на вершинах комплекса $\mathscr{K}$, а коциклы суть функции, постоянные на связных компонентах $\mathscr{K}$. В нашем случае коцикл $\alpha_{\{3\}}+\alpha_{\{4\}}$ представляет образующую группы $\widetilde{H}^0(\mathscr{K})$. При отображении (2.10) он переходит в коцикл $u_1u_2u_4v_3-u_1u_2u_3v_4$, представляющий образующую группы $H^5(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$.

Момент-угол-комплексы $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ могут иметь нетривиальные произведения Масси трёхмерных классов когомологий. Первые примеры (найденные И. В. Баскаковым в [4]) появляются уже для момент-угол-многообразий, соответствующих трёхмерным многогранникам (см. также [14; § 4.9]). Следующий результат Г. Денама и А. Сушиу даёт полное описание тройного произведения Масси

$$H^3(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \otimes H^3(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \otimes H^3(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}) \to H^8(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}).$$

Теорема 2.24 [30; теорема 6.1.1]. *Следующие условия эквивалентны*:

(a) *существуют классы когомологий $\alpha, \beta, \gamma \in H^3(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$, для которых произведение Масси $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ определено и нетривиально*;

(b) *граф $\mathscr{K}^1$ содержит индуцированный подграф, изоморфный одному из пяти графов на рис.* 1.

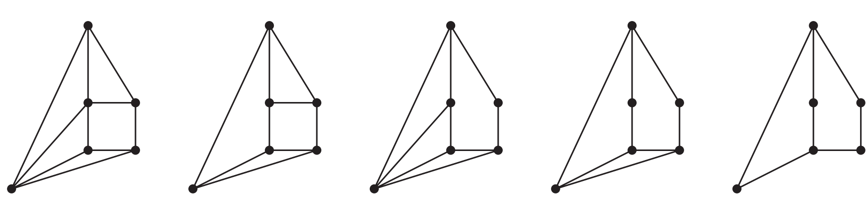

Рис. 1. Пять графов

2.10. Момент-угол-многообразия, квазиторические многообразия и малые накрытия. Пусть P – простой n-многогранник с двойственным симплициальным комплексом $\mathscr{K}_P$. Существование характеристической матрицы (2.3) для P эквивалентно выбору n линейных форм

$$t_j = \lambda_{j1}v_1 + \dots + \lambda_{jm}v_m, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{2.11}$$

для которых кольцо $\mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]$ является конечно порождённым свободным модулем над кольцом многочленов $\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]$. Такой набор $t_1,\dots,t_n$ образует линейную *регулярную последовательность* в кольце $\mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]$. Это означает, что $\mathbf{k}[\mathscr{K}_P]$ является *кольцом Коэна–Маколея* для любого $\mathbf{k}$, но на самом деле условие существования характеристической матрицы сильнее, так как оно даёт существование *линейной* регулярной последовательности над $\mathbb{Z}$ (а значит, и над любым конечным полем).

Задав характеристическую матрицу (2.3) (или линейную регулярную последовательность (2.11) в кольце $\mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]$), мы можем определить соответствующий гомоморфизм торов $\Lambda_T\colon T^m \to T^n$. Его ядро $\operatorname{Ker}\Lambda_T$ является $(m-n)$-мерным тором в T^m, который действует на $\mathscr{Z}_P$ *свободно*. Факторпространство $\mathscr{Z}_P/\operatorname{Ker}\Lambda_T$ отождествляется с квазиторическим многообразием $M(P,\Lambda)$ из конструкции 2.5. Так как $\mathscr{Z}_P$ является гладким пересечением квадрик (2.8) и действие тора гладкое, мы получаем каноническую гладкую структуру на многообразии $M(P,\Lambda)$; эта структура была введена в [16].

Будем говорить, что два T^n-многообразия M и M' *слабо эквивариантно диффеоморфны*, если существуют диффеоморфизм $f\colon M\to M'$ и автоморфизм торов $\theta\colon T^n\to T^n$ такие, что

$$f(t\cdot x)=\theta(t)\cdot f(x)\quad \text{для любых } x\in M \text{ и } t\in T^n.$$

Следующий результат получается непосредственно.

Предложение 2.25. *Если характеристические пары (P,Λ) и (P',Λ') эквивалентны, то соответствующие квазиторические многообразия $M(P,\Lambda)$ и $M(P',\Lambda')$ слабо эквивариантно диффеоморфны.*

Следующее описание когомологий момент-угол-многообразия $\mathscr{Z}_P$ получается из общих свойств регулярных последовательностей.

Теорема 2.26 [13; теорема 4.2.11], [14; лемма A.3.5]. *Пусть P – простой n-многогранник с m гипергранями; предположим, что существует линейная целочисленная регулярная последовательность* (2.11). *Обозначим через $\mathscr{J}$ идеал в кольце $\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]$, порождённый элементами $t_1,\dots,t_n$. Тогда имеем изоморфизм колец когомологий*

$$H^*(\mathscr{Z}_P;\mathbb{Z})\cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{J}}\bigl(\mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]/\mathscr{J},\mathbb{Z}\bigr).$$

Заметим, что $\mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]/\mathscr{J}$ есть кольцо когомологий квазиторического многообразия $M(P,\Lambda)$ согласно теореме 2.3. Из теоремы 2.26 вытекает, что спектральная последовательность главного T^{m-n}-расслоения $\mathscr{Z}_P\to M(P,\Lambda)$ вырождается в члене E_3.

Комплексное сопряжение $\boldsymbol{z}=(z_1,\dots,z_m)\mapsto\overline{\boldsymbol{z}}=(\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_m)$ задаёт инволюцию на $\mathscr{Z}_P$, множеством неподвижных точек которой является вещественное момент-угол-многообразие $\mathscr{R}_P$. Для любого элемента t тора $\operatorname{Ker}\Lambda_T\cong T^{m-n}$ эта инволюция удовлетворяет соотношению $\overline{t\cdot\boldsymbol{z}}=t^{-1}\cdot\overline{\boldsymbol{z}}$ и, следовательно, задаёт инволюцию на квазиторическом многообразии $M(P,\Lambda)$. Множеством неподвижных точек инволюции на $M(P,\Lambda)$ является малое накрытие $N(P,\Lambda)$, соответствующее приведённой по модулю два $\mathbb{Z}$-характеристической матрице Λ. Неизвестно, можно ли получить любое малое накрытие над простым n-многогранником таким образом; этот вопрос эквивалентен проблеме 2.11 (в случае 3-многогранников ответ положителен, см. предложение 2.12).

Мы имеем $\mathbb{Z}_2^{m-n}$-накрытие $\mathscr{R}_P \to N(P,\Lambda)$ для любого малого накрытия над P, соответствующего $\mathbb{Z}_2$-характеристической матрице Λ. Фундаментальная группа многообразия $\mathscr{R}_P$ есть коммутант $G(P)'$ абстрактной прямоугольной группы Коксетера (2.5), соответствующей многограннику P. Фундаментальная группа малого накрытия $N = N(P,\Lambda)$ определяется из точной последовательности

$$1 \longrightarrow G(P)' \longrightarrow \pi_1(N) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{m-n} \longrightarrow 1.$$

Коммутанты прямоугольных групп Коксетера были изучены в [55]; в частности, там был построен минимальный набор образующих группы $G(P)'$. Многообразие $\mathscr{R}_P$ (а значит, и N) является асферичным тогда и только тогда, когда многогранник P является флаговым. Это вытекает из конструкции Дэвиса кусочно евклидовой метрики неположительной кривизны на $N(P,\Lambda)$ для флагового P (см. [28; теорема 2.2.5], а также [55; следствие 3.4]).

Если P имеет прямоугольную реализацию в $\mathbb{L}^3$ (т. е. P – многогранник Погорелова; в частности, P является флаговым), то мы имеем последовательность накрытий

$$\mathbb{L}^3 \to \mathscr{R}_P \to N(P,\Lambda).$$

Здесь $G(P)$ является геометрической прямоугольной группой Коксетера, порождённой отражениями в гранях P, а оба многообразия $\mathscr{R}_P$ и $N(P,\Lambda)$ имеют настоящую риманову метрику постоянной отрицательной кривизны.

Предложение 2.27. *Вещественное момент-угол-многообразие $\mathscr{R}_P$, соответствующее 3-многограннику из класса Погорелова $\mathscr{P}$, имеет структуру гиперболического 3-многообразия, фундаментальная группа которого есть коммутант $G(P)'$ соответствующей прямоугольной группы Коксетера.*

3. Когомологическая жёсткость

Как и ранее, мы рассматриваем когомологии с коэффициентами в коммутативном кольце $\mathbf{k}$ с единицей. Если кольцо коэффициентов $\mathbf{k}$ не указано явно, подразумевается, что $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$.

Определение 3.1. Мы называем семейство замкнутых многообразий *когомологически жёстким* над $\mathbf{k}$, если многообразия из этого семейства различаются с точностью до диффеоморфизма их кольцами когомологий с коэффициентами в $\mathbf{k}$. Таким образом, семейство является когомологически жёстким, если изоморфизм градуированных колец $H^*(M_1;\mathbf{k}) \cong H^*(M_2;\mathbf{k})$ влечёт диффеоморфизм $M_1 \cong M_2$ для любых двух многообразий M_1 и M_2 из этого семейства.

Имеются гомотопический и топологический варианты когомологической жёсткости, при которых диффеоморфизмы заменяются на гомотопические эквивалентности и гомеоморфизмы соответственно.

В торической топологии свойство когомологической жёсткости изучается для (квази)торических многообразий и момент-угол-многообразий. Детальное изложение результатов и открытых проблем по этой тематике можно найти в [47], [23] и [14; § 7.8]. Основным открытым вопросом является следующий.

Проблема 3.2. Пусть M_1 и M_2 – два торических многообразия с изоморфными кольцами когомологий. Верно ли, что они гомеоморфны или даже диффеоморфны? Другими словами, является ли семейство торических многообразий когомологически жёстким? Тот же вопрос можно сформулировать для квазиторических или топологических торических многообразий.

Эта проблема имеет положительное решение для некоторых специальных семейств торических и квазиторических многообразий, таких как когомологически тривиальные башни Ботта [46], $\mathbb{Q}$-когомологически тривиальные башни Ботта [19], $\mathbb{Z}_2$-когомологически тривиальные башни Ботта [20], башни Ботта вещественной размерности вплоть до восьми [18], квазиторические многообразия над произведением двух симплексов [26] и над двойственными к некоторым циклическим многогранникам [37]. *Башни Ботта* (или *многообразия Ботта*) представляют собой торические многообразия над комбинаторными кубами. Проблема когомологической жёсткости остаётся открытой для общих башен Ботта, а также для (квази)торических многообразий вещественной размерности 6, т. е. над трёхмерными многогранниками. Последний случай и изучается в настоящей работе: мы даём решение проблемы когомологической жёсткости для специального класса 3-многогранников.

Имеется также вариант проблемы когомологической жёсткости для вещественных торических объектов, таких как вещественные торические многообразия, малые накрытия и вещественные топологические торические многообразия [39]; при этом кольца когомологий рассматриваются с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Семейство вещественных башен Ботта является когомологически жёстким [21], [41], однако общее семейство вещественных торических многообразий таковым не является [45].

Вопрос о когомологической жёсткости также открыт для момент-угол-многообразий, как для обычных градуированных колец когомологий, так и для мультиградуированных.

Проблема 3.3. Пусть $\mathscr{Z}_{P_1}$ и $\mathscr{Z}_{P_2}$ – два момент-угол-многообразия с изоморфными (мультиградуированными) кольцами когомологий. Диффеоморфны ли эти два многообразия? Другими словами, является ли семейство момент-угол-многообразий когомологически жёстким?

Из диффеоморфности квазиторических многообразий над многогранниками P_1 и P_2 или из диффеоморфности момент-угол-многообразий $\mathscr{Z}_{P_1}$ и $\mathscr{Z}_{P_2}$, вообще говоря, не вытекает комбинаторная эквивалентность многогранников P_1 и P_2 – это показывает следующий пример.

Пример 3.4. К простому многограннику P можно применить операцию *срезания вершины* [14; конструкция 1.1.1]; в результате получается новый простой многогранник $\mathrm{vt}(P)$ с одной дополнительной гипергранью. Если эту операцию применять последовательно, то комбинаторный тип получаемого многогранника, вообще говоря, зависит от выбора срезаемых вершин и их порядка. Например, применяя операцию срезания вершины последовательно три раза к 3-симплексу, можно получить три комбинаторно различных многогранника P_i, $i = 1, 2, 3$, каждый из которых имеет 7 гиперграней. Соответствующие момент-угол-многообразия $\mathscr{Z}_{P_i}$ диффеоморфны (см. [14; § 4.6]). Комбинаторные многогранники P_i имеют дельзановы реализации, так что соответствующие торические многообразия V_{P_i} получаются трёхкратным раздутием из $\mathbb{C}P^3$ тремя различными способами. Каждое многообразие V_{P_i} диффеоморфно связной сумме четырёх экземпляров $\mathbb{C}P^3$ (см. [47; пример 4.3]).

В связи с этим возникает задача описания классов простых многогранников P, комбинаторный тип которых однозначно определяется кольцом когомологий любого (квази)торического многообразия над P или кольцом когомологий момент-угол-многообразия $\mathscr{Z}_P$. Это приводит к следующим двум понятиям жёсткости для простых многогранников, которые были введены в [47] и [7] соответственно.

Определение 3.5. Простой многогранник P называется *C-жёстким*, если выполнено одно из следующих двух условий:

(a) не существует ни одного квазиторического многообразия M над P (эквивалентно, в кольце граней $\mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]$ нельзя выбрать линейную регулярную последовательность (2.11));

(b) если дано квазиторическое многообразие M над P, квазиторическое многообразие M' над другим многогранником P' и изоморфизм колец когомологий $H^*(M) \cong H^*(M')$, то имеем комбинаторную эквивалентность $P \simeq P'$.

Будем говорить, что свойство простых многогранников является *C-жёстким*, если существование изоморфизма колец $H^*(M) \cong H^*(M')$ влечёт, что оба многогранника P и P' одновременно либо обладают, либо не обладают этим свойством.

Определение 3.6. Простой многогранник P называется *B-жёстким*, если любой изоморфизм колец когомологий $H^*(\mathscr{Z}_P) \cong H^*(\mathscr{Z}_{P'})$ момент-угол-многообразий влечёт комбинаторную эквивалентность $P \simeq P'$.

Будем говорить, что свойство простых многогранников является *B-жёстким*, если существование изоморфизма колец $H^*(\mathscr{Z}_P) \cong H^*(\mathscr{Z}_{P'})$ влечёт, что оба многогранника P и P' одновременно либо обладают, либо не обладают этим свойством.

Как показывает пример 3.4, многогранник, получаемый из симплекса последовательным срезанием трёх вершин, не является ни C-жёстким, ни B-жёстким. Известные примеры C-жёстких многогранников включают произведения симплексов и многогранники, получаемые из них срезанием одной вершины [24], а также произведение симплекса и многоугольника [25]. Кроме того, наличие или отсутствие свойства C-жёсткости было установлено в [24] для всех простых 3-многогранников с не более чем 9 гипергранями. Следующая связь между двумя свойствами жёсткости вытекает из результатов [24].

Предложение 3.7. *Если простой многогранник P является B-жёстким, то он также является C-жёстким.*

Доказательство. Предположим, что мы имеем изоморфизм колец когомологий

$$\varphi\colon H^*(M) \xrightarrow{\cong} H^*(M')$$

для квазиторических многообразий M над P и M' над P'. Нам необходимо показать, что тогда имеет место изоморфизм колец

$$\psi\colon H^*(\mathscr{Z}_P) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathscr{Z}_{P'}),$$

так как такой изоморфизм влечёт комбинаторную эквивалентность $P \simeq P'$ в силу B-жёсткости. Пусть $\mathscr{J}$ и $\mathscr{J}'$ – идеалы в кольцах $\mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]$ и $\mathbb{Z}[\mathscr{K}_{P'}]$ соответственно, порождённые линейными регулярными последовательностями (2.11). Тогда мы имеем изоморфизм колец

$$\varphi\colon \mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]/\mathscr{J} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[\mathscr{K}_{P'}]/\mathscr{J}'. \tag{3.1}$$

Нам необходимо показать, что этот изоморфизм влечёт изоморфизм

$$\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{J}}\big(\mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]/\mathscr{J},\mathbb{Z}\big) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_{m'}]/\mathscr{J}'}\big(\mathbb{Z}[\mathscr{K}_{P'}]/\mathscr{J}',\mathbb{Z}\big), \tag{3.2}$$

так как в силу теоремы 2.26 это есть не что иное, как изоморфизм

$$H^*(\mathscr{Z}_P) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathscr{Z}_{P'}).$$

Этот факт доказан в [24; лемма 3.7]. Действительно, изоморфизм (3.1) можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{J} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathbb{Z}[v_1,\dots,v_{m'}]/\mathscr{J}' \arrow[d] \\
\mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]/\mathscr{J} \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] & \mathbb{Z}[\mathscr{K}_{P'}]/\mathscr{J}'
\end{tikzcd}$$

что, в частности, означает, что $m = m'$. Эта коммутативная диаграмма даёт изоморфизм (3.2) в силу стандартных свойств функтора Tor. А именно, изоморфизм φ влечёт изоморфизм алгебр Кошуля

$$\widetilde{\varphi}\colon \big(\Lambda[u_1,\dots,u_m]/\mathscr{J} \otimes \mathbb{Z}[\mathscr{K}_P]/\mathscr{J},d\big) \xrightarrow{\cong} \big(\Lambda[u_1',\dots,u_m']/\mathscr{J}' \otimes \mathbb{Z}[\mathscr{K}_{P'}]/\mathscr{J}',d\big), \tag{3.3}$$

где идеалы во внешних алгебрах порождены такими же линейными формами, как идеалы в кольцах граней. Тогда изоморфизм (3.2) получается переходом к кольцам когомологий. Предложение доказано.

Замечание 3.8. Приведенное выше доказательство предложения 3.7 есть в сущности рассуждение из [24; лемма 3.7]. Термин "B-жёсткость" был введён в последнем разделе работы [24]. Однако в результате недоразумения импликация из предложения 3.7 была там сформулирована неверно, в обратном направлении: "если P является C-жёстким, но он является B-жёстким". В действительности неизвестно, эквивалентны ли понятия C-жёсткости и B-жёсткости, и это вряд ли имеет место в общем случае.

4. Класс Погорелова: флаговые 3-многогранники без 4-поясов

Напомним, что класс Погорелова $\mathscr{P}$ состоит из простых 3-многогранников P, которые являются флаговыми и не имеют 4-поясов (или, эквивалентно, из простых 3-многогранников $P \neq \Delta^3$ без 3- и 4-поясов). В этом разделе мы рассмотрим комбинаторные свойства многогранников $P \in \mathscr{P}$ и когомологические свойства соответствующих момент-угол-многообразий $\mathscr{Z}_P$. Ключевыми утверждениями являются теоремы 4.7 и 4.10, а также лемма 4.11; они будут использованы при доказательстве основных результатов в следующем разделе. Более специальные свойства многогранников Погорелова описываются в приложениях.

Мы будем называть гиперграни 3-многогранника просто гранями. Первое свойство устанавливается непосредственно.

Предложение 4.1. *Многогранник $P \in \mathscr{P}$ не имеет треугольных и четырёхугольных граней.*

Лемма 4.2. *Для любых двух граней F_i и F_j многогранника $P \in \mathscr{P}$ существует вершина $x \notin F_i \cup F_j$.*

Доказательство. Пусть F_ℓ – грань, отличная от F_i и F_j. Тогда F_ℓ имеет не более двух общих вершин с F_i и не более двух общих вершин с F_j. С другой стороны, согласно предложению 4.1 грань F_ℓ имеет не меньше пяти вершин. Поэтому по крайней мере одна из вершин грани F_ℓ не содержится в $F_i \cup F_j$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Для любой грани F_i флагового 3-многогранника P найдётся такая грань F_j, что $F_i \cap F_j = \varnothing$.*

Доказательство. Согласно предложению B.2, (a) грань F_i окружена k-поясом $\mathscr{B}_k$. Тогда $\partial P \setminus \mathscr{B}_k$ состоит из двух компонент, одна из которых является внутренностью грани F_i, а другая содержит внутренность требуемой грани F_j. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим когомологии момент-угол-многообразия $\mathscr{Z}_P$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Напомним, что группа $H^3(\mathscr{Z}_P)$ имеет базис из классов когомологий $[u_iv_j] = [u_jv_i]$, соответствующих парам несоседних граней F_i, F_j (см. предложение 2.22).

Предложение 4.4. *Пусть P – простой трёхмерный многогранник с m гранями, и пусть $\mathscr{K} = \mathscr{K}_P$ – двойственный симплициальный комплекс. В обозначениях теоремы 2.21 мы имеем:*

$$H^\ell(\mathscr{Z}_P) = \begin{cases} \widetilde{H}^{-1}(\mathscr{K}_\varnothing) = \mathbb{Z} & \text{при } \ell = 0, \\ \bigoplus\limits_{|I|=\ell-1} \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_I) \oplus \bigoplus\limits_{|I|=\ell-2} \widetilde{H}^1(\mathscr{K}_I) & \text{при } 3 \leqslant \ell \leqslant m, \\ \widetilde{H}^2(\mathscr{K}) = \mathbb{Z} & \text{при } \ell = m+3, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В частности, группы $H^*(\mathscr{Z}_P)$ не имеют кручений. Более того, все нетривиальные произведения в кольце $H^*(\mathscr{Z}_P)$ имеют вид

$$\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_I) \otimes \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_J) \to \widetilde{H}^1(\mathscr{K}_{I\cup J}), \qquad I \cap J = \varnothing,$$

или

$$\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_I) \otimes \widetilde{H}^1(\mathscr{K}_{[m]\setminus I}) \to \widetilde{H}^2(\mathscr{K}) = \mathbb{Z}.$$

В мультиградуированных компонентах эти два случая принимают вид

$$H^{-(|I|-1),2I}(\mathscr{Z}_P) \otimes H^{-(|J|-1),2J}(\mathscr{Z}_P) \to H^{-(|I|+|J|-2),2(I\sqcup J)}(\mathscr{Z}_P),$$
$$H^{-(|I|-1),2I}(\mathscr{Z}_P) \otimes H^{-(m-|I|-2),2([m]\setminus I)}(\mathscr{Z}_P) \to H^{-(m-3),2[m]}(\mathscr{Z}_P) = \mathbb{Z},$$

где последнее отображение задаётся двойственностью Пуанкаре.

Доказательство. Это следует из теорем 2.18, 2.20 и 2.21.

Элемент градуированного кольца называется *разложимым*, если он представляется в виде суммы нетривиальных произведений элементов ненулевой степени.

Лемма 4.5 [34; предложение 6.3]. *Пусть P – флаговый трёхмерный многогранник с двойственным симплициальным комплексом $\mathscr{K}$. Тогда кольцо когомологий*

$$H^*(\mathscr{Z}_P) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^*(\mathscr{K}_J)$$

мультипликативно порождается элементами из $\bigoplus\limits_{J\subset[m]} \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_J)$.

Для доказательства леммы достаточно установить, что каждый ненулевой класс когомологий в $\widetilde{H}^1(\mathscr{K}_I) \subset H^*(\mathscr{Z}_P)$ является разложимым или, эквивалентно, что отображение произведения

$$\bigoplus_{I=I_1\sqcup I_2} \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{I_1}) \otimes \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{I_2}) \to \widetilde{H}^1(\mathscr{K}_I)$$

сюръективно. Доказательство является довольно техническим. Мы приводим его в приложении C для удобства читателей.

Лемма 4.6. *Простой 3-многогранник $P \neq \Delta^3$, имеющий m граней, является флаговым тогда и только тогда, когда каждый ненулевой класс когомологий в $H^{m-2}(\mathscr{Z}_P)$ разложим. В частности, если $H^{m-2}(\mathscr{Z}_P) = 0$, то либо многогранник P флаговый, либо $P = \Delta^3$.*

Доказательство. Предположим, что P не является флаговым. Так как $P \neq \Delta^3$, в многограннике P имеется 3-пояс $(F_{j_1}, F_{j_2}, F_{j_3})$. Тогда $J = \{j_1, j_2, j_3\}$ является недостающей гранью двойственного комплекса $\mathscr{K}$, которая задаёт ненулевой класс когомологий $\alpha \in H^{-1,2J}(\mathscr{Z}_P) \subset H^5(\mathscr{Z}_P)$. Рассмотрим невырожденное спаривание, задаваемое двойственностью Пуанкаре:

$$H^{m-2}(\mathscr{Z}_P) \otimes H^5(\mathscr{Z}_P) \to H^{m+3}(\mathscr{Z}_P) = \mathbb{Z},$$

которое в мультиградуированных компонентах имеет вид

$$H^{-(m-4),2([m]\setminus J)}(\mathscr{Z}_P)\otimes H^{-1,2J}(\mathscr{Z}_P)\to H^{-(m-3),2[m]}(\mathscr{Z}_P)=\mathbb{Z}$$

(см. предложение 4.4). Выберем $\beta\in H^{-(m-4),2([m]\setminus J)}(\mathscr{Z}_P)\subset H^{m-2}(\mathscr{Z}_P)$ так, что $\alpha\cdot\beta$ есть образующая группы $H^{-(m-3),2[m]}(\mathscr{Z}_P)=\mathbb{Z}$. Согласно теореме 2.21,

$$H^{-(m-4),2([m]\setminus J)}(\mathscr{Z}_P)=\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{[m]\setminus J}),$$

а любой элемент из $\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{[m]\setminus J})$ является неразложимым согласно предложению 4.4. Таким образом, мы нашли неразложимый элемент $\beta\in H^{m-2}(\mathscr{Z}_P)$.

Теперь пусть P является флаговым. Согласно предложению 4.4,

$$H^{m-2}(\mathscr{Z}_P)=\bigoplus_{|I|=m-3}\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_I)\oplus\bigoplus_{|I|=m-4}\widetilde{H}^1(\mathscr{K}_I).$$

Рассмотрим отображение двойственности Пуанкаре:

$$\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_I)\otimes\widetilde{H}^1(\mathscr{K}_{[m]\setminus I})\to\mathbb{Z}.$$

Так как $\mathscr{K}$ является флаговым комплексом, то

$$\widetilde{H}^1(\mathscr{K}_{[m]\setminus I})=0\quad\text{при } |I|=m-3$$

(поскольку нет недостающих граней с тремя вершинами). Следовательно,

$$\bigoplus_{|I|=m-3}\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_I)=0$$

в силу двойственности Пуанкаре, а значит,

$$H^{m-2}(\mathscr{Z}_P)=\bigoplus_{|I|=m-4}\widetilde{H}^1(\mathscr{K}_I).$$

Тогда любой ненулевой элемент из $H^{m-2}(\mathscr{Z}_P)$ разложим согласно лемме 4.5. Лемма доказана.

Теорема 4.7. *Пусть P – флаговый 3-многогранник, и пусть дан изоморфизм колец $H^*(\mathscr{Z}_P)\cong H^*(\mathscr{Z}_{P'})$ для некоторого другого 3-многогранника P'. Тогда многогранник P' также является флаговым.*

Другими словами, свойство быть флаговым 3-многогранником является B-жёстким.

Доказательство. Мы имеем $P'\neq\Delta^3$, так как симплекс является B-жёстким. Пусть P' не является флаговым. По лемме 4.6 в $H^{m-2}(\mathscr{Z}_{P'})$ найдётся неразложимый элемент. Тогда то же верно для P. Противоречие. Теорема доказана.

Замечание 4.8. Теорема 4.7 также следует из [34; теорема 6.6].

Предложение 4.9. *Пусть P – простой 3-многогранник.*

(a) *Произведение $H^3(\mathscr{Z}_P)\otimes H^3(\mathscr{Z}_P)\to H^6(\mathscr{Z}_P)$ тривиально тогда и только тогда, когда P не имеет 4-поясов.*

(b) *Тройное произведение Масси $H^3(\mathscr{Z}_P)\otimes H^3(\mathscr{Z}_P)\otimes H^3(\mathscr{Z}_P)\to H^8(\mathscr{Z}_P)$ тривиально, если P не имеет 4-поясов.*

Доказательство. Вначале докажем утверждение (a). Предположим, что P имеет 4-пояс (F_1, F_2, F_3, F_4). Он соответствует бесхордовому 4-циклу $\{1,2,3,4\}$ в комплексе $\mathscr{K} = \mathscr{K}_P$, т. е. циклу с $\{1,3\} \notin \mathscr{K}$ и $\{2,4\} \notin \mathscr{K}$. Тогда мы имеем нетривиальное произведение

$$\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{\{1,3\}}) \otimes \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{\{2,4\}}) \to \widetilde{H}^1(\mathscr{K}_{\{1,2,3,4\}}),$$

которое даёт нетривиальное произведение $H^3(\mathscr{Z}_P) \otimes H^3(\mathscr{Z}_P) \to H^6(\mathscr{Z}_P)$.

Предположим теперь, что произведение $H^3(\mathscr{Z}_P) \otimes H^3(\mathscr{Z}_P) \to H^6(\mathscr{Z}_P)$ нетривиально. Мы имеем

$$H^6(\mathscr{Z}_P) = \bigoplus_{|I|=5} \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_I) \oplus \bigoplus_{|I|=4} \widetilde{H}^1(\mathscr{K}_I).$$

Элементы из $\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_I)$ неразложимы. Элемент из $\widetilde{H}^1(\mathscr{K}_I)$, где $|I| = 4$, может быть разложен в произведение в том и только том случае, когда множество I можно разбить на две пары несмежных вершин, что означает, что I есть бесхордовый 4-цикл. Он соответствует 4-поясу в P.

Теперь докажем утверждение (b). Пусть имеется нетривиальное произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \in H^8(\mathscr{Z}_P)$. Тогда, согласно теореме 2.24, граф $\mathscr{K}_P^1$ содержит индуцированный подграф, изоморфный одному из пяти графов на рис. 1. Легко видеть, что каждый из этих пяти графов содержит бесхордовый 4-цикл (внешний цикл для первых четырёх графов и левый цикл для последнего графа). Следовательно, многогранник P имеет 4-пояс. Предложение доказано.

Вопрос о том, существуют ли нетривиальные тройные произведения Масси классов когомологий размерности больше 3 или нетривиальные произведения Масси порядка больше 3 в когомологиях момент-угол-многообразий над многогранниками из класса Погорелова $\mathscr{P}$, остаётся открытым. Также открыт вопрос о том, являются ли такие момент-угол-многообразия формальными в смысле рациональной теории гомотопий. Для общих многогранников P существуют примеры нетривиальных произведений Масси произвольного порядка в $H^*(\mathscr{Z}_P)$ (см. [42]).

Теорема 4.10. *Пусть P – простой 3-многогранник без 4-поясов, и пусть дан изоморфизм колец $H^*(\mathscr{Z}_P) \cong H^*(\mathscr{Z}_{P'})$ для некоторого другого простого 3-многогранника P'. Тогда многогранник P' также не имеет 4-поясов.*

Другими словами, свойство быть простым 3-многогранником без 4-поясов является B-жёстким.

Доказательство. Это следует из предложения 4.9, (a).

Недавно Ф. Фаном, Дж. Ма и К. Вангом было доказано, что многогранники $P \in \mathscr{P}$ являются B-жёсткими (см. [33; теорема 3.1]). Доказательство использует следующую ключевую лемму.

Лемма 4.11 [33; следствие 3.4]. *Рассмотрим множество классов когомологий*

$$\mathscr{T}(P) = \{\pm[u_i v_j] \in H^3(\mathscr{Z}_P),\ F_i \cap F_j = \varnothing\}.$$

Если $P \in \mathscr{P}$, то для любого изоморфизма колец когомологий $\psi\colon H^*(\mathscr{Z}_P) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathscr{Z}_{P'})$ мы имеем

$$\psi(\mathscr{T}(P)) = \mathscr{T}(P').$$

Заметим, что утверждение леммы 4.11 неверно для произвольных простых 3-многогранников. Например, если P является трёхмерным кубом с парами противоположных граней $\{F_1, F_4\}$, $\{F_2, F_5\}$, $\{F_3, F_6\}$, то $\mathscr{Z}_P \cong S^3 \times S^3 \times S^3$ и существует изоморфизм $\psi\colon H^*(\mathscr{Z}_P) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathscr{Z}_P)$, переводящий $[u_1v_4]$ в $[u_1v_4] + [u_2v_5]$.

Для удобства читателей мы приводим доказательство леммы 4.11 в приложении D; кроме того, там восполнены некоторые пробелы в исходном рассуждении. Заметим, что в доказательстве леммы 4.11 используются теоремы 4.7 и 4.10.

5. Основные результаты

Здесь мы доказываем когомологическую жёсткость малых накрытий и квазиторических многообразий над 3-многогранниками из класса Погорелова $\mathscr{P}$. Начнём с ключевой леммы.

Лемма 5.1. *В обозначениях теоремы 2.3 рассмотрим множество классов когомологий*

$$\mathscr{D}(M) = \{\pm[v_i] \in H^2(M),\ i = 1, \dots, m\}.$$

Если $P \in \mathscr{P}$, то для любого изоморфизма колец когомологий $\varphi\colon H^*(M) \xrightarrow{\cong} H^*(M')$ квазиторических многообразий над P и P' имеем

$$\varphi(\mathscr{D}(M)) = \mathscr{D}(M').$$

Более того, каждое из множеств $\mathscr{D}(M)$ и $\mathscr{D}(M')$ состоит из $2m$ различных элементов.

Доказательство. Идея состоит в том, чтобы свести утверждение к лемме 4.11. Кольцевой изоморфизм φ однозначно задаётся изоморфизмом

$$H^2(M) \xrightarrow{\cong} H^2(M')$$

свободных абелевых групп. Пусть $\varphi([v_i]) = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}[v'_j]$ для некоторых $A_{ij} \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Элементы A_{ij} определены неоднозначно, так как между классами $[v'_j]$ в $H^2(M')$ имеются линейные соотношения. Чтобы избавиться от этой неопределённости, выберем вершину $x = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$ многогранника P и вершину $x' = F'_{p_1} \cap F'_{p_2} \cap F'_{p_3}$ многогранника P'. Тогда классы когомологий $[v_i]$ при $i \notin \{i_1, i_2, i_3\}$ образуют базис в $H^2(M)$, а классы когомологий $[v'_p]$ при $p \notin \{p_1, p_2, p_3\}$ образуют базис в $H^2(M')$, так что мы имеем

$$\varphi([v_i]) = \sum_{p \notin \{p_1, p_2, p_3\}} B_{ip}[v'_p], \qquad i \in [m] \setminus \{i_1, i_2, i_3\}, \tag{5.1}$$

с однозначно определёнными коэффициентами

$$B_{ip} \in \mathbb{Z}, \qquad i \in [m] \setminus \{i_1, i_2, i_3\}, \quad p \in [m] \setminus \{p_1, p_2, p_3\}.$$

Как мы видели при доказательстве предложения 3.7, изоморфизм φ влечёт изоморфизм $\psi\colon H^*(\mathscr{Z}_P) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathscr{Z}_{P'})$, который получается переходом к когомологиям в (3.3). Мы запишем изоморфизм (3.3) как $\widetilde{\varphi}\colon C(P,\varLambda) \xrightarrow{\cong} C(P',\varLambda')$. Значение этого изоморфизма на внешних образующих u_i и полиномиальных образующих v_i алгебры Кошуля $C(P,\varLambda)$ задаётся теми же формулами, что и для φ.

Теперь рассмотрим класс когомологий $[u_iv_j] \in H^3(\mathscr{Z}_P)$. Согласно лемме 4.11, этот класс переходит под действием изоморфизма ψ в некоторый элемент

$$\varepsilon[u'_kv'_l] \in H^3(\mathscr{Z}_{P'}), \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Выберем вершину $x = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$ в P и вершину $x' = F'_{p_1} \cap F'_{p_2} \cap F'_{p_3}$ в P' так, что $x \notin F_i \cup F_j$ и $x' \notin F'_k \cup F'_l$ (см. лемму 4.2). Используя вершины x и x', выберем базисы в группах $H^2(M)$ и $H^2(M')$ так, как описано в первом абзаце доказательства. Тогда

$$\psi[u_iv_j] = \sum_{p,q\notin\{p_1,p_2,p_3\}} B_{ip}B_{jq}[u'_pv'_q].$$

С другой стороны, $\psi[u_iv_j] = \varepsilon[u'_kv'_l]$ согласно лемме 4.11. Следовательно,

$$a = \sum_{p,q\notin\{p_1,p_2,p_3\}} B_{ip}B_{jq}u'_pv'_q - \varepsilon u'_kv'_l$$

является кограницей в $C(P',\varLambda')$, т. е. существует элемент

$$c = \sum_{p,q\notin\{p_1,p_2,p_3\},\ p<q} L_{pq}u'_pu'_q, \qquad dc = a.$$

Мы имеем

$$dc = \sum_{p,q\notin\{p_1,p_2,p_3\},\ p<q} L_{pq}(u'_qv'_p - u'_pv'_q).$$

Сравнивая это с выражением выше для a, мы получаем следующие соотношения между коэффициентами:

$$B_{ip}B_{jq} = -B_{iq}B_{jp} = -L_{pq} \quad \text{при } p<q \text{ и } \{p,q\} \ne \{k,l\}; \tag{5.2a}$$

$$B_{ik}B_{jl} - \varepsilon = -B_{il}B_{jk} = \begin{cases} -L_{kl}, & \text{если } k<l, \\ L_{lk}, & \text{если } l<k; \end{cases} \tag{5.2b}$$

$$B_{ip}B_{jp} = 0. \tag{5.2c}$$

Из (5.2c) вытекает, что для любого $p \in [m] \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ либо $B_{ip} = 0$, либо $B_{jp} = 0$. Из (5.2a) вытекает, что при $\{p, q\} \neq \{k, l\}$ векторы $\begin{pmatrix} B_{ip} \\ B_{jp} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B_{iq} \\ -B_{jq} \end{pmatrix}$ линейно независимы. Следовательно, при $\{p, q\} \neq \{k, l\}$ либо один из векторов $\begin{pmatrix} B_{ip} \\ B_{jp} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B_{iq} \\ B_{jq} \end{pmatrix}$ нулевой, либо оба вектора ненулевые и имеют нуль на одной и той же позиции. Из $B_{ik}B_{jl} + B_{il}B_{jk} = \varepsilon$ (см. (5.2b)) вытекает, что оба вектора $b_k = \begin{pmatrix} B_{ik} \\ B_{jk} \end{pmatrix}$ и $b_l = \begin{pmatrix} B_{il} \\ B_{jl} \end{pmatrix}$ ненулевые. Если имеется ненулевой вектор $b_p = \begin{pmatrix} B_{ip} \\ B_{jp} \end{pmatrix}$ для некоторого $p \notin \{k, l\}$, то, рассматривая пары (b_p, b_k) и (b_p, b_l), мы получаем, что оба вектора b_k и b_l имеют нуль на одной и той же позиции, что противоречит соотношению в (5.2b). Следовательно, $B_{ip} = B_{jp} = 0$ при $p \notin \{k, l\}$ и

$$\begin{pmatrix} B_{ik} & B_{il} \\ B_{jk} & B_{jl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{ik} & 0 \\ 0 & \varepsilon/B_{ik} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} B_{ik} & B_{il} \\ B_{jk} & B_{jl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_{il} \\ \varepsilon/B_{il} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как все векторы имеют целые координаты, мы получаем, что $B_{ik} = \pm 1$ или $B_{il} = \pm 1$. Тогда из (5.1) вытекает, что $\varphi([v_i]) \in \{\pm[v'_k], \pm[v'_l]\}$. Следовательно, $\varphi(\mathscr{D}(M)) \subset \mathscr{D}(M')$.

Теперь проверим, что каждое из множеств $\mathscr{D}(M)$ и $\mathscr{D}(M')$ состоит из $2m$ элементов. Для этого заметим, что $[v_i] \neq \pm[v_j]$ в $H^2(M)$ при $i \neq j$. Действительно, в силу леммы 4.2 мы можем выбрать вершину $x \notin F_i \cup F_j$. Тогда оба элемента $[v_i]$ и $[v_j]$ принадлежат некоторому базису группы $H^2(M)$. Далее, так как φ – изоморфизм, мы имеем $\varphi([v_i]) \neq \pm\varphi([v_j])$ в $H^2(M')$. Поэтому каждое из множеств $\mathscr{D}(M)$ и $\mathscr{D}(M')$ состоит из $2m$ элементов и $\varphi(\mathscr{D}(M)) = \mathscr{D}(M')$. Лемма 5.1 доказана.

Из теоремы Штейница (теорема 2.1) следует, что любое торическое многообразие комплексной размерности 3 является квазиторическим. Кроме того, в вещественной размерности 6 семейство квазиторических многообразий совпадает с семейством топологических торических многообразий, если забыть про действия.

Теперь мы можем сформулировать наш первый основной результат.

Теорема 5.2. *Пусть $M = M(P, \Lambda)$ и $M' = M(P', \Lambda')$ – квазиторические многообразия над трёхмерными простыми многогранниками P и P' соответственно. Предположим, что многогранник P лежит в классе Погорелова $\mathscr{P}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *существует изоморфизм колец когомологий $\varphi\colon H^*(M) \xrightarrow{\cong} H^*(M')$;*
(b) *существует диффеоморфизм $M \cong M'$;*
(c) *существует эквивалентность характеристических пар $(P, \Lambda) \sim (P', \Lambda')$.*

Доказательство. Импликация (b) $\Rightarrow$ (a) очевидна. Импликация (c) $\Rightarrow$ (b) следует из предложения 2.25. Осталось доказать импликацию (a) $\Rightarrow$ (c).

В силу леммы 5.1 имеем $\varphi([v_i]) = \pm[v'_{\sigma(i)}]$, где σ – некоторая перестановка на множестве $[m]$. Перенумеровав грани и умножив матрицу Λ справа на матрицу B из определения 2.6, мы можем предполагать, что $\varphi([v_i]) = v_i'$; это не меняет класс эквивалентности характеристической пары (P, Λ). Тогда $\varphi[v_iv_j] = [v_i'v_j']$. Из следствия 2.4 получаем, что

(i) $[v_iv_j] = 0$ в $H^*(M)$ в том и только том случае, когда $F_i \cap F_j = \varnothing$, и

(ii) $[v_iv_jv_k] = 0$ в $H^*(M)$ в том и только том случае, когда $F_i \cap F_j \cap F_k = \varnothing$ в P,

и то же имеет место для $H^*(M')$ и P'. Отсюда следует, что комплексы $\mathscr{K}_P$ и $\mathscr{K}_{P'}$ изоморфны, т. е. многогранники P и P' комбинаторно эквивалентны.

Теперь рассмотрим $(3 \times m)$-матрицы Λ и Λ'. Мы можем предполагать, что $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \neq \varnothing$ в P и $F_1' \cap F_2' \cap F_3' \neq \varnothing$ в P'; этого всегда можно добиться перенумеровкой граней многогранников P и P'. Далее, умножив матрицы Λ и Λ' слева на соответствующие матрицы из $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$, мы можем предполагать, что

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda_{14} & \dots & \lambda_{1m} \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_{24} & \dots & \lambda_{2m} \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_{34} & \dots & \lambda_{3m} \end{pmatrix}, \qquad \Lambda' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda_{14}' & \dots & \lambda_{1m}' \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_{24}' & \dots & \lambda_{2m}' \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_{34}' & \dots & \lambda_{3m}' \end{pmatrix}.$$

Это не меняет класс эквивалентности пар (P, Λ) и (P', Λ'). Теперь матричные элементы λ_{jk}, $4 \leqslant k \leqslant m$, являются коэффициентами в разложении элементов $[v_j]$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, по базису $[v_4], \dots, [v_m]$ группы $H^2(M)$. То же имеет место и для матричных элементов λ_{jk}'. Так как $\varphi([v_i]) = v_i'$, отсюда следует, что $\lambda_{jk} = \lambda_{jk}'$. Итак, характеристические пары (P, Λ) и (P', Λ') эквивалентны. Теорема доказана.

Замечание 5.3. Любая гладкая структура на квазиторическом многообразии M над многогранником $P \in \mathscr{P}$ эквивалентна стандартной гладкости, заданной на канонической модели $M(P, \Lambda)$ при помощи предложения 2.25. Это вытекает из общих классификационных результатов для шестимерных многообразий (см. следствие 6.4).

Следствие 5.4. *Торические, квазиторические и топологические торические многообразия над многогранниками из класса Погорелова $\mathscr{P}$ являются когомологически жёсткими.*

Замечание 5.5. Теорема 5.2 утверждает, что изоморфизм колец когомологий квазиторических многообразий над многогранниками $P \in \mathscr{P}$ влечёт не только диффеоморфизм многообразий, но также и эквивалентность характеристических пар. Последнее утверждение неверно для квазиторических многообразий над произвольными многогранниками. Например, рассмотрим *поверхности Хирцебруха* $H_k = \mathbb{C}P(\mathscr{O}(k) \oplus \underline{\mathbb{C}})$, где $\mathscr{O}(k)$ есть k-я степень канонического одномерного комплексного расслоения над $\mathbb{C}P^1$, $\underline{\mathbb{C}}$ обозначает тривиальное комплексное одномерное расслоение, а $\mathbb{C}P(-)$ обозначает комплексную проективизацию. Каждое H_k является торическим многообразием, а также может быть описано как квазиторическое многообразие над четырёхугольником с характеристической матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Многообразия H_k с чётным k все диффеоморфны $S^2 \times S^2$, но характеристические матрицы, соответствующие различным положительным k, не эквивалентны. Аналогичные примеры существуют в произвольной размерности – см., например, [46].

Семейство квазиторических (или топологических торических) многообразий над 3-многогранниками из класса $\mathscr{P}$ является достаточно широким, так как над каждым таким многогранником имеется хотя бы одно квазиторическое многообразие согласно предложению 2.9 (напомним, что доказательство использует теорему о четырёх красках). Торических многообразий в этом семействе гораздо меньше. В действительности над многогранниками из класса $\mathscr{P}$ вообще не существует *проективных* торических многообразий. Причина заключается в том, что дельзанов 3-многогранник должен иметь по крайней мере одну треугольную или четырёхугольную грань согласно результату К. Делоне [29] (см. также [3]). С другой стороны, над некоторыми многогранниками из класса $\mathscr{P}$ существуют непроективные торические многообразия (см. [59]).

Наш второй основной результат относится к малым накрытиям (или гиперболическим 3-многообразиям).

Теорема 5.6. *Пусть $N = N(P, \Lambda)$ и $N' = N(P', \Lambda')$ – малые накрытия над трёхмерными простыми многогранниками P и P' соответственно. Предположим, что многогранник P лежит в классе Погорелова $\mathscr{P}$, т. е. N является гиперболическим 3-многообразием типа Лёбелля. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *существует изоморфизм колец когомологий $\varphi\colon H^*(N; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(N'; \mathbb{Z}_2)$;*

(b) *существует изоморфизм фундаментальных групп $\pi_1(N) \cong \pi_1(N')$;*

(c) *существует диффеоморфизм $N \cong N'$;*

(d) *существует эквивалентность $\mathbb{Z}_2$-характеристических пар $(P, \Lambda) \sim (P', \Lambda')$.*

Доказательство. Импликации (b) $\Rightarrow$ (a) и (c) $\Rightarrow$ (b) очевидны (эквивалентность (b) $\Leftrightarrow$ (c) также следует из теоремы жёсткости Мостова для гиперболических многообразий). Импликация (d) $\Rightarrow$ (c) следует из вещественной версии предложения 2.25.

Осталось доказать импликацию (a) $\Rightarrow$ (d). Используя предложение 2.12, мы можем считать, что (P, Λ) и (P', Λ') являются $\mathbb{Z}$-характеристическими парами. Рассмотрим соответствующие квазиторические многообразия $M = M(P, \Lambda)$ и $M' = M(P', \Lambda')$. Так как кольцо $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ получается из $H^*(N; \mathbb{Z}_2)$ удвоением градуировки (см. теорему 2.10), мы имеем изоморфизм колец $H^*(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(M'; \mathbb{Z}_2)$. Тогда эквивалентность характеристических пар следует из теоремы 5.2 (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$). Теорема доказана.

Пример 5.7. Пусть Q_k, где $k \geqslant 5$, – “k-бочка”, т. е. простой 3-многогранник, у которого имеются две k-угольные грани (“крышка” и “дно”) и $2k$ пятиугольных граней, образующих два k-пояса вокруг крышки и дна. Заметим, что Q_5 является комбинаторным додекаэдром, а Q_6 – фуллереном (см. рис. 2). Легко видеть, что $Q_k \in \mathscr{P}$, поэтому Q_k допускает прямоугольную реализацию

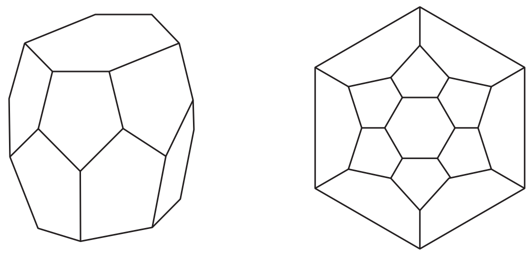

Рис. 2. Фуллерен “бочка” и его диаграмма Шлегеля

в $\mathbb{L}^3$. Гиперболические 3-многообразия $N(Q_k,\chi)$, соответствующие правильным 4-раскраскам χ многогранников Q_k (как описано в предложении 2.9), изучались А. Ю. Весниным [61]. Например, додекаэдр Q_5 имеет единственную правильную 4-раскраску с точностью до эквивалентности, а Q_6 имеет четыре неэквивалентных правильных 4-раскраски (две раскраски считаются эквивалентными, если они отличаются на перестановку цветов).

А. Ю. Веснин сформулировал гипотезу: многообразия $N(Q_k,\chi)$ и $N(Q_k,\chi')$ изометричны тогда и только тогда, когда 4-раскраски χ и χ' эквивалентны. В работе [62] эта гипотеза была доказана для многогранников Q_k, у которых гиперболическая группа отражений $G(Q_k)$ является *неарифметической* (как подгруппа группы изометрий пространства $\mathbb{L}^3$). Метод доказательства основан на теореме Маргулиса [44] о дискретности соизмерителя неарифметической группы. В [2] доказано, что группа $G(Q_k)$ является неарифметической для всех k, за исключением 5, 6 и 8. Так как додекаэдр Q_5 имеет единственную 4-раскраску, гипотеза оставалась открытой только для $k=6,8$.

Из теоремы 5.6 вытекает полное доказательство гипотезы Веснина, не использующее предыдущие результаты по этой гипотезе.

Следствие 5.8. *Гиперболические многообразия $N(Q_k,\chi)$ и $N(Q_k,\chi')$, задаваемые правильными 4-раскрасками многогранника Q_k, $k\geqslant 5$, изометричны тогда и только тогда, когда 4-раскраски χ и χ' эквивалентны.*

Доказательство. Очевидно, что если χ и χ' эквивалентны, то многообразия изометричны. Обратно, если многообразия изометричны, то они диффеоморфны, и из теоремы 5.6 вытекает, что соответствующие характеристические матрицы Λ и Λ' эквивалентны (т. е. $\Lambda'=A\Lambda$, где $A\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_2)$). В работе [15] доказано, что из эквивалентности характеристических матриц, задаваемых 4-раскрасками, вытекает эквивалентность раскрасок. Следствие доказано.

6. Классификация шестимерных многообразий и смежные вопросы

Классификация гладких односвязных шестимерных многообразий со свободными группами гомологий была дана в работах Т. Уолла [66] и П. Джуппа [40]. В [40] был также сформулирован классификационный результат в топологической категории, доказательство которого было исправлено позднее в работе

А. В. Жубра [67]. В последней работе был также рассмотрен случай гомологий с кручениями. Мы приведём лишь следующий результат, которого будет достаточно для наших целей (когомологии рассматриваются с целыми коэффициентами, если не указано противное).

Теорема 6.1 [66], [40]. *Пусть* $\varphi\colon H^*(N)\xrightarrow{\cong}H^*(N')$ – *изоморфизм колец целочисленных когомологий замкнутых гладких односвязных шестимерных многообразий* N *и* N' *таких, что* $H^3(N)=H^3(N')=0$. *Предположим, что*

(a) $\varphi(w_2(N))=w_2(N')$, *где* $w_2(N)\in H^2(N;\mathbb{Z}_2)$ – *второй класс Штифеля–Уитни*;

(b) $\varphi(p_1(N))=p_1(N')$, *где* $p_1(N)\in H^4(N)$ – *первый класс Понтрягина*.

Тогда многообразия N *и* N' *диффеоморфны*.

Доказательство следующей леммы использует квадраты Стинрода.

Лемма 6.2 [22; лемма 8.1]. *Предположим, что кольцо* $H^*(N;\mathbb{Z}_2)$ *порождено элементами из* $H^k(N;\mathbb{Z}_2)$ *для некоторого* $k>0$. *Тогда любой изоморфизм колец* $\varphi\colon H^*(N;\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{\cong}H^*(N';\mathbb{Z}_2)$ *сохраняет полный класс Штифеля–Уитни, т. е.*

$$\varphi(w(N))=w(N').$$

Лемма 6.2 применима к торическим и квазиторическим многообразиям, кольца когомологий которых порождаются элементами степени два. Тогда из теоремы 6.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 6.3. *Пусть* $\varphi\colon H^2(M)\xrightarrow{\cong}H^2(M')$ – *изоморфизм вторых групп когомологий шестимерных гладких квазиторических многообразий. Предположим, что*

(a) φ *сохраняет кубическую форму*

$$H^2(M)\otimes H^2(M)\otimes H^2(M)\to\mathbb{Z}=H^6(M),$$

задаваемую умножением в когомологиях;

(b) φ *сохраняет первый класс Понтрягина*.

Тогда многообразия M *и* M' *диффеоморфны*.

Из топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина (доказанной С. П. Новиковым) получаем следующее утверждение.

Следствие 6.4. *Пусть* M *и* M' – *шестимерные гладкие квазиторические многообразия. Если* M *и* M' *гомеоморфны, то они диффеоморфны*.

Характеристические классы квазиторического многообразия задаются следующим образом.

Предложение 6.5 [27; следствие 6.7]. *В обозначениях теоремы* 2.3 *полные классы Штифеля–Уитни и Понтрягина квазиторического многообразия* M *задаются формулами*

$$w(M)=\prod_{i=1}^m(1+v_i)\mod 2,\qquad p(M)=\prod_{i=1}^m(1+v_i^2).$$

В частности, $w_2(M)=v_1+\dots+v_m\bmod 2$ *и* $p_1(M)=v_1^2+\dots+v_m^2$.

Следствие 6.6. *Семейство шестимерных квазиторических многообразий является когомологически жёстким тогда и только тогда, когда любой изоморфизм колец когомологий многообразий из этого семейства сохраняет первый класс Понтрягина.*

Последнее утверждение сводит проблему когомологической жёсткости шестимерных квазиторических многообразий M к вопросу в рамках исключительно комбинаторики и линейной алгебры, так как кольцо когомологий $H^*(M)$ и первый класс Понтрягина $p_1(M) = v_1^2 + \cdots + v_m^2$ определяются целиком в терминах характеристической пары (P, Λ).

Наш результат о когомологической жёсткости квазиторических многообразий над многогранниками из класса Погорелова $\mathscr{P}$ (теорема 5.2) даёт полную классификацию для этого специального класса односвязных 6-многообразий, а его доказательство независимо от общих классификационных результатов Уолла и Джуппа. Инвариантность первого класса Понтрягина для квазиторических многообразий над многогранниками из класса Погорелова непосредственно вытекает из леммы 5.1. Было бы интересно получить прямое (комбинаторное?) доказательство этого факта. Другим семейством торических многообразий, для которого установлена инвариантность классов Понтрягина при изоморфизмах колец когомологий, являются башни Ботта (любой размерности), см. [20].

Замечание 6.7. В размерности 4 мы имеем соотношение

$$\langle p_1(M), [M] \rangle = 3\,\mathrm{sign}(M), \tag{6.1}$$

где $[M] \in H_4(M)$ – фундаментальный класс, а $\mathrm{sign}(M)$ – сигнатура многообразия M. Поэтому класс p_1 инвариантен относительно изоморфизмов колец когомологий. Сигнатура торического многообразия M равна $4 - m$, где m – число вершин соответствующего многоугольника P (см., например, [14; пример 9.5.3]). Соотношение (6.1) тогда принимает вид

$$\langle v_1^2 + \cdots + v_m^2, [M] \rangle = 12 - 3m$$

и может быть выведено непосредственно из теоремы 2.2.

Приложение A. Пояса в 3-многогранниках

Здесь мы приводим доказательства двух комбинаторных лемм о поясах во флаговых 3-многогранниках. Эти результаты впервые были опубликованы в работах [34] и [33] соответственно. Доказательства приводятся в основном ради полноты изложения, хотя некоторые детали в исходных доказательствах отсутствовали. Лемма A.1 используется при доказательстве леммы о разложении в произведение из приложения C, а лемма A.3 используется при доказательстве жёсткости набора канонических образующих группы $H^3(\mathscr{Z}_P)$ в приложении D.

Напомним, что пояс из граней простого 3-многогранника P соответствует бесхордовому циклу в двойственном симплициальном комплексе $\mathscr{K}_P$ или полному подкомплексу $(\mathscr{K}_P)_I$, изоморфному границе многоугольника.

Лемма A.1. *Пусть P – флаговый 3-многогранник. Тогда для любых трёх различных граней F_i, $F_{i'}$, F_k, где $F_i \cap F_{i'} = \varnothing$, найдётся такой пояс $\mathscr{B}$, что*

$$F_i, F_{i'} \in \mathscr{B} \quad \text{и} \quad F_k \notin \mathscr{B}.$$

Мы переформулируем эту лемму в двойственных обозначениях; именно в таком виде она была сформулирована и доказана в [34].

Лемма A.2 [34; лемма 6.1]. *Пусть $\mathscr{K}$ – флаговая триангуляция диска D^2 с m вершинами, и пусть S – набор вершин границы $\partial\mathscr{K}$. Предположим, что $\mathscr{K}_S = \partial\mathscr{K}$. Тогда для любого недостающего ребра $\{i, i'\} \notin \mathscr{K}$ найдётся такое подмножество $I \subset [m]$, что $\{i, i'\} \subset I$ и $\mathscr{K}_I$ – бесхордовый цикл (граница многоугольника).*

Чтобы вывести лемму A.1 из леммы A.2, возьмём в качестве $\mathscr{K}$ симплициальное дополнение к вершине двойственного комплекса $\mathscr{K}_P$, соответствующей грани $F_k \subset P$, т. е. положим

$$\mathscr{K} := (\mathscr{K}_P)_{[m]\setminus\{k\}}.$$

Тогда $\mathscr{K}$ – флаговая триангуляция диска D^2 (как полный подкомплекс во флаговом комплексе $\mathscr{K}_P$) и $\mathscr{K}_S = \partial\mathscr{K}$, так как $\mathscr{K}_P$ – флаговый комплекс. Лемма A.2 даёт бесхордовый цикл $\mathscr{K}_I$ в $\mathscr{K} \subset \mathscr{K}_P$, который соответствует требуемому поясу в P.

Звезда и *линк* вершины $\{i\} \in \mathscr{K}$ суть подкомплексы

$$\operatorname{star}_{\mathscr{K}}\{i\} = \{I \in \mathscr{K} : \{i\} \cup I \in \mathscr{K}\}, \qquad \operatorname{link}_{\mathscr{K}}\{i\} = \{I \in \mathscr{K} : \{i\} \cup I \in \mathscr{K},\ i \notin I\}.$$

Доказательство леммы A.2. Будем вести индукцию по m, т. е. по числу вершин комплекса $\mathscr{K}$. Так как $\mathscr{K}$ – флаговая триангуляция диска, то $|S| \geqslant 4$ и $m \geqslant 5$. Если $m = 5$, то $|S| = 4$ и $\mathscr{K}$ есть конус над квадратом; тогда $\{i, i'\} \in S$ и мы можем взять $I := S$.

Теперь предположим, что утверждение верно для симплициальных комплексов, число вершин которых меньше m. Если обе вершины i и i' лежат в $\partial\mathscr{K}$, то $I := S$ даёт требуемый бесхордовый цикл. Так что далее будем рассматривать случай $\{i, i'\} \not\subset S$. Тогда $|S| < m - 1$. Для каждой вершины $j \in S$ обозначим через m_j число вершин в звезде $\operatorname{star}_{\mathscr{K}}\{j\}$. Тогда $m_j \geqslant 4$ для $j \in S$, так как $\mathscr{K}_S = \partial\mathscr{K}$. Рассмотрим несколько случаев.

I. Предположим, что найдётся такая вершина $j \in S \setminus \{i, i'\}$, что $m_j = 4$. Тогда набором вершин комплекса $\operatorname{star}_{\mathscr{K}}\{j\}$ является $\{j, j', j'', k\}$, где $j, j', j'' \in S$ и $k \notin S$ (см. рис. 3).

1) Если не существует такой вершины $k' \in S \setminus \{j, j', j''\}$, что $\{k, k'\}$ есть ребро в $\mathscr{K}$, то симплициальный комплекс $\mathscr{K}' := \mathscr{K}_{[m]\setminus\{j\}}$ удовлетворяет предположениям леммы. По предположению индукции можно выбрать такое подмножество I' в $[m] \setminus \{j\}$, что $\{i, i'\} \subset I'$ и $\mathscr{K}'_{I'}$ есть бесхордовый цикл. Тогда $I := I'$ есть требуемое подмножество, так как $\mathscr{K}_{I'} = \mathscr{K}'_{I'}$.

2) Теперь предположим, что существует такая вершина $k' \in S \setminus \{j, j', j''\}$, что $\{k, k'\}$ есть ребро в $\mathscr{K}$. Пусть $\mathscr{K}'$ – симплициальный комплекс, получаемый из $\mathscr{K}$ применением бизвёздного 1-преобразования в $\operatorname{star}_{\mathscr{K}}\{j\}$ (см. рис. 3).

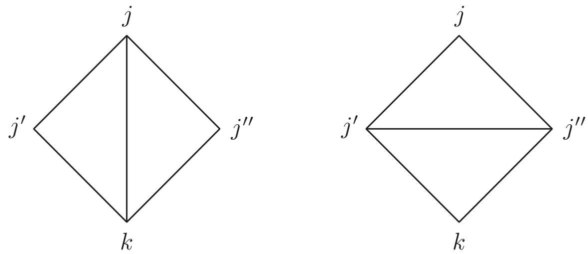

Рис. 3. Комплекс $\mathrm{star}_{\mathscr{K}}\{j\}$ и его бизвёздное 1-преобразование

Тогда комплекс $\mathscr{K}'' := \mathscr{K}'_{[m]\setminus\{j\}}$ удовлетворяет предположениям леммы. По предположению индукции найдётся такое подмножество I'' в $[m]\setminus\{j\}$, что $\{i,i'\}\subset I''$ и $\mathscr{K}''_{I''}$ есть бесхордовый цикл. Если вершина j' или j'' не содержится в I'', то $I := I''$ есть требуемое подмножество. Если же обе вершины j' и j'' содержатся в I'', то $I := I''\cup\{j\}$ есть требуемое подмножество.

II. Предположим, что $m_j > 4$ для любой вершины $j\in S\setminus\{i,i'\}$. Пусть $S=\{j_1,\dots,j_n\}$, где вершины упорядочены против часовой стрелки, и пусть $j_1\notin\{i,i'\}$. Обозначим через $\mathscr{V}_{j_p}$ множество вершин комплекса $\mathrm{star}_{\mathscr{K}}(j_p)$; тогда $|\mathscr{V}_{j_p}| = m_{j_p}$ для $1\leqslant p\leqslant n$. Заметим, что если $j_p\in S\setminus\{i,i'\}$, то $m_{j_p}>4$ и $|\mathscr{V}_{j_p}\setminus S|>1$.

1) Предположим, что найдётся вершина $j_p\in S\setminus\{i,i'\}$, для которой не существует ребра $\{k,k'\}$ в $\mathscr{K}$ со следующим свойством:

$$k\in\mathscr{V}_{j_p}\setminus S \quad \text{и} \quad k'\in S\setminus\{j_{p-1},j_p,j_{p+1}\}, \quad \text{где} \quad j_0=j_n. \tag{$*$}$$

Тогда комплекс $\mathscr{K}' := \mathscr{K}_{[m]\setminus\{j_p\}}$ удовлетворяет предположениям леммы, так что мы можем найти требуемое подмножество I в $[m]\setminus\{j_p\}$.

2) Предположим, что для каждой вершины $j_p\in S\setminus\{i,i'\}$ существует ребро $\{k_p,j_{q_p}\}$ в $\mathscr{K}$ со свойством $(*)$ для $k=k_p$ и $k'=j_{q_p}$. Мы приведём этот случай к противоречию. Положим $I_1 := \{j_1,k_1,j_{q_1}\}$. Тогда $\mathscr{K}_{I_1}$ разделяет $\mathscr{K}$ на два симплициальных комплекса $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$, где $\mathscr{K}_1$ имеет граничные вершины $j_1,\dots,j_{q_1},k_1$, а $\mathscr{K}_2$ имеет граничные вершины $j_{q_1},\dots,j_n,j_1,k_1$ (см. рис. 4).

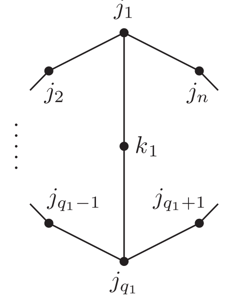

Рис. 4. $\mathscr{K}_{I_1}$ разделяет $\mathscr{K}$ на два симплициальных комплекса

Так как $\{i,i'\} \not\subset S$, мы имеем

$$\{i,i'\} \cap \{j_1,\dots,j_{q_1-1}\} = \varnothing \quad \text{или} \quad \{i,i'\} \cap \{j_{q_1},\dots,j_n\} = \varnothing.$$

Предположим без ограничения общности, что $\{i,i'\} \cap \{j_1,\dots,j_{q_1-1}\} = \varnothing$. Тогда $m_{j_p} > 4$ при $1 \leqslant p \leqslant q_1 - 1$. Так как $\mathscr{K}$ является флаговым комплексом, то из условия существования ребра, удовлетворяющего условию $(*)$, следует, что никакая вершина $k \in [m] \setminus S$ не может быть соединена с вершинами j_p и j_{p+2} при $1 \leqslant p \leqslant q_1 - 2$. Это, в частности, означает, что $q_1 > 3$.

Теперь рассмотрим путь от j_2 через k_2 до j_{q_2}. Если $k_2 = k_1$, то мы можем считать, что $j_{q_2} = j_{q_1}$. В противном случае вершина k_2 должна содержаться в комплексе $\mathscr{K}_1$. В любом случае путь $j_2 - k_2 - j_{q_2}$ содержится в подкомплексе $\mathscr{K}_1$ с граничными вершинами $j_1,\dots,j_{q_1},k_1$. Продолжая по индукции, мы получаем, что путь $j_p - k_p - j_{q_p}$ должен содержаться в симплициальном подкомплексе с граничными вершинами $j_{p-1},\dots,j_{q_{p-1}},k_{p-1}$ (см. рис. 5). Отсюда следует, что $p < q_p \leqslant q_{p-1} \leqslant \dots \leqslant q_1$. В конце концов мы получим вершину p, для которой $q_p = p+2$, т. е. вершина k_p соединена рёбрами с j_p и j_{p+2}. Противоречие.

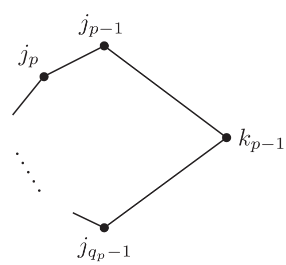

Рис. 5. Путь $j_p - k_p - j_{q_p}$ содержится в симплициальном комплексе с граничными вершинами $j_{p-1},\dots,j_{q_{p-1}}$, k_{p-1}

Тем самым лемма полностью доказана.

Лемма A.3 [33; лемма 3.2]. *Пусть P – флаговый 3-многогранник без 4-поясов. Тогда для любых трёх различных граней F_i, $F_{i'}$, F_k, где $F_i \cap F_{i'} = \varnothing$, найдётся такой пояс $\mathscr{B}$, что $F_i, F_{i'} \in \mathscr{B}$, $F_k \notin \mathscr{B}$ и F_k не пересекает по крайней мере одну из связных компонент дополнения $\mathscr{B} \setminus \{F_i, F_{i'}\}$.*

Доказательство. Мы будем работать с двойственным симплициальным комплексом $\mathscr{K} = \mathscr{K}_P$, который является триангуляцией 2-сферы. Необходимо найти такое подмножество $I \subset [m] \setminus \{k\}$, что $\{i,i'\} \subset I$, $\mathscr{K}_I$ есть бесхордовый цикл и

$$\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{(I\setminus\{i,i'\})\cup\{k\}}) \neq 0.$$

В силу леммы A.2 найдётся такое подмножество I_0 в $[m] \setminus \{k\}$, что $\{i,i'\} \subset I_0$ и $\mathscr{K}_{I_0}$ есть бесхордовый цикл. Требуемое подмножество I будет построено путём модификации подмножества I_0.

Так как $\mathscr{K}_{I_0}$ есть цикл, он разделяет $\mathscr{K}$ на два многоугольника (триангулированных диска) $\mathscr{K}_{\mathrm{in}}$ и $\mathscr{K}_{\mathrm{out}}$ с общей границей $\mathscr{K}_{I_0}$. Пусть вершина k содержится в $\mathscr{K}_{\mathrm{in}}$. Вершины i и i' делят цикл $\mathscr{K}_{I_0}$ на две дуги, и мы обозначим через $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ множества вершин из $I_0 \setminus \{i, i'\}$, содержащихся в этих дугах; тогда $I_0 \setminus \{i, i'\} = \widetilde{X} \sqcup \widetilde{Y}$. Положим

$$X := \mathrm{link}_{\mathscr{K}}\{k\} \cap \widetilde{X} \quad \text{и} \quad Y := \mathrm{link}_{\mathscr{K}}\{k\} \cap \widetilde{Y}$$

(см. рис. 6). Если хотя бы одно из множеств X и Y пусто, то

$$\widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{(I_0 \setminus \{i,i'\}) \cup \{k\}}) \neq 0,$$

так что $I := I_0$ есть требуемое множество. Далее будем предполагать, что оба множества X и Y непусты.

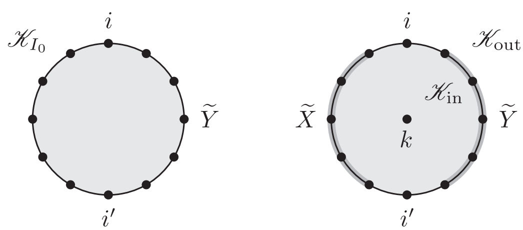

Рис. 6. Комплексы $\mathscr{K}_{I_0}$, $\mathscr{K}_{\mathrm{in}}$, $\mathscr{K}_{\mathrm{out}}$ и подмножества $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$, X и Y

Рассмотрим линки всех вершин $x \in X$ в $\mathscr{K}_{\mathrm{out}}$. Так как $\mathscr{K}_{I_0}$ есть бесхордовый цикл, каждый из этих линков содержит по крайней мере три вершины, т. е. в $\mathrm{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{out}}}\{x\}$ найдётся вершина, не лежащая в I_0. Для упрощения обозначений мы будем писать $\mathrm{link}_{\mathscr{K}} X$ вместо $\bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{link}_{\mathscr{K}}\{x\}$ для подмножества $X \subset [m]$. Теперь пусть

$$\mathscr{K}_X := \text{полный подкомплекс в } \mathscr{K} \text{ на множестве } \widetilde{X} \cup \{i, i'\} \cup \mathrm{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{out}}} X.$$

Выберем в $\mathscr{K}_X$ путь $\mathscr{P}_X$ между i и i', который является “самым внешним” по отношению к вершине k, т. е. все вершины из $\mathscr{K}_X$, не лежащие на $\mathscr{P}_X$, находятся со стороны k (см. рис. 7). Пусть I_X – множество вершин пути $\mathscr{P}_X$.

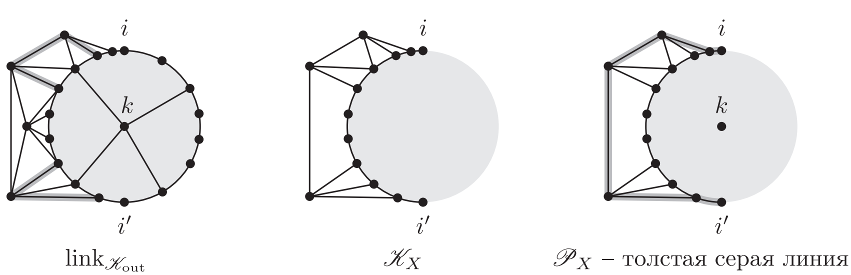

Рис. 7. Комплекс $\mathscr{K}_X$ и путь $\mathscr{P}_X$

Утверждение А.4. *Полный подкомплекс в $\mathscr{K}$ на множестве вершин I_X есть путь $\mathscr{P}_X$, т. е. $\mathscr{K}_{I_X} = \mathscr{P}_X$.*

Доказательство утверждения. Предположим противное: пусть имеется такое подмножество $\{p,q,r\}$ в I_1, что $\mathscr{K}_{\{p,q,r\}}$ есть треугольник. Рассмотрим пересечение $\{p,q,r\}\cap\widetilde{X}$. Заметим, что $|\{p,q,r\}\cap\widetilde{X}|<3$, так как $\mathscr{K}_{\widetilde{X}}$ является частью бесхордового цикла $\mathscr{K}_{I_0}$. Возможны следующие случаи, показанные на рис. 8.

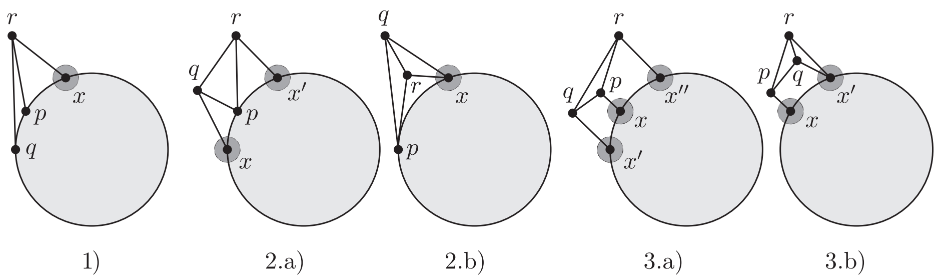

Рис. 8. $\mathscr{K}_X$ не содержит треугольников

1) Пусть $|\{p,q,r\}\cap\widetilde{X}|=2$, например, $\{p,q,r\}\cap\widetilde{X}=\{p,q\}$. Тогда p и q суть последовательные вершины в X, а r лежит в $\operatorname{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{out}}}\{x\}$ для некоторой $x\in X$. Тогда либо p, либо q лежит со стороны k в $\mathscr{K}_X$. Противоречие.

2) Пусть $|\{p,q,r\}\cap\widetilde{X}|=1$, например, $\{p,q,r\}\cap\widetilde{X}=\{p\}$. Тогда

$$q\in\operatorname{link}_{\mathscr{K}_2}x\quad\text{и}\quad r\in\operatorname{link}_{\mathscr{K}_2}\{x'\}$$

для некоторых $x,x'\in X$.

2.a) Если $x\neq x'$, то p лежит со стороны k в $\mathscr{K}_X$, что противоречит предположению $p\in\mathscr{P}_X$.

2.b) Если $x=x'$, то либо q, либо r лежит со стороны k в $\mathscr{K}_X$, и мы снова получаем противоречие.

3) Пусть $|\{p,q,r\}\cap\widetilde{X}|=0$. Тогда в X найдутся такие x, x', x'', что

$$p\in\operatorname{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{out}}}\{x\},\quad q\in\operatorname{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{out}}}\{x'\}\quad\text{и}\quad r\in\operatorname{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{out}}}\{x''\}.$$

Так как p, q, r лежат на самом внешнем пути $\mathscr{P}_X$, случай $x=x'=x''$ невозможен. Поэтому можно считать, что $x\neq x'$ или $x\neq x''$.

3.a) Если все вершины x, x', x'' различны, то одна из вершин p, q и r лежит со стороны k в $\mathscr{K}_X$, что противоречит предположению о том, что p, q, r лежат на самом внешнем пути $\mathscr{P}_X$ по отношению к k.

3.b) Если $x'=x''$, то либо q, либо r лежит со стороны k в $\mathscr{K}_X$. Это последнее противоречие завершает доказательство утверждения.

Вернёмся к доказательству леммы A.3. Концами пути $\mathscr{P}_X=\mathscr{K}_{I_X}$ являются вершины i, i', а вершина k не соединена ребром ни с одной из вершин в I_X. Поэтому если $\mathscr{K}_{I_X\cup\widetilde{Y}}$ является бесхордовым циклом, то $I_X\cup\widetilde{Y}$ есть требуемое множество I.

Предположим, что $\mathscr{K}_{I_X\cup\widetilde{Y}}$ имеет хорду. Эта хорда должна быть ребром в $\mathscr{K}_{\mathrm{out}}$. Так как $\mathscr{K}$ не имеет бесхордовых 4-циклов, в нём отсутствуют рёбра, соединяющие $\operatorname{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{out}}} X$ с вершинами из Y. Рассмотрим вершины $x_+ \in X$ и $x_- \in X$, которые являются ближайшими к i и i' соответственно на дуге, содержащей множество $\widetilde{X}$. Аналогично, рассмотрим вершины $y_+ \in Y$ и $y_- \in Y$, которые являются ближайшими к i и i' соответственно на дуге, содержащей множество $\widetilde{Y}$. Обозначим через X_+ подмножество вершин из $\widetilde{X}$, лежащих строго между i и x_+. Аналогично определим подмножества $X_- \subset \widetilde{X}$, $Y_+ \subset \widetilde{Y}$ и $Y_- \subset \widetilde{Y}$. (См. рис. 9, слева.)

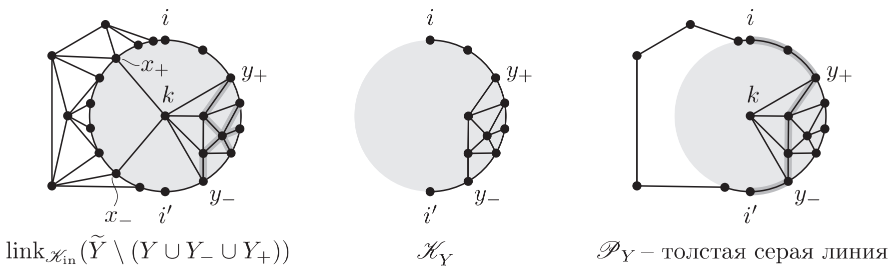

Рис. 9. Пример случая 1

Рассмотрим два случая.

Случай 1: в $\mathscr{K}_{\mathrm{out}}$ нет рёбер между I_X и $Y_- \cup Y_+$. Пусть

$$\mathscr{K}_Y := \text{полный подкомплекс в } \mathscr{K} \text{ на } \widetilde{Y} \cup \{i, i'\} \cup \operatorname{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{in}}}(\widetilde{Y} \setminus (Y \cup Y_- \cup Y_+)).$$

Рассмотрим путь $\mathscr{P}_Y$ между i и i' в $\mathscr{K}_Y$, который является “самым внутренним” по отношению к k (см. рис. 9). Пусть I_Y – множество вершин пути $\mathscr{P}_Y$. То же рассуждение, что и выше, показывает, что $\mathscr{K}_{I_Y} = \mathscr{P}_Y$. Тогда $I_X \cup I_Y$ есть требуемое множество I.

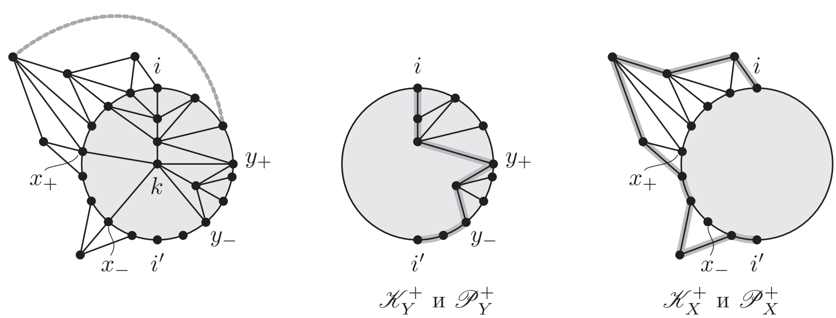

Рис. 10. Пример случая 2

Случай 2: в $\mathscr{K}_{\mathrm{out}}$ есть ребро между I_X и Y_+ или между I_X и Y_-. Предположим, что в $\mathscr{K}_{\mathrm{out}}$ имеется ребро между I_X и Y_+, но нет рёбер между I_X и Y_-. Пусть

$$\mathscr{K}_Y^+ := \text{полный подкомплекс в } \mathscr{K} \text{ на } \widetilde{Y} \cup \{i, i'\} \cup \operatorname{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{in}}}(\widetilde{Y} \setminus (Y \cup Y_-)).$$

Выберем в $\mathscr{K}_{\mathrm{in}}$ путь $\mathscr{P}_Y^+$ между i и i', который является “самым внутренним” по отношению к вершине k. Пусть I_Y^+ – множество вершин пути $\mathscr{P}_Y^+$ (см.

рис. 10, в центре). Как и выше, доказывается, что $\mathscr{K}_{I_Y^+} = \mathscr{P}_Y^+$. Если $\mathscr{K}_{I_X\cup I_Y^+}$ – бесхордовый цикл, то $I_X \cup I_Y^+$ есть требуемое множество I.

Предположим, что в $\mathscr{K}_{I_X\cup I_Y^+}$ есть хорда. Эта хорда должна быть ребром в $\mathscr{K}_{\mathrm{in}}$, соединяющим $\mathrm{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{in}}} Y_+$ с вершиной из $X_+ \cap I_X$. В этом случае мы модифицируем множество I_X следующим образом. Пусть

$$\mathscr{K}_X^+ := \text{полный подкомплекс в } \mathscr{K} \text{ на } \widetilde{X} \cup \{i, i'\} \cup \mathrm{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{out}}}(X \cup X_+).$$

Выберем в $\mathscr{K}_X^+$ путь $\mathscr{P}_X^+$ между i и i', который является “самым внешним” по отношению к вершине k (см. рис. 10, справа). Пусть I_X^+ – множество вершин пути $\mathscr{P}_X^+$. Тогда $\mathscr{K}_{I_X^+} = \mathscr{P}_X^+$ согласно утверждению A.4, и легко убедиться, что $I_X^+ \cup I_Y$ есть требуемое множество I. Действительно, нам необходимо лишь проверить, что в $\mathscr{K}_{\mathrm{out}}$ отсутствуют рёбра, соединяющие $\mathrm{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{out}}} X_+$ с вершинами из Y. А это следует из существования ребра между I_X и Y_+.

Осталось рассмотреть случай, когда в $\mathscr{K}_{\mathrm{out}}$ имеется ребро как между I_X и Y_+, так и между I_X и Y_-. Здесь работает то же рассуждение, что и выше, если рассмотреть

$$\mathscr{K}_Y^\pm := \text{полный подкомплекс в } \mathscr{K} \text{ на } \widetilde{Y} \cup \{i, i'\} \cup \mathrm{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{in}}}(\widetilde{Y} \setminus Y)$$

и

$$\mathscr{K}_X^\pm := \text{полный подкомплекс в } \mathscr{K} \text{ на } \widetilde{X} \cup \{i, i'\} \cup \mathrm{link}_{\mathscr{K}_{\mathrm{out}}}(X \cup X_+ \cup X_-)$$

вместо $\mathscr{K}_Y^+$ и $\mathscr{K}_X^+$ соответственно. Лемма A.3 доказана.

Приложение B. Комбинаторика и конструкции многогранников Погорелова

Напомним (см. п. 2.5), что многогранником Погорелова называется простой 3-многогранник $P \neq \Delta^3$ без 3-поясов (т. е. флаговый) и 4-поясов. Класс многогранников Погорелова обозначается символом $\mathscr{P}$. Далее мы называем двумерные грани 3-многогранников просто гранями.

Для нас будет полезна следующая переформулировка теоремы Штейница.

Теорема B.1 (см. [10]). *Простой граф на двумерной сфере является графом выпуклого 3-многогранника тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) *каждая связная компонента его дополнения в сфере ограничена простым рёберным циклом;*

(ii) *если замыкания двух различных связных компонент дополнения пересекаются, то по одной вершине или одному ребру графа.*

Следующее предложение характеризует флаговые 3-многогранники и многогранники Погорелова в терминах k-поясов.

Предложение B.2. (a) *Трёхмерный простой многогранник P является флаговым тогда и только тогда, когда каждая его грань окружена k-поясом,* *где k – число сторон этой грани. Более того, для флагового многогранника имеем $k \geqslant 4$.*

(b) *Трёхмерный простой многогранник P является многогранником Погорелова тогда и только тогда, когда каждая пара его смежных граней окружена k-поясом, где грани имеют k_1 и k_2 сторон и $k = k_1 + k_2 - 4$. Более того, $k_1, k_2 \geqslant 5$ и, следовательно, $k \geqslant 6$.*

Доказательство. (a) Предположим, что P – флаговый многогранник, и пусть $\mathscr{B} = (F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$ – циклическая последовательность граней, смежных с гранью F, в порядке обхода её границы. Если $k = 3$ и $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$ – вершина, то $P \simeq \Delta^3$. Противоречие. Пусть $k \geqslant 4$. Если пересечение двух различных граней F_{i_p} и F_{i_q}, где $|p - q| \neq 1 \bmod k$, непусто, то (F, F_{i_p}, F_{i_q}) есть 3-пояс. Противоречие. Таким образом, в обоих случаях $\mathscr{B}$ является k-поясом. Так как флаговый многогранник не имеет 3-поясов, то для каждой его грани $k \geqslant 4$.

У симплекса Δ^3 никакая грань не окружена поясом. Если $P \neq \Delta^3$ не является флаговым, то он имеет 3-пояс (F, F_i, F_j). Тогда грани F_i и F_j пересекаются, смежны с гранью F и не являются последовательными при обходе её границы. Поэтому грань F не окружена поясом.

(b) Пусть P – многогранник Погорелова. Пара (F_i, F_j) смежных граней окружена простым рёберным циклом. Пусть $\mathscr{L} = (F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$ – циклическая последовательность граней, окружающих $F_i \cup F_j$ в порядке обхода этого цикла. Если $F_{i_a} = F_{i_b}$ для $a \neq b$, то F_{i_a} и F_{i_b} не являются смежными одновременно ни с F_i, ни с F_j. Пусть грань F_{i_a} смежна с F_i, а грань F_{i_b} – с F_j. Тогда (F_i, F_j, F_{i_a}) является 3-поясом. Противоречие. Если $\mathscr{L}$ не является k-поясом, то $F_{i_a} \cap F_{i_b} \neq \varnothing$ для $|a - b| \neq 0, 1 \bmod k$. Из (a) следует, что грани F_{i_a} и F_{i_b} не являются смежными одновременно ни с F_i, ни с F_j. Пусть грань F_{i_a} смежна с F_i, а грань F_{i_b} – с F_j. Тогда $(F_{i_a}, F_i, F_j, F_{i_b})$ является 4-поясом. Противоречие. Таким образом, $\mathscr{L}$ есть k-пояс. Прямое вычисление показывает, что $k = k_1 + k_2 - 4$.

Пусть теперь для простого многогранника P любая пара его смежных граней окружена поясом. Тогда $P \not\simeq \Delta^3$. Если (F_i, F_j, F_k) есть 3-пояс, то грань F_k принадлежит циклической последовательности граней, окружающих пару смежных граней F_i и F_j, и встречается в этой последовательности два раза. Противоречие. Если (F_i, F_j, F_k, F_l) есть 4-пояс, то грани F_k и F_l принадлежат циклической последовательности граней, окружающих пару смежных граней F_i и F_j. Так как $F_i \cap F_k = \varnothing = F_j \cap F_l$, они не следуют друг за другом в этой последовательности. Поэтому последовательность не является k-поясом. Противоречие. Таким образом, P является многогранником Погорелова. Предложение доказано.

Каждому поясу $\mathscr{B}$ на простом 3-многограннике P поставим в соответствие простую ломаную $\gamma(\mathscr{B})$. Звено ломаной соединяет середины пересечений двумерной грани пояса с предыдущей и последующей гранями этого пояса. Из теоремы B.1 непосредственно вытекает следующий результат.

Предложение B.3. *Пусть P и Q – простые 3-многогранники с выделенными k-угольными гранями F и G. Если каждая из этих граней окружена k-поясом, то существует простой 3-многогранник R с k-поясом $\mathscr{B}$ такой, что поверхности многогранников P и Q комбинаторно получаются разрезанием поверхности многогранника R вдоль ломаной $\gamma(\mathscr{B})$ и приклеиванием k-угольников вдоль этой ломаной. И наоборот, каждый многогранник R с k-поясом $\mathscr{B}$ получается из некоторых многогранников P и Q таким образом.*

Многогранник R называем *связной суммой простых многогранников P и Q вдоль граней F и G*. Результат зависит от упорядочения двумерных граней, окружающих грани F и G. Срезка вершины простого 3-многогранника P даёт треугольную грань, окружённую 3-поясом. Таким способом определяется операция *связной суммы двух простых многогранников вдоль вершин* (см. [14; конструкция 1.1.13]). Срезка ребра простого 3-многогранника даёт четырёхугольную грань, окружённую 4-поясом тогда и только тогда, когда две двумерные грани, пересекающие это ребро по вершинам, не являются смежными. Для таких рёбер определена операция *связной суммы двух простых многогранников вдоль рёбер*. Для флагового многогранника связная сумма определена вдоль любого ребра.

Пример B.4. 1) Связная сумма двух додекаэдров вдоль вершин даёт простой многогранник, множество граней которого состоит из 18 пятиугольников и 3 восьмиугольников. Этот 3-многогранник содержит 3-пояс и не является флаговым.

2) Связная сумма двух додекаэдров вдоль их рёбер даёт простой многогранник, множество двумерных граней которого состоит из 16 пятиугольников и либо 4 семиугольников, либо 2 шестиугольников и 2 восьмиугольников – в зависимости от упорядочения четвёрок граней вокруг рёбер. Этот 3-многогранник содержит 4-пояс.

3) Связная сумма додекаэдра с двумя другими додекаэдрами, с одним – по ребру, с другим – по вершине, даёт простой 3-многогранник без треугольных и четырёхугольных граней, имеющий 3- и 4-пояса.

Таким образом, отсутствие треугольных и четырёхугольных граней не гарантирует принадлежности 3-многогранника P классу Погорелова.

Введённые выше операции связной суммы простых многогранников вдоль вершин и рёбер позволяют получить следующий результат о структуре простых 3-многогранников.

Теорема B.5. (a) *Простой 3-многогранник имеет 3-пояс тогда и только тогда, когда он является связной суммой двух простых многогранников вдоль вершин.*

(b) *Любой простой 3-многогранник является связной суммой симплексов и флаговых многогранников.*

(c) *Флаговый многогранник имеет 4-пояс тогда и только тогда, когда он либо имеет четырёхугольную грань, либо является связной суммой двух флаговых многогранников вдоль рёбер.*

(d) *Многогранник P является флаговым тогда и только тогда, когда он получается операциями связной суммы вдоль рёбер и срезки ребра из многогранников Погорелова и кубов.*

Доказательство. Как было отмечено выше, любой простой многогранник P можно разрезать вдоль k-пояса на два простых многогранника так, что он является их связной суммой вдоль граней. В [10; лемма 2.11] доказано, что если P – флаговый многогранник, то полученные многогранники также являются флаговыми. Из теоремы B.1 следует, что для любой треугольной грани F многогранника $P \not\simeq \Delta^3$ существует многогранник Q такой, что P комбинаторно эквивалентен многограннику, получаемому из Q срезкой некоторой вершины, причём новая грань отвечает грани F. Это соответствует связной сумме многогранника Q с симплексом вдоль вершин. Этим доказаны утверждения (a) и (b). Нетрудно показать, что связная сумма флаговых многогранников вдоль рёбер и срезка ребра флагового многогранника снова даёт флаговый многогранник (см. [8], [10]). В [8; лемма 2.17] доказано, что для любой четырёхугольной грани F флагового 3-многогранника $P \not\simeq I^3$ существует флаговый многогранник Q такой, что P комбинаторно эквивалентен многограннику, получаемому из Q срезкой некоторого ребра, причём новая грань отвечает грани F. Это доказывает утверждения (c) и (d). Теорема доказана.

Предложение B.6. *Пусть $P \in \mathscr{P}$. Тогда срезка одной плоскостью любой последовательности $s \geqslant 2$ смежных рёбер, лежащих в k-угольной грани с $k \geqslant s+4$ (см. рис. 11), снова даёт многогранник из $\mathscr{P}$.*

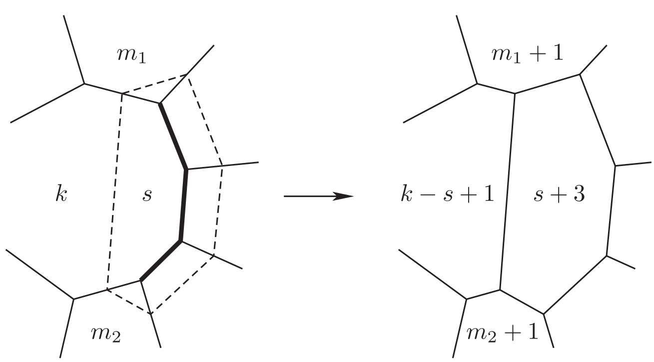

Рис. 11. (s,k)-усечение

Доказательство. Пусть при срезке данных s рёбер k-угольной грани F многогранника P образуется грань G нового многогранника Q. Для грани F_i в P будем обозначать через $\widehat{F}_i$ соответствующую грань в Q. Тогда если $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \varnothing$, то

$$\widehat{F}_{i_1} \cap \dots \cap \widehat{F}_{i_k} = \varnothing.$$

Так как срезаются только рёбра грани F, то для смежных граней F_i и F_j, отличных от F, грани $\widehat{F}_i$ и $\widehat{F}_j$ также смежны.

Если $(\widehat{F}_i, \widehat{F}_j, \widehat{F}_k)$ есть 3-пояс, то $F_i \cap F_j \cap F_k$ – срезаемая вершина. При $s > 0$ вместе с ней срезается одно из содержащих эту вершину ребер, поэтому две из граней $\widehat{F}_i$, $\widehat{F}_j$, $\widehat{F}_k$ не пересекаются в Q. Противоречие. Таким образом, если в Q есть 3-пояс, он имеет вид $(\widehat{F}_i, \widehat{F}_j, G)$. При этом грани F_i и F_j отличны от F, иначе одна из этих граней имела бы с F два общих ребра. Кроме того, $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ и

$$F \cap F_i \neq \varnothing, \quad F \cap F_j \neq \varnothing,$$

так как F_i и F_j пересекают срезаемые рёбра. При $s < k-2$ ребро $F_i \cap F_j$ имеет общую вершину со срезаемыми рёбрами в P и не срезается целиком, поэтому $\widehat{F}_i \cap \widehat{F}_j \cap G \neq \varnothing$. Противоречие.

Если $(\widehat{F}_i, \widehat{F}_j, \widehat{F}_k, \widehat{F}_l)$ есть 4-пояс, то (F_i, F_j, F_k, F_l) – грани, окружающие целиком срезаемое ребро $F_i \cap F_k$ или $F_j \cap F_l$. При $s > 1$ целиком срезается также одно из смежных с ним рёбер

$$F_i \cap F_j, \quad F_j \cap F_k, \quad F_k \cap F_l, \quad F_l \cap F_i$$

и соответствующие грани в Q не пересекаются. Противоречие. Таким образом, если в Q есть 4-пояс, то он имеет вид $(\widehat{F}_i, \widehat{F}_j, \widehat{F}_k, G)$, где $F_i \cap F_j \neq \varnothing$, $F_j \cap F_k \neq \varnothing$, и грани F_i, F_k пересекают срезаемые рёбра в P, а грань F_j их не пересекает. Тогда $F_i \neq F$, иначе (F, F_j, F_k) был бы 3-поясом в P, поскольку $\widehat{F} \cap \widehat{F}_k = \varnothing$. Аналогично, $F_k \neq F$. Также имеем $F_j \neq F$, поскольку $\widehat{F} \cap G \neq \varnothing$. В циклической последовательности (F, F_i, F_j, F_k) следующие друг за другом грани пересекаются, а значит, $F \cap F_j \neq \varnothing$ или $F_i \cap F_k \neq \varnothing$, так как P не имеет 4-поясов. Так как $F_i, F_j \neq F$, если $F_i \cap F_k \neq \varnothing$, то $\widehat{F}_i \cap \widehat{F}_k \neq \varnothing$. Противоречие. Поэтому $F \cap F_j \neq \varnothing$ и грани F_i и F_k пересекают это ребро по вершине. При $s < k-3$ ребро $F \cap F_j$ должно быть одним из срезаемых рёбер. Тогда $G \cap \widehat{F}_j \neq \varnothing$. Противоречие.

Таким образом, многогранник $Q \not\simeq \varDelta^3$ не имеет 3- и 4-поясов, поэтому он является многогранником Погорелова. Предложение доказано.

Предложение B.7. *Пусть $P, Q \in \mathscr{P}$ и $F \subset P$, $G \subset Q$ суть k-угольные грани. Тогда связная сумма многогранников P и Q вдоль граней F и G определена и также принадлежит классу $\mathscr{P}$.*

Доказательство. Так как многогранники P и Q являются флаговыми, то согласно предложению B.2, (a) грани F и G окружены k-поясами. Поэтому операция связной суммы вдоль этих граней определена и даёт некоторый простой многогранник R с выделенным k-поясом $\mathscr{B}$, зависящий от порядка граней, окружающих F и G. Рассмотрим две смежные грани многогранника R. Если ни одна из этих граней не принадлежит $\mathscr{B}$, то без ограничения общности можно считать, что они принадлежат $P \setminus \mathscr{B}$. Пересечения в R граней, окружающих эти грани, будут те же самые, что в P, поэтому такие две грани окружает пояс. Если обе смежные грани являются гранями пояса, то их окружает циклическая последовательность граней, состоящая из двух граней пояса $\mathscr{B}$ и двух последовательностей граней, лежащих в $P \setminus \mathscr{B}$ и $Q \setminus \mathscr{B}$. Грани в каждой последовательности вместе с двумя гранями пояса окружают соответствующие смежные грани в P и Q, а грани разных последовательностей не пересекаются, поэтому циклическая последовательность является поясом. Если одна из смежных граней принадлежит поясу $\mathscr{B}$, а другая – нет, то без ограничения общности можно считать, что другая грань принадлежит $P \setminus \mathscr{B}$. Тогда эти грани окружает циклическая последовательность граней, состоящая из двух граней пояса $\mathscr{B}$ и двух последовательностей граней, лежащих в $P \setminus \mathscr{B}$ и $Q \setminus \mathscr{B}$. Грани в первой последовательности вместе с двумя гранями пояса окружают соответственные смежные грани в P, а грани второй последовательности вместе с двумя гранями пояса окружают грань в P, соответствующую грани пояса. При этом грани разных последовательностей не пересекаются, поэтому циклическая последовательность является поясом. Таким образом, любая пара смежных граней в R окружена поясом и $R \in \mathscr{P}$ согласно предложению B.2, (b). Предложение доказано.

Замечание B.8. Предложение B.7 имеет следующий геометрический смысл. Согласно теореме 2.15 каждый из многогранников P и Q может быть единственным образом реализован в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ с прямыми двугранными углами. Если соответствующие грани F и G конгруэнтны (например, если $P \simeq Q$), то приставление многогранников P и Q друг к другу вдоль граней F и G даёт прямоугольный многогранник R. В противном случае связная сумма не является локальной операцией на прямоугольных многогранниках, т. е. форма многогранников P и Q меняется глобально после реализации их связной суммы R с прямыми двугранными углами.

В работе [38] (см. также обзор [63]) был получен следующий результат, который мы сформулируем в наших терминах.

Теорема B.9 [38]. *Простой 3-многогранник P является многогранником Погорелова тогда и только тогда, когда он может быть получен из q-бочек, $q \geqslant 5$, при помощи последовательности операций связной суммы вдоль p-угольных граней, $p \geqslant 5$, и (s,k)-усечения, $2 \leqslant s \leqslant k-4$, где $k \geqslant 6$.*

В работе [12] получено усиление этого результата. Обозначим через $\mathscr{P}_B$ семейство всех q-бочек, $q \geqslant 5$. Положим $\mathscr{P}_B^{\perp} = \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}_B$.

Теорема B.10 [12]. (a) *q-бочка, $q \geqslant 5$, не может быть получена из другого многогранника Погорелова при помощи операций $(2,k)$-усечения и связной суммы с додекаэдром вдоль некоторого пятиугольника.*

(b) *многогранник P принадлежит семейству $\mathscr{P}_B^{\perp}$ тогда и только тогда, когда он получается из 5- или 6-бочки при помощи непустой последовательности, состоящей из операций связной суммы с додекаэдром вдоль некоторого пятиугольника и операций $(2,k)$-усечения, $k \geqslant 6$.*

Обозначим через p_k число k-угольных граней многогранника P. Из формулы Эйлера следует, что для простого 3-многогранника

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k \geqslant 7} (k-6) p_k. \tag{B.1}$$

Следующий результат был доказан В. Эберхардом в 1891 г.

Теорема B.11. *Для любой последовательности неотрицательных целых чисел* p_k, $k \geqslant 3$, $k \neq 6$, *удовлетворяющих соотношению* (B.1), *существуют число* p_6 *и простой* 3*-многогранник* P, *для которого* p_k *– число его* k*-угольных граней.*

Пусть P – трёхмерный простой многогранник, заданный системой неравенств (2.1). Каждое его ребро E является пересечением двух граней, задаваемых обращением в равенство соответствующих неравенств

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0$$

или, равносильно, одного неравенства

$$\langle \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{x} \rangle + (b_i + b_j) \geqslant 0,$$

где $E = F_i \cap F_j$.

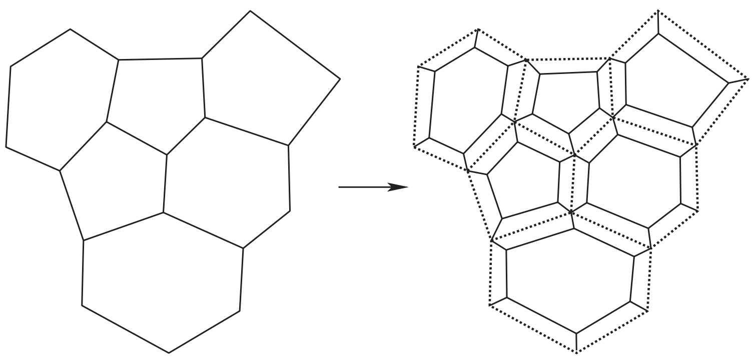

Рис. 12. Конструкция многогранника P_E

Конструкция B.12 (см. [43], [8]). Рассмотрим многогранник P_E, получаемый одновременной срезкой всех рёбер многогранника P:

$$P_E = P \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{x} \rangle + (b_i + b_j) \geqslant \varepsilon,\ F_i \cap F_j \neq \varnothing \text{ – ребро в } P\},$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало (см. рис. 12). Грани многогранника P_E взаимно однозначно отвечают либо граням многогранника P с сохранением числа сторон, либо рёбрам многогранника P, причём рёбрам отвечают шестиугольники. При этом

– грани многогранника P_E, отвечающие граням исходного многогранника P, не пересекаются;

– грани многогранника P_E, отвечающие грани и ребру многогранника P, пересекаются тогда и только тогда, когда ребро лежит в грани;

– грани многогранника P_E, отвечающие рёбрам многогранника P, пересекаются тогда и только тогда, когда эти рёбра смежны.

Таким образом,

$$p_k(P_E) = \begin{cases} p_k(P), & k \neq 6, \\ p_6(P) + f_1(P), & k = 6, \end{cases}$$

где $f_1(P)$ – число рёбер многогранника P.

В общем случае теорема Эберхарда даёт только существование некоторого числа p_6. Из конструкции усечения рёбер следует, что таких p_6 бесконечно много. В важном для нас случае $p_3 = p_4 = 0$ имеется следующий результат Б. Грюнбаума.

Теорема B.13 [36]. *Для любой последовательности неотрицательных целых чисел* p_k, $k \geqslant 3$, $k \neq 6$, *удовлетворяющих соотношениям* (B.1), $p_3 = p_4 = 0$ *и* $p_6 \geqslant 8$, *существует простой* 3*-многогранник* P, *для которого* p_k *– число его* k*-угольных граней.*

Предложение B.14. *Пусть* P *– простой* 3*-многогранник с* $p_3 = p_4 = 0$. *Тогда* $P_E \in \mathscr{P}$.

Доказательство. Воспользуемся критерием из предложения B.2, (b).

Если пара смежных граней многогранника P_E отвечает грани F и лежащему в ней ребру E многогранника P, то последовательность окружающих их граней многогранника P_E отвечает ребрам в $\partial F \setminus E$ грани G такой, что $F \cap G = E$, и двум рёбрам грани G, смежным с E (см. рис. 13, a)). Так как G не является треугольником и пара смежных граней F и G ограничена простым рёберным циклом, то грань, отвечающая G, пересекает только грани, отвечающие двум её рёбрам, а грани, отвечающие рёбрам, пересекают только грани, следующие за ними и предшествующие им при обходе границы двух выбранных смежных граней многогранника P_E.

Если пара смежных граней многогранника P_E отвечает двум смежным рёбрам E_i и E_j многогранника P, то её окружают восемь граней: отвечающие граням F_i, F_j и F_k многогранника P, сходящимся в вершине $E_i \cap E_j \cap E_k$, и отвечающие рёбрам, смежным хотя бы с одним ребром E_i или E_j (см. рис. 13, b)). Каждая из граней, отвечающих F_i, F_j и F_k, пересекает только две грани из восьми: отвечающие рёбрам, в ней лежащим. Так как тройка сходящихся в одной вершине граней F_i, F_j и F_k ограничена простым рёберным циклом и эти грани не являются ни треугольниками, ни четырёхугольниками, то остальные грани из восьми также пересекают только по две грани из восьми.

Таким образом, в обоих случаях пара смежных граней окружена поясом. Предложение доказано.

Следствие B.15. *Для любой последовательности неотрицательных целых чисел* p_k, $k \geqslant 3$, *удовлетворяющих соотношениям* (B.1), $p_3 = p_4 = 0$ *и таких, что* $\frac{1}{4}\Bigl[p_6 - 3\Bigl(10 + \sum_{k\geqslant 7}(k-5)p_k\Bigr)\Bigr]$ *– целое число, не меньшее* 8, *существует многогранник Погорелова, для которого* p_k *– число его* k*-угольных граней.*

Доказательство. Из теоремы B.13 вытекает, что для заданных p_k, $k \neq 6$, удовлетворяющих условиям следствия, существует простой многогранник P с этими числами p_k и

$$p_6(P) = \frac{1}{4}\Biggl[p_6 - 3\Biggl(10 + \sum_{k\geqslant 7}(k-5)p_k\Biggr)\Biggr] \geqslant 8.$$

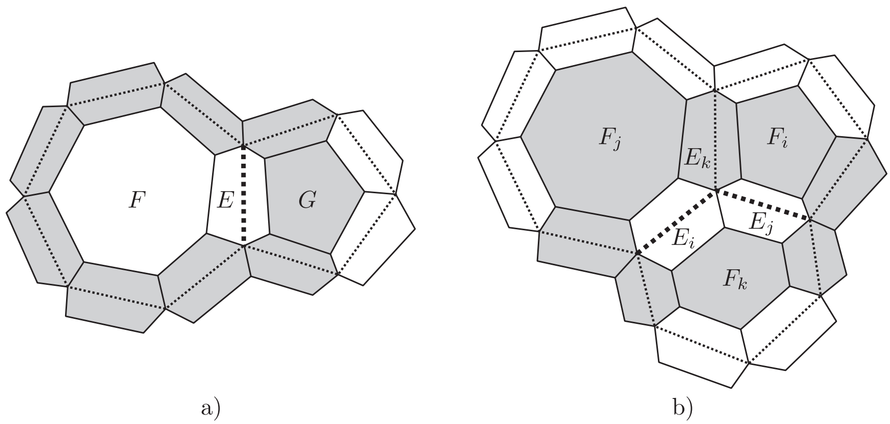

Рис. 13. Пояса вокруг пар смежных 2-граней многогранника P_E

Тогда многогранник P_E имеет те же числа p_k при $k \neq 6$,

$$p_6(P_E) = p_6(P) + f_1(P)$$

и $P_E \in \mathscr{P}$ согласно предложению B.14. Из формулы Эйлера и равенства (B.1) получаем

$$\begin{aligned} p_6(P_E) &= p_6(P) + f_1(P) = p_6(P) + 3(f_2(P) - 2) = p_6(P) + 3\biggl(\sum_{k\geqslant 5} p_k(P) - 2\biggr) \\ &= 4p_6(P) + 3\biggl(p_5 + \sum_{k\geqslant 7} p_k - 2\biggr) = 4p_6(P) + 3\biggl(10 + \sum_{k\geqslant 7}(k-5)p_k\biggr) = p_6. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Следствие B.16. *Для любого конечного набора неотрицательных целых чисел p_k, $k \geqslant 7$, существует многогранник Погорелова, у которого число k-угольных граней равно p_k.*

Приложение C. Доказательство леммы 4.5

Здесь мы приводим доказательство, которое отличается от исходного доказательства из [34]. Наше рассуждение основано на описании произведения в когомологиях момент-угол-комплекса (теорема 2.21) в терминах многогранника P. Детальное изложение этого подхода можно найти в [10; § 5.8].

Нам необходимо доказать, что отображение произведения

$$\bigoplus_{I=I_1\sqcup I_2} \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{I_1}) \otimes \widetilde{H}^0(\mathscr{K}_{I_2}) \to \widetilde{H}^1(\mathscr{K}_I) \tag{C.1}$$

сюръективно для любого флагового 3-многогранника P и $I \subset [m]$. Вначале мы переформулируем это утверждение в терминах многогранника P, а не его двойственного симплициального комплекса $\mathscr{K}$. Разбиение на грани $F_1, \dots, F_m$

задаёт клеточное разбиение границы ∂P, которое двойственно по Пуанкаре симплициальному разбиению $\mathscr{K}$. Оба разбиения имеют одно и то же барицентрическое подразделение: $(\partial P)' \cong \mathscr{K}'$. Мы отождествим множество граней $\{F_1, \dots, F_m\}$ с множеством $[m]$ и для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$P_I = \bigcup_{i \in I} F_i \subset \partial P.$$

Заметим, что P_I является комбинаторной окрестностью комплекса $(\mathscr{K}_I)'$ в барицентрическом подразделении $\mathscr{K}'$, поэтому имеется деформационная ретракция $P_I \xrightarrow{\simeq} \mathscr{K}_I$. Мы имеем изоморфизмы двойственности Пуанкаре

$$H_{2-i}(P_I, \partial P_I) \cong H^i(\mathscr{K}_I), \qquad i = 0, 1, 2, \tag{C.2}$$

где граница ∂P_I состоит из тех точек $x \in P_I$, для которых $x \in F_j$ при некотором $j \notin I$. Топологически P_I представляет собой несвязное объединение нескольких дисков с дырками, а ∂P_I является несвязным объединением циклов из рёбер.

Группы клеточных гомологий $H_i(P_I, \partial P_I)$ могут быть описаны следующим образом. Пусть $P_I = P_{I^1} \sqcup \dots \sqcup P_{I^s}$ – разбиение на связные компоненты. Тогда:

(a) $H_2(P_I, \partial P_I)$ – свободная абелева группа с базисом из классов гомологий

$$[P_{I^k}] = \sum_{i \in I^k} [F_i], \qquad k = 1, \dots, s;$$

(b) $H_1(P_I, \partial P_I) = \bigoplus_{k=1}^{s} H_1(P_{I^k}, \partial P_{I^k})$, где $H_1(P_{I^k}, \partial P_{I^k})$ – свободная абелева группа ранга, на единицу меньшего числа циклов в ∂P_{I^k}; базис группы $H_1(P_{I^k}, \partial P_{I^k})$ задаётся любым набором путей из рёбер в P_{I^k}, соединяющих один фиксированный граничный цикл с остальными граничными циклами;

(c) $H_0(P_I, \partial P_I)$ есть $\mathbb{Z}$, если $I = [m]$, и 0 в противном случае.

Так как отображение произведения (C.1) задаётся в терминах приведённых групп когомологий $\widetilde{H}^i(\mathscr{K}_I)$, мы введём соответствующие “приведённые” группы гомологий

$$\widehat{H}_i(P_I, \partial P_I) = \begin{cases} H_i(P_I, \partial P_I), & i = 0, 1; \\ H_2(P_I, \partial P_I) \Big/ \Big(\sum_{i \in I} [F_i] \Big), & i = 2. \end{cases}$$

Тогда мы можем переписать (C.2) в виде

$$\widehat{H}_{2-i}(P_I, \partial P_I) \cong \widetilde{H}^i(\mathscr{K}_I), \qquad i = 0, 1, 2. \tag{C.3}$$

При такой интерпретации произведение (C.1) переходит в спаривание “пересечения циклов”:

$$\begin{gathered} \bigoplus_{I = I_1 \sqcup I_2} \widehat{H}_2(P_{I_1}, \partial P_{I_1}) \otimes \widehat{H}_2(P_{I_2}, \partial P_{I_2}) \to \widehat{H}_1(P_I, \partial P_I), \\ [P_{I_1^p}] \otimes [P_{I_2^q}] \mapsto [P_{I_1^p} \cap P_{I_2^q}] = [\gamma_1] + \dots + [\gamma_r], \end{gathered} \tag{C.4}$$

где $P_{I_1^p}$ и $P_{I_2^q}$ – некоторые связные компоненты множеств P_{I_1} и P_{I_2} соответственно, а $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ – рёберные пути в P, которые образуют связные компоненты пересечения $P_{I_1^p}\cap P_{I_2^q}$. (При переходе от (C.1) к (C.4) возникает некоторый общий знак перед формулами, но он не влияет на наши дальнейшие рассмотрения.)

Доказательство леммы 4.5. Чтобы убедиться, что отображение (C.4) является сюръективным для флагового 3-многогранника P, напомним, что

$$\widehat{H}_1(P_I,\partial P_I)=\bigoplus_{k=1}^{s}\widehat{H}_1(P_{I^k},\partial P_{I^k}),$$

и рассмотрим для каждой связной компоненты P_{I^k} множества P_I разложение

$$\partial P_{I^k}=\eta_1\sqcup\dots\sqcup\eta_{t_k}$$

на граничные циклы. Можно предполагать, что $t_k\geqslant 2$, так как иначе P_{I^k} есть диск и $\widehat{H}_1(P_{I^k},\partial P_{I^k})=0$. Для каждой пары граничных циклов η_p и η_q из $\eta_1,\dots,\eta_{t_k}$ мы разложим образующую g_{pq} группы $\widehat{H}_1(P_{I^k},\partial P_{I^k})$, соответствующую рёберному пути из η_p в η_q, в произведение элементов групп $\widehat{H}_2(P_{I_1},\partial P_{I_1})$ и $\widehat{H}_2(P_{I_2},\partial P_{I_2})$, $I_1\sqcup I_2=I$. Тем самым сюръективность отображения (C.4) будет доказана.

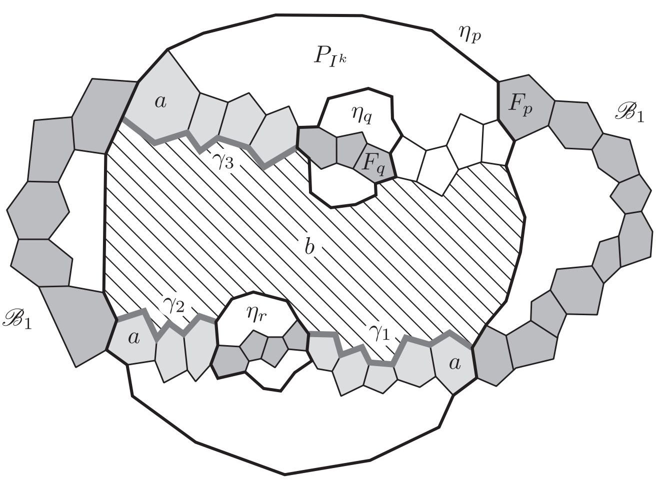

Рис. 14. Пояс, пересекающий диск с дырками

Выберем грани F_p и F_q в $\partial P\backslash P_{I^k}$, которые прилегают к граничным циклам η_p и η_q соответственно (см. рис. 14). Согласно лемме A.1 существует пояс

$$\mathscr{B}=(F_{j_1},\dots,F_{j_l}),$$

где $F_{j_1}=F_p$ и $F_{j_r}=F_q$, $3\leqslant r\leqslant l-1$. Пусть $\mathscr{B}_1=(F_{j_1},\dots,F_{j_r})$ – часть этого пояса между гранями F_p и F_q (таких частей две, и можно взять любую из них). Дополнение $\partial P\setminus\mathscr{B}$ представляет собой объединение двух открытых дисков. Обозначим замыкания этих дисков через $\mathscr{W}_1$ и $\mathscr{W}_2$; каждое из них есть объединение граней, не принадлежащих поясу $\mathscr{B}$. Теперь положим

$$I_1 = \{i\colon F_i \in P_{I^k} \cap \mathscr{B}\}, \qquad I_2 = I \setminus I_1,$$
$$a = \sum_{F_i \in P_{I^k} \cap \mathscr{B}_1} [F_i] \in \widehat{H}_2(P_{I_1}, \partial P_{I_1}), \qquad b = \sum_{F_j \in P_{I^k} \cap \mathscr{W}_1} [F_j] \in \widehat{H}_2(P_{I_2}, \partial P_{I_2}).$$

Тогда

$$a \cdot b = [\gamma_1] + \dots + [\gamma_s] \in H_1(P_I, \partial P_I),$$

где каждый γ_i есть рёберный путь в P_{I^k}, начинающийся в некотором граничном цикле $\eta_{j_{i-1}}$ и заканчивающийся в η_{j_i}. Можно считать, что γ_1 начинается в η_p, а γ_s заканчивается в η_q (где η_p, η_q – пара граничных циклов, выбранных вначале). Класс гомологий $[\gamma_1] + \dots + [\gamma_s] \in \widehat{H}_1(P_I, \partial P_I)$ равен выбранной образующей g_{pq} группы $\widehat{H}_1(P_{I^k}, \partial P_{I^k})$, соответствующей рёберному пути из η_p в η_q. Таким образом, мы разложили g_{pq} в произведение $a \cdot b$, что и требовалось. Лемма 4.5 доказана.

Приложение D. Доказательство леммы 4.11

Доказательство использует комбинаторный результат леммы A.3 и алгебраическую "лемму об аннуляторе" из работы Фана, Ма и Ванга [33].

Напомним, что *аннулятор* элемента r кольца R определяется формулой

$$\mathrm{Ann}_R(r) = \{s \in R\colon rs = 0\}.$$

Лемма D.1 [33; лемма 3.3]. *Пусть P – трёхмерный многогранник из класса Погорелова $\mathscr{P}$ с двойственным симплициальным комплексом $\mathscr{K} = \mathscr{K}_P$. Положим $R = H^*(\mathscr{Z}_P; \mathbf{k})$, где $\mathbf{k}$ – поле. В обозначениях леммы 4.11 рассмотрим $\mathbf{k}$-линейную комбинацию элементов множества $\mathscr{T}(P)$:*

$$\alpha = \sum_{\{i,j\} \notin \mathscr{K}} r_{ij} [u_i v_j], \tag{D.1}$$

в которой по меньшей мере два коэффициента $r_{ij} \in \mathbf{k}$ не равны нулю. Тогда для каждой пары $\{k, l\}$ такой, что $r_{kl} \neq 0$, имеем

$$\dim \mathrm{Ann}_R[u_k v_l] > \dim \mathrm{Ann}_R \alpha.$$

Доказательство. Используя изоморфизмы (C.3), перепишем изоморфизм из теоремы 2.21 в виде

$$R = H^*(\mathscr{Z}_P) \cong \bigoplus_{I \subset [m]} \widehat{H}_*(P_I, \partial P_I)$$

(мы опускаем поле коэффициентов $\mathbf{k}$ в обозначениях гомологий).

Выберем дополнительное подпространство L_{kl} к $\operatorname{Ann}_R[u_kv_l]$ в R, т. е.

$$L_{kl} \oplus \operatorname{Ann}_R[u_kv_l] = R.$$

Для любого $\beta \in L_{kl} \setminus \{0\}$ имеем $\beta \cdot [u_kv_l] \neq 0$. Более того, пространство L_{kl} можно выбрать согласованно с мультиградуировкой, так что I-я мультиградуированная компонента пространства L_{kl} является дополнительным подпространством к $\operatorname{Ann}_R[u_kv_l] \cap \widehat{H}_*(P_I, \partial P_I)$ в $\widehat{H}_*(P_I, \partial P_I)$. Тогда мы можем записать

$$\beta = \sum_{I \subset [m] \setminus \{k,l\}} \beta_I,$$

где β_I обозначает I-ю мультиградуированную компоненту элемента $\beta \in L_{kl} \setminus \{0\}$. (Заметим, что $\beta_I = 0$, если $I \cap \{k,l\} \neq \varnothing$, так как такой β_I аннулирует элемент $[u_kv_l]$.) Выберем такое $I \subset [m] \setminus \{k,l\}$, что $\beta_I \cdot [u_kv_l] \neq 0$. Теперь рассмотрим

$$\alpha = \sum r_{ij}[u_iv_j].$$

Мы утверждаем, что $(I \cup \{k,l\})$-я мультиградуированная компонента произведения $\beta \cdot \alpha$ состоит только из $\beta_I \cdot [u_kv_l]$. Действительно, для любой другой компоненты $\beta_{I'}$, $I' \neq I$, элемента β и любого слагаемого $r_{ij}[u_iv_j]$ в разложении (D.1) элемента α мы имеем $I' \cup \{i,j\} \neq I \cup \{k,l\}$, так как $I' \in [m] \setminus \{k,l\}$. Отсюда получаем

$$(\beta \cdot \alpha)_{I \cup \{k,l\}} = \beta_I \cdot [u_kv_l] \neq 0.$$

Следовательно, $L_{kl} \cap \operatorname{Ann}_R \alpha = \{0\}$, что означает, что

$$\dim \operatorname{Ann}_R[u_kv_l] \geqslant \dim \operatorname{Ann}_R \alpha.$$

Чтобы убедиться, что выполнено строгое неравенство, мы найдём такой элемент $\xi \in \operatorname{Ann}_R[u_kv_l]$, что

$$(L_{kl} \oplus \langle \xi \rangle) \cap \operatorname{Ann}_R \alpha = \{0\}.$$

Возьмём слагаемое $r_{st}[u_sv_t]$ в α, отличное от $r_{kl}[u_kv_l]$, т. е. $\{s,t\} \neq \{k,l\}$ и $r_{st} \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $l \notin \{s,t\}$. Согласно лемме A.3, в P существует такой пояс $\mathscr{B}$, что $F_s, F_t \in \mathscr{B}$, $F_l \notin \mathscr{B}$ и F_l не пересекает одну из двух связных компонент B_1 и B_2 дополнения $\mathscr{B} \setminus \{F_s, F_t\}$, скажем, B_1. На двойственном языке это означает, что в $\mathscr{K}_P$ существует такой бесхордовый цикл $\mathscr{C}$, что $s, t \in \mathscr{C}$, $l \notin \mathscr{C}$ и вершина l не соединена ребром ни с одной вершиной связной компоненты L_1 дополнения $\mathscr{C} \setminus \{s,t\}$.

Теперь заметим, что $\mathscr{C} \setminus \{s,t\}$ есть полный подкомплекс в $\mathscr{K}_P$, и возьмём в качестве ξ класс когомологий из $R = H^*(\mathscr{Z}_P)$, задаваемый образующей группы $\widetilde{H}^0(\mathscr{C} \setminus \{s,t\}) \cong \mathbb{Z}$. Эта образующая представляется 0-коциклом $\sum\limits_{i \in L_1} \alpha_{\{i\}}$ (см. пример 2.23). Мы имеем $\xi \cdot [u_kv_l] = 0$, так как $\xi = \sum\limits_{i \in L_1} \pm[u_{J_i}v_i]$ (см. пример 2.23) и $v_iv_l = 0$ для любого $i \in L_1$ согласно выбору цикла $\mathscr{C}$. С другой стороны, произведение $\xi \cdot [u_sv_t]$ соответствует образующей группы $\widetilde{H}^1(\mathscr{C}) \cong \mathbb{Z}$.

Следовательно, $\xi \in \operatorname{Ann}_R[u_k v_l]$ и $\xi \cdot \alpha \neq 0$ (последнее соотношение имеет место, так как мультиградуированная компонента произведения $\xi \cdot \alpha$, соответствующая множеству $\mathscr{C}$, есть $\xi \cdot r_{st}[u_s v_t] \neq 0$). Возьмём любой элемент

$$\beta = \sum_{I \subset [m] \setminus \{k,l\}} \beta_I \in L_{kl} \setminus \{0\}$$

и выберем множество $I \subset [m] \setminus \{k,l\}$, для которого $(\beta \cdot \alpha)_{I \cup \{k,l\}} = \beta_I \cdot r_{kl}[u_k v_l] \neq 0$, как в начале доказательства. Мультиградуировка элемента ξ не содержит l, так что

$$(\xi \cdot \alpha)_{I \cup \{k,l\}} = \xi \cdot r_{jl}[u_j v_l]$$

для некоторого $j \in [m]$. Мы имеем

$$\xi \cdot r_{jl}[u_j v_l] = 0,$$

так как $\xi = \sum_{i \in L_1} \pm[u_{J_i} v_i]$ и $v_i v_l = 0$ для любого $i \in L_1$ (вершины i и l не соединены ребром). Следовательно,

$$((\beta + \xi) \cdot \alpha)_{I \cup \{k,l\}} = (\beta \cdot \alpha)_{I \cup \{k,l\}} \neq 0.$$

Итак, $(\beta + \xi) \cdot \alpha \neq 0$, и мы доказали, что $(L_{kl} \oplus \langle \xi \rangle) \cap \operatorname{Ann}_R \alpha = \{0\}$. Это означает, что $\dim \operatorname{Ann}_R[u_k v_l] > \dim \operatorname{Ann}_R \alpha$. Лемма D.1 доказана.

Доказательство леммы 4.11. Нам даны 3-многогранник P из класса Погорелова $\mathscr{P}$ и изоморфизм колец

$$\psi\colon R = H^*(\mathscr{Z}_P) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathscr{Z}_{P'}) = R'.$$

Мы определили множество

$$\mathscr{T}(P) = \{\pm[u_i v_j] \in H^3(\mathscr{Z}_P),\ F_i \cap F_j = \varnothing\}$$

и аналогичное множество для P':

$$\mathscr{T}(P') = \{\pm[u'_i v'_j] \in H^3(\mathscr{Z}_{P'}),\ F'_i \cap F'_j = \varnothing\}.$$

Нам необходимо показать, что $\psi(\mathscr{T}(P)) = \mathscr{T}(P')$, т. е. $\psi([u_p v_q]) = \pm[u'_r v'_s]$. Вначале, используя теоремы 4.7 и 4.10, заключаем, что P' также лежит в классе $\mathscr{P}$. Теперь предположим, что

$$\psi([u_p v_q]) = \alpha' = \sum r_{ij}[u'_i v'_j],$$

где в последней сумме по меньшей мере два коэффициента r_{ij} отличны от нуля. Тогда мы находимся в ситуации леммы D.1, которую можно применить к многограннику P'. Это даёт неравенство

$$\dim \operatorname{Ann}_{R'} \alpha' < \dim \operatorname{Ann}_R[u'_k v'_l]$$

для любого ненулевого слагаемого $r_{kl}[u'_k v'_l]$ в α'. Рассматривая обратный изоморфизм $\psi^{-1}\colon R' \to R$, мы можем выбрать $[u'_k v'_l]$ так, что

$$\psi^{-1}([u'_k v'_l]) = \alpha = \sum r_{ab}[u_a v_b],$$

где в последнюю сумму входит $[u_p v_q]$. Так как изоморфизм колец сохраняет размерность аннулятора, мы получаем

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ann}_R[u_p v_q] = \dim \operatorname{Ann}_{R'} \alpha' < \dim \operatorname{Ann}_R[u'_k v'_l] = \dim \operatorname{Ann}_R \alpha \\ < \dim \operatorname{Ann}_R[u_p v_q].\end{aligned}$$

Противоречие. Следовательно, $\psi([u_p v_q])$ является кратным единственного элемента $[u'_r v'_s]$. Так как ψ является изоморфизмом над $\mathbb{Z}$, мы получаем $\psi([u_p v_q]) = \pm[u'_r v'_s]$. Лемма 4.11 доказана.

Список литературы

[1] Е. М. Андреев, "О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского", *Матем. сб.*, **81(123)**:3 (1970), 445–478; англ. пер.: E. M. Andreev, "On convex polyhedra in Lobačevskiĭ spaces", *Math. USSR-Sb.*, **10**:3 (1970), 413–440.

[2] O. Antolín-Camarena, G. R. Maloney, R. K. W. Roeder, "Computing arithmetic invariants for hyperbolic reflection groups", *Complex dynamics*, A. K. Peters, Wellesley, MA, 2009, 597–631; 2007, 34 pp., arXiv: 0708.2109.

[3] A. Ayzenberg, *Toric manifolds over* 3*-polytopes*, 2016, 11 pp., arXiv: 1607.03377.

[4] И. В. Баскаков, "Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов", *УМН*, **58**:5(353) (2003), 199–200; англ. пер.: I. V. Baskakov, "Massey triple products in the cohomology of moment-angle complexes", *Russian Math. Surveys*, **58**:5 (2003), 1039–1041.

[5] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, "Алгебры клеточных коцепей и действия торов", *УМН*, **59**:3(357) (2004), 159–160; англ. пер.: I. V. Baskakov, V. M. Bukhshtaber, T. E. Panov, "Cellular cochain algebras and torus actions", *Russian Math. Surveys*, **59**:3 (2004), 562–563.

[6] В. Браудер, *Перестройки односвязных многообразий*, Наука, М., 1984, 208 с.; пер. с англ.: W. Browder, *Surgery on simply-connected manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **65**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1972, ix+132 pp.

[7] V. M. Buchstaber, "Lectures on toric topology", *Toric topology workshop* (KAIST, 2008), Trends Math., **10**, № 1, Information Center for Mathematical Sciences, KAIST, Daejeon, 2008, 1–64.

[8] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, "Усечения простых многогранников и приложения", *Избранные вопросы математики и механики*, Сборник статей. К 150-летию со дня рождения академика Владимира Андреевича Стеклова, Тр. МИАН, **289**, МАИК, М., 2015, 115–144; англ. пер.: V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets, "Truncations of simple polytopes and applications", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **289** (2015), 104–133.

[9] V. M. Buchstaber, N. Erokhovets, *Construction of fullerenes*, 2015, 20 pp., arXiv: 1510.02948.

[10] V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets, *Fullerenes, polytopes and toric topology*, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., World Sci. Publ., River Edge, NJ (to appear); 2016, 117 pp., arXiv: 1609.02949.

[11] V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets, “Finite sets of operations sufficient to construct any fullerene from C_{20}”, *Structural Chemistry*, **28**:1 (2017), 225–234; 2016, 10 pp., arXiv: 1611.05298.

[12] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, “Конструкции семейств трехмерных многогранников, характеристические фрагменты фуллеренов и многогранники Погорелова”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81**:5 (2017).

[13] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, “Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра”, *УМН*, **55**:5(335) (2000), 3–106; англ. пер.: V. M. Buchstaber, T. E. Panov, “Torus actions, combinatorial topology, and homological algebra”, *Russian Math. Surveys*, **55**:5 (2000), 825–921.

[14] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric topology*, Math. Surveys Monogr., **204**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, xiv+518 pp.

[15] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, “О многообразиях, задаваемых 4-раскрасками простых 3-многогранников”, *УМН*, **71**:6(432) (2016), 157–158; англ. пер.: V. M. Buchstaber, T. E. Panov, “On manifolds defined by 4-colourings of simple 3-polytopes”, *Russian Math. Surveys*, **71**:6 (2016), 1137–1139.

[16] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, “Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds”, *Mosc. Math. J.*, **7**:2 (2007), 219–242.

[17] R. Charney, M. W. Davis, “The $K(\pi,1)$-problem for hyperplane complements associated to infinite reflection groups”, *J. Amer. Math. Soc.*, **8**:3 (1995), 597–627.

[18] S. Choi, “Classification of Bott manifolds up to dimension 8”, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **58**:3 (2015), 653–659.

[19] S. Choi, M. Masuda, “Classification of $\mathbb{Q}$-trivial Bott manifolds”, *J. Symplectic Geom.*, **10**:3 (2012), 447–461.

[20] S. Choi, M. Masuda, S. Murai, “Invariance of Pontrjagin classes for Bott manifolds”, *Algebr. Geom. Topol.*, **15**:2 (2015), 965–986.

[21] S. Choi, M. Masuda, S.-I. Oum, “Classification of real Bott manifolds and acyclic digraphs”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **369**:4 (2017), 2987–3011.

[22] S. Choi, M. Masuda, D. Y. Suh, “Topological classification of generalized Bott towers”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:2 (2010), 1097–1112.

[23] S. Choi, M. Masuda, D. Y. Suh, “Rigidity problems in toric topology: a survey”, *Классическая и современная математика в поле деятельности Бориса Николаевича Делоне*, Сборник статей. К 120-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР Бориса Николаевича Делоне, Тр. МИАН, **275**, МАИК, М., 2011, 188–201; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **275** (2011), 177–190.

[24] S. Choi, T. Panov, D. Y. Suh, “Toric cohomological rigidity of simple convex polytopes”, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **82**:2 (2010), 343–360.

[25] S. Choi, S. Park, “Projective bundles over toric surfaces”, *Internat. J. Math.*, **27**:4 (2016), 1650032, 30 pp.

[26] S. Choi, S. Park, D. Y. Suh, “Topological classification of quasitoric manifolds with second Betti number 2”, *Pacific J. Math.*, **256**:1 (2012), 19–49.

[27] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.

[28] M. Davis, T. Januszkiewicz, R. Scott, “Nonpositive curvature of blow-ups”, *Selecta Math.* (*N. S.*), **4**:4 (1998), 491–547.

[29] C. Delaunay, “On hyperbolicity of toric real threefolds”, *Int. Math. Res. Not.*, **2005**:51 (2005), 3191–3201.

[30] G. Denham, A. I. Suciu, “Moment-angle complexes, monomial ideals and Massey products”, *Pure Appl. Math. Q.*, **3**:1 (2007), 25–60.

[31] M. Деза, M. Дютур Сикирич, М. И. Штогрин, “Фуллерены и диск-фуллерены”, *УМН*, **68**:4(412) (2013), 69–128; англ. пер.: M. Deza, M. Dyutur Sikirić, M. I. Shtogrin, “Fullerenes and disk-fullerenes”, *Russian Math. Surveys*, **68**:4 (2013), 665–720.

[32] T. Došlić, "Cyclical edge-connectivity of fullerene graphs and $(k, 6)$-cages", *J. Math. Chem.*, **33**:2 (2003), 103–112.

[33] F. Fan, J. Ma, X. Wang, *B-Rigidity of flag* 2*-spheres without* 4*-belt*, 2015, 11 pp., arXiv: 1511.03624.

[34] F. Fan, X. Wang, *On the cohomology of moment-angle complexes associated to Gorenstein* complexes*, 2016 (v1 – 2015), 49 pp., arXiv: 1508.00159.

[35] M. Gromov, "Hyperbolic groups", *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **8**, Springer, New York, 1987, 75–263.

[36] B. Grünbaum, "Some analogues of Eberhard's theorem on convex polytopes", *Israel J. Math.*, **6**:4 (1968), 398–411.

[37] S. Hasui, "On the classification of quasitoric manifolds over dual cyclic polytopes", *Algebr. Geom. Topol.*, **15**:3 (2015), 1387–1437.

[38] T. Inoue, "Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra", *Algebr. Geom. Topol.*, **8**:3 (2008), 1523–1565.

[39] H. Ishida, Y. Fukukawa, M. Masuda, "Topological toric manifolds", *Mosc. Math. J.*, **13**:1 (2013), 57–98.

[40] P. E. Jupp, "Classification of certain 6-manifolds", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **73**:2 (1973), 293–300.

[41] Y. Kamishima, M. Masuda, "Cohomological rigidity of real Bott manifolds", *Algebr. Geom. Topol.*, **9**:4 (2009), 2479–2502.

[42] И. Ю. Лимонченко, "Произведения Масси в когомологиях момент-угол-многообразий 2-усеченных кубов", *УМН*, **71**:2(428) (2016), 207–208; англ. пер.: I. Yu. Limonchenko, "Massey products in cohomology of moment-angle manifolds for 2-truncated cubes", *Russian Math. Surveys*, **71**:2 (2016), 376–378.

[43] Э. Э. Лорд, А. Л. Маккей, С. Ранганатан, *Новая геометрия для новых материалов*, Физматлит, М., 2010, 264 с.; пер. с англ.: E. A. Lord, A. L. Mackay, S. Ranganathan, *New geometries for new materials*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006, x+238 pp.

[44] Г. А. Маргулис, "Арифметические свойства дискретных подгрупп", *УМН*, **29**:1(175) (1974), 49–98; англ. пер.: G. A. Margulis, "Arithmetic properties of discrete groups", *Russian Math. Surveys*, **29**:1 (1974), 107–156.

[45] M. Masuda, "Cohomological non-rigidity of generalized real Bott manifolds of height 2", *Дифференциальные уравнения и топология. I*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **268**, МАИК, М., 2010, 252–257; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **268** (2010), 242–247.

[46] М. Масуда, Т. Е. Панов, "Полусвободные действия окружности, башни Ботта и квазиторические многообразия", *Матем. сб.*, **199**:8 (2008), 95–122; англ. пер.: M. Masuda, T. E. Panov, "Semifree circle actions, Bott towers and quasitoric manifolds", *Sb. Math.*, **199**:8 (2008), 1201–1223.

[47] M. Masuda, D. Y. Suh, "Classification problems of toric manifolds via topology", *Toric topology*, Contemp. Math., **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 273–286.

[48] А. Е. Миронов, "О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$", *Матем. сб.*, **195**:1 (2004), 89–102; англ. пер.: A. E. Mironov, "New examples of Hamilton-minimal and minimal Lagrangian submanifolds in $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$", *Sb. Math.*, **195**:1 (2004), 85–96.

[49] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов, "Пересечения квадрик, момент-угол-многообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения", *Функц. анализ и его прил.*, **47**:1 (2013), 47–61; англ. пер.: A. E. Mironov, T. E. Panov, "Intersections of quadrics, moment-angle manifolds, and Hamiltonian-minimal Lagrangian embeddings", *Funct. Anal. Appl.*, **47**:1 (2013), 38–49.

[50] В. В. Никулин, “О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 113–142; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On the classification of arithmetic groups generated by reflections in Lobachevsky spaces”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:1 (1982), 99–123.

[51] С. П. Новиков, “Гомотопически эквивалентные гладкие многообразия. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:2 (1964), 365–474; англ. пер.: S. P. Novikov, *Homotopically equivalent smooth manifolds*. I, 97 pp., http://www.mi.ras.ru/~snovikov/10.pdf.

[52] С. П. Новиков, “Топология”, *Топология – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **12**, ВИНИТИ, М., 1986, 5–252; англ. пер.: S. P. Novikov, “Topology”, *Topology I*, Encyclopaedia Math. Sci., **12**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 1–310.

[53] T. E. Panov, “Cohomology of face rings, and torus actions”, *Surveys in contemporary mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 165–201; 2007 (v1 – 2005), 28 pp., arXiv: math/0506526.

[54] Т. Е. Панов, “Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях”, *УМН*, **68**:3(411) (2013), 111–186; англ. пер.: T. E. Panov, “Geometric structures on moment-angle manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **68**:3 (2013), 503–568.

[55] Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин, “Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера”, *Матем. сб.*, **207**:11 (2016), 105–126; англ. пер.: T. E. Panov, Ya. A. Veryovkin, “Polyhedral products and commutator subgroups of right-angled Artin and Coxeter groups”, *Sb. Math.*, **207**:11 (2016), 1582–1600.

[56] А. В. Погорелов, “О правильном разбиении пространства Лобачевского”, *Матем. заметки*, **1**:1 (1967), 3–8; англ. пер.: A. V. Pogorelov, “A regular partition of Lobachevskian space”, *Math. Notes*, **1**:1 (1967), 3–5.

[57] L. Potyagailo, E. Vinberg, “On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces”, *Comment. Math. Helv.*, **80**:1 (2005), 63–73.

[58] Y. Suyama, “Examples of smooth compact toric varieties that are not quasitoric manifolds”, *Algebr. Geom. Topol.*, **14**:5 (2014), 3097–3106.

[59] Yu. Suyama, “Simplicial 2-spheres obtained from non-singular complete fans”, *Дальневост. матем. журн.*, **15**:2 (2015), 277–288; 2014, 9 pp., arXiv: 1409.3713.

[60] W. P. Thurston, “Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere”, *The Epstein birthday schrift*, Geom. Topol. Monogr., **1**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998, 511–549.

[61] А. Ю. Веснин, “Трехмерные гиперболические многообразия типа Лебелля”, *Сиб. матем. журн.*, **28**:5 (1987), 50–53; англ. пер.: A. Yu. Vesnin, “Three-dimensional hyperbolic manifolds of Löbell type”, *Sib. Math. J.*, **28**:5 (1987), 731–734.

[62] А. Ю. Веснин, “Трехмерные гиперболические многообразия с общим фундаментальным многогранником”, *Матем. заметки*, **49**:6 (1991), 29–32; англ. пер.: A. Yu. Vesnin, “Three-dimensional hyperbolic manifolds with general fundamental polyhedron”, *Math. Notes*, **49**:6 (1991), 575–577.

[63] А. Ю. Веснин, “Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия”, *УМН*, **72**:2 (2017), 67–110.

[64] Э. Б. Винберг, “Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского”, *Матем. сб.*, **72(114)**:3 (1967), 471–488; англ. пер.: È. B. Vinberg, “Discrete groups generated by reflections in Lobačevskiĭ spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **1**:3 (1967), 429–444.

[65] Э. Б. Винберг, “Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности”, Тр. ММО, **47**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984, 68–102; англ. пер.: È. B. Vinberg, “The non-existence of crystallographic

groups of reflections in Lobachevskiĭ spaces of large dimension", *Trans. Moscow Math. Soc.*, **1985** (1985), 75–112.

[66] C. T. C. Wall, "Classification problems in differential topology. V. On certain 6-manifolds", *Invent. Math.*, **1**:4 (1966), 355–374.

[67] А. В. Жубр, "Замкнутые односвязные шестимерные многообразия: доказательства классификационных теорем", *Алгебра и анализ*, **12**:4 (2000), 126–230; англ. пер.: A. V. Zhubr, "Closed simply connected six-dimensional manifolds: proofs of classification theorems", *St. Petersburg Math. J.*, **12**:4 (2001), 605–680.

[68] Г. М. Циглер, *Теория многогранников*, МЦНМО, М., 2014, 568 с.; пер. с англ.: G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, New York, 1995, x+370 pp.

Поступила в редакцию
20.12.2016

Виктор Матвеевич Бухштабер
(Victor M. Buchstaber)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук;
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Николай Юрьевич Ероховец
(Nikolai Yu. Erokhovets)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: erochovetsn@hotmail.com

Микия Масуда
(Mikiya Masuda)
Osaka City University, Osaka, Japan
E-mail: masuda@sci.osaka-cu.ac.jp

Тарас Евгеньевич Панов
(Taras E. Panov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Институт теоретической и экспериментальной
физики им. А. И. Алиханова;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Сонджон Пак
(Seonjeong Park)
Osaka City University, Osaka, Japan
E-mail: seonjeong1124@gmail.com