

Эффективная кубическая нелинейность, фотоиндуцированная анизотропия и эллиптически поляризованные кноидальные волны при удвоении частоты

В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Проанализированы особенности эффективной кубической нелинейности при генерации второй гармоники в среде с квадратичной нелинейностью. Показано, что в этом случае за счет дополнительной эффективной фотоиндуцированной анизотропии констант распространения двух ортогонально поляризованных компонент накачки состояние поляризации волны накачки по мере ее распространения меняется. При этом в зависимости от начальных условий либо формируется эллиптически поляризованная кноидальная волна (состояние поляризации излучения накачки периодически трансформируется от линейного к эллиптическому и обратно), либо происходит переход к аperiodическому поляризованному «хаосу».

Ключевые слова: удвоение частоты на квадратичной нелинейности, эффективная кубическая нелинейность и фотоиндуцированная анизотропия констант распространения, эллиптически поляризованная кноидальная волна и аperiodический поляризованный «хаос».

1. Введение

Авторами [1] было показано, что при коллинеарном взаимодействии трех плоских монохроматических волн (мод) задача стационарного параметрического преобразования частоты на квадратичной нелинейности [2] сводится к трем независимым стационарным нелинейным уравнениям Шредингера (НУШ). Каждое из них связано с остальными лишь через граничные условия и описывает кноидальную волну (КВ) с действительной либо комплексной амплитудой. Такой переход к НУШ был интерпретирован как возможность описания результата конкуренции двух одновременно протекающих на нелинейности второго порядка процессов слияния ($\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3$) и распада ($\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$) квантов с частотами ω_{1-3} в терминах эффективной каскадной кубической нелинейности [3].

Ниже мы проанализируем характер и особенности этой эффективной нелинейности для процесса генерации второй гармоники ($\omega_1 = \omega_2$) II типа (оee-взаимодействие) [2] и покажем, что корректное описание его поляризационных особенностей не сводится к тривиальному учету хорошо изученной кубической нелинейности керровского типа. В этом процессе за счет дополнительной эффективной фотоиндуцированной анизотропии диэлектрической проницаемости среды возможна реализация как периодических (эллиптически поляризованные кноидальные волны [4]), так и аperiodических режимов распространения волны накачки.

2. Эффективная кубическая нелинейность и фотоиндуцированная анизотропия

Рассмотрим коллинеарное взаимодействие трех плоских линейно поляризованных монохроматических волн: двух – на основной частоте (амплитуды $A_{1,2}$, частоты $\omega_{1,2} = \omega$, волновые векторы $k_{1,2}$) и одной – на частоте второй гармоники (амплитуда A_3 , частота $\omega_3 = 2\omega$, волновой вектор k_3), распространяющихся от плоскости $z = 0$ вдоль оси z в среде с квадратичной нелинейностью. Положим, что среда занимает полупространство $z \geq 0$ и в ней реализован параметрический процесс II типа (например, оee-взаимодействие) [2]. Направив теперь оси x и y лабораторной системы координат вдоль ортогональных векторов поляризации $e_{1,2}$ волн накачки с амплитудами $A_{1,2}$ и пренебрегая пространственной дисперсией среды и поглощением, опишем интересующий нас процесс хорошо известной [2] системой уравнений:

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\beta A_2^* A_3 \exp(-i\Delta z), \quad (1a)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = -i\beta A_1^* A_3 \exp(-i\Delta z), \quad (1b)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = -i2\beta A_1 A_2 \exp(+i\Delta z). \quad (1в)$$

Здесь β – константа нелинейной связи; $\Delta = k_1 + k_2 - k_3$ – волновая расстройка. Система (1) имеет два интеграла движения:

$$I_1(z) + I_2(z) + I_3(z) = I_{10} + I_{20} + I_{30} = I_0, \quad (2a)$$

В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 20 июля 2009 г.

$$I_1(z) - I_2(z) = I_{10} - I_{20} = \Delta I_0, \tag{26}$$

где $I_i(z) = A_i(z)A_i^*(z)$ – переменная, пропорциональная плотности потока энергии i -й (здесь и далее $i = 1 - 3$) волны, которую мы будем называть интенсивностью; $I_{i0} = I_i|_{z=0}$. Интеграл (2а) описывает закон сохранения плотности полного потока энергии, а (2б) отражает соотношения Мэнли – Роу [2].

Авторы [1] показали, что система (1) после замены переменных

$$A_{1-3}(z) = \tilde{A}_{1-3}(z) \exp(-i\alpha_{1-3}z), \tag{3}$$

где $\alpha_{1-3} = \text{const}$, сводится к трем независимым уравнениям, описывающим нелинейные самосогласованные осцилляции амплитуд $A_{1-3}(z)$ в терминах эффективной локальной кубической нелинейности:

$$\frac{d^2 \tilde{A}_1}{dz^2} - \beta^2 \left[\left(I_0 + 3\Delta I_0 - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right) - 4\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^* \right] \tilde{A}_1 = 0, \tag{4а}$$

$$\frac{d^2 \tilde{A}_2}{dz^2} - \beta^2 \left[\left(I_0 - 3\Delta I_0 - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right) - 4\tilde{A}_2 \tilde{A}_2^* \right] \tilde{A}_2 = 0, \tag{4б}$$

$$\frac{d^2 \tilde{A}_3}{dz^2} + \beta^2 \left[\left(2I_0 + \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right) - 2\tilde{A}_3 \tilde{A}_3^* \right] \tilde{A}_3 = 0. \tag{4в}$$

При этом уравнению (4а) соответствует выбор значений α_{1-3} и граничных условий в виде

$$\alpha_1 = \Delta/2, \quad \alpha_2 - \alpha_3 = \Delta/2, \tag{5а}$$

$$\tilde{A}_1|_{z=0} = A_{10}, \quad \left. \frac{d\tilde{A}_1}{dz} \right|_{z=0} = i\frac{\Delta}{2} A_{10} - i\beta A_{20}^* A_{30}, \tag{5б}$$

тогда как уравнениям (4б) и (4в) –

$$\alpha_2 = \Delta/2, \quad \alpha_1 - \alpha_3 = \Delta/2, \tag{6а}$$

$$\tilde{A}_2|_{z=0} = A_{20}, \quad \left. \frac{d\tilde{A}_2}{dz} \right|_{z=0} = i\frac{\Delta}{2} A_{20} - i\beta A_{10}^* A_{30} \tag{6б}$$

и

$$\alpha_3 = -\Delta/2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \Delta/2, \tag{7а}$$

$$\tilde{A}_3|_{z=0} = A_{30}, \quad \left. \frac{d\tilde{A}_3}{dz} \right|_{z=0} = -i\frac{\Delta}{2} A_{30} - i2\beta A_{10} A_{20} \tag{7б}$$

соответственно. Причем, поскольку все уравнения в (4) независимы, исходная задача оказывается переформулированной так, что описывает независимое распространение трех волн, имеющих за счет эффективной кубической нелинейности среды разные константы распространения. Решения всех трех уравнений при этом по-прежнему связаны, но только через свои граничные условия (5б)–(7б) и входящие в (4) константы.

Заметим, что условия (5а)–(7а) попарно совместимы. Это значит, что любая пара уравнений в (4) может рассматриваться как замкнутая система. Выбрав, например, в качестве такой пары уравнения (4а) и (4б) (т. е. положив $\alpha_1 = \alpha_2 = \Delta/2$ и $\alpha_3 = 0$) и воспользовавшись равенствами (2), соответствующую систему уравнений можно запи-

сать в самых разных формах. Действительно, подставив тождество

$$\Delta I_0 \equiv q\Delta I_0 + (1 - q)(\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^* - \tilde{A}_2 \tilde{A}_2^*), \tag{8}$$

где q – произвольная константа, в уравнения (4а) и (4б), можно получить общий вид интересующей нас системы:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{A}_1}{dz^2} - \beta^2 \left[\left(I_0 + 3q\Delta I_0 - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right) - (1 + 3q)\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^* - 3(1 - q)\tilde{A}_2 \tilde{A}_2^* \right] \tilde{A}_1 = 0, \end{aligned} \tag{9а}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{A}_2}{dz^2} - \beta^2 \left[\left(I_0 - 3q\Delta I_0 - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right) - 3(1 - q)\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^* - (1 + 3q)\tilde{A}_2 \tilde{A}_2^* \right] \tilde{A}_2 = 0. \end{aligned} \tag{9б}$$

Рассматривая теперь (9) как аналог пары уравнений движения, легко убедиться в том, что в тех случаях, когда $\Delta I_0 \neq 0$, положение точки статического равновесия

$$I_{1,2}^{(0)} = \frac{1}{4} \left(I_0 \pm \frac{6q}{3q - 1} \Delta I_0 - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right), \tag{10}$$

т. е. точки, в которой интенсивности $I_{1,2}^{(0)}$ обнуляют вторые слагаемые («силы») в левых частях (9а) и (9б), при любых q оказывается несовместимым с условием (2б), т. к.

$$I_1^{(0)} - I_2^{(0)} = \frac{3q}{3q - 1} \Delta I_0 \neq \Delta I_0. \tag{11}$$

Аналогичная несовместимость наблюдается и в единственной особой (по отношению к проведенным при выводе (11) выкладкам) точке $q = -1/3$, где система (9) принимает вид

$$\frac{d^2 \tilde{A}_{1,2}}{dz^2} - \beta^2 \left[\left(I_0 \mp \Delta I_0 - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right) - 4\tilde{A}_{2,1} \tilde{A}_{2,1}^* \right] \tilde{A}_{1,2} = 0, \tag{12}$$

для которого

$$I_{1,2}^{(0)} = \frac{1}{4} \left(I_0 \pm \Delta I_0 - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right), \tag{13}$$

и при $\Delta I_0 \neq 0$

$$I_1^{(0)} - I_2^{(0)} = \frac{1}{2} \Delta I_0 \neq \Delta I_0. \tag{14}$$

Это значит, что анализируемая система уравнений имеет стационарные (по z) решения, удовлетворяющие законам сохранения (2), только в тех случаях, когда $\Delta I_0 = 0$.

Легко видеть, что форма записи (4а) и (4б) при этом выделена из класса форм записей (9), поскольку только она отвечает диагонализации (отсутствие комбинаций $\tilde{A}_i \tilde{A}_j$ при $i \neq j$) выражения для потенциальной (свободной) энергии

$$U = U^{(1)} + U^{(2)}, \tag{15а}$$

где

$$U^{(1)} = \beta^2 \left(I_0 - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right) (\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^* + \tilde{A}_2 \tilde{A}_2^*) + 3\beta^2 \Delta I_0 (\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^* - \tilde{A}_2 \tilde{A}_2^*), \quad (15б)$$

$$U^{(2)} = -2\beta^2 [(\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^*)^2 + (\tilde{A}_2 \tilde{A}_2^*)^2], \quad (15в)$$

в выбранной системе координат и только в этом случае зависимость переменных $I_{1,2}$ друг от друга (2) не принципиальна. Отметим также, что поскольку уравнения (4а) и (4б) совпадают по форме со стационарными (по времени) волновыми уравнениями при наличии линейных и кубических по внешнему полю составляющих в поляризации, соотношения (15) описывают фактически фотоиндуцированную анизотропию, которая характеризуется вкладом как в компоненты тензора диэлектрической проницаемости

$$\Delta \varepsilon_{xx,yy} \propto \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \tilde{A}_{1,2} \partial \tilde{A}_{1,2}^*} = \beta^2 \left(I_0 \pm 3\Delta I_0 - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right), \quad (16)$$

$$\Delta \varepsilon_{xy,yx} \propto \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \tilde{A}_{2,1} \partial \tilde{A}_{1,2}^*} = 0,$$

так и в кубическую нелинейную восприимчивость

$$\chi_{xxxx,yyyy} \propto \frac{\partial^4 U^{(2)}}{\partial \tilde{A}_{1,2} \partial \tilde{A}_{1,2}^* \partial \tilde{A}_{1,2} \partial \tilde{A}_{1,2}^*} = -4\beta^2, \quad (17)$$

$$\chi_{xxyy,yyxx} \propto \frac{\partial^4 U^{(2)}}{\partial \tilde{A}_{1,2} \partial \tilde{A}_{1,2}^* \partial \tilde{A}_{2,1} \partial \tilde{A}_{2,1}^*} = 0$$

(см. [5]). При этом использование термина «диэлектрическая проницаемость» является сугубо условным, т. к. речь идет о вкладах, величины которых, во-первых, в зависимости от граничных условий могут быть как больше, так и меньше нуля, а во-вторых, явно зависят от входных интенсивностей и в случае $I_{10-30} = 0$ отсутствуют. Отметим еще раз, что использовать тождество (8) для того, чтобы как-то изменить характер и симметрию выражений (16) и (17), нельзя, поскольку диагонализация тензоров, соответствующих (15б) и (15в), с учетом зависимости переменных $I_{1,2}$ друг от друга (интегралов (2)) имеет принципиальное значение.

3. Эллиптически поляризованные кноидальные волны

Перейдем теперь к ситуации, в которой $I_{30} = 0$ и волна на частоте второй гармоники на входе в нелинейную среду отсутствует. При этом можно ограничиться анализом процесса распространения двух ортогонально поляризованных волн накачки с амплитудами $A_{1,2}$ в среде с подходящей фотоиндуцированной анизотропией диэлектрической проницаемости и кубической нелинейностью. О процессе генерации моды с амплитудой A_3 при этом можно вообще «забыть», рассматривая его как физический механизм, ответственный за возникновение соответствующей нелинейности. В этом случае система (4) принимает вид

$$\frac{d^2 \tilde{A}_{1,2}}{dz^2} - \beta^2 \left[\left(4I_{20,10} - 2I_{20,10} - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right) - 4\tilde{A}_{1,2} \tilde{A}_{1,2}^* \right] \tilde{A}_{1,2} = 0 \quad (18)$$

при граничных условиях

$$\tilde{A}_{1,2}|_{z=0} = A_{10,20}, \quad \left. \frac{d\tilde{A}_{1,2}}{dz} \right|_{z=0} = i \frac{\Delta}{2} A_{10,20}, \quad (19)$$

фотоиндуцированная анизотропия диэлектрической проницаемости определяется соотношениями

$$\Delta \varepsilon_{xx,yy} \propto \beta^2 \left(4I_{10,20} - 2I_{20,10} - \frac{\Delta^2}{4\beta^2} \right), \quad \Delta \varepsilon_{xy} = \Delta \varepsilon_{yx} = 0, \quad (20)$$

а эффективная кубическая нелинейность – выписанными нами ранее выражениями (17). Легко заметить, что основной особенностью задачи является независимое (с точностью до граничных условий и численных параметров) нелинейное распространение двух волн, имеющих при $I_{10} \neq I_{20}$ разные ($\Delta \varepsilon_{xx} \neq \Delta \varepsilon_{yy}$) константы распространения.

Хотя из (19) следует, что при $\Delta \neq 0$ амплитуды $\tilde{A}_{1,2}$ комплексны и поэтому заменой

$$\tilde{A}_{1,2} = X_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2}) \quad (21)$$

надо ввести их действительные амплитуды $X_{1,2}$ и фазы $\varphi_{1,2}$, искать решения задачи (18) удобнее через комплексную амплитуду моды \tilde{A}_3 , у которой фаза φ_3 при $I_{30} = 0$ является константой [1]. Решение уравнения (4в) с учетом (7) дает

$$\tilde{A}_3(z) = -i \operatorname{sn}(\gamma z, k) \times$$

$$\frac{2(I_{10}I_{20})^{1/2} \exp[i(\varphi_{10} + \varphi_{20})]}{\{I_{10} + I_{20} + \Delta^2/8\beta^2 + [(I_{10} + I_{20} + \Delta^2/8\beta^2)^2 - 4I_{10}I_{20}]^{1/2}\}^{1/2}}, \quad (22а)$$

$$\gamma = \beta \{ I_{10} + I_{20} + \Delta^2/8\beta^2 + [(I_{10} + I_{20} + \Delta^2/8\beta^2)^2 - 4I_{10}I_{20}]^{1/2} \}^{1/2}, \quad (22б)$$

$$k = \frac{2(I_{10}I_{20})^{1/2}}{I_{10} + I_{20} + \Delta^2/8\beta^2 + [(I_{10} + I_{20} + \Delta^2/8\beta^2)^2 - 4I_{10}I_{20}]^{1/2}}. \quad (22в)$$

При этом непосредственно из законов сохранения (2) следует, что

$$X_{1,2}^2(z) = I_{10,20} \times$$

$$\left[1 - \frac{2I_{20,10}}{I_{10} + I_{20} + \Delta^2/8\beta^2 + [(I_{10} + I_{20} + \Delta^2/8\beta^2)^2 - 4I_{10}I_{20}]^{1/2}} \times \operatorname{sn}^2(\gamma z, k) \right]. \quad (23)$$

Здесь $\operatorname{sn}(\xi, k)$ – эллиптическая функция Якоби; ξ и $1 \geq k \geq 0$ – ее аргумент и модуль [6]. Для фаз $\varphi_{1,2}$ исконых

решений $\tilde{A}_{1,2}$ системы (18) с учетом условий (19) и выражения (7) из работы [7] при этом можно сразу записать

$$\varphi_{1,2}(z) = \varphi_{10,20} + \frac{\Delta}{2} I_{10,20} \int_0^z \frac{dz'}{X_{1,2}^2(z')}, \quad (24)$$

после чего выражения (23) и (24) и определяют полностью необходимые нам для дальнейшего анализа решения $\tilde{A}_{1,2}(z)$ системы уравнений (18).

Уже непосредственно из характера выписанных выше формул ясно, что разделение вкладов, появление которых связано с эффективной фотоиндуцированной анизотропией диэлектрической проницаемости (20) и с кубической нелинейностью (17), в общем случае является нетривиальной задачей. Поэтому мы перейдем к еще более простой ситуации с линейно поляризованным входным излучением накачки и будем считать, что при $z = 0$ вектор его поляризации e_0 лежит в плоскости xu и развернут относительно оси y на угол ψ_0 , за счет чего на входе в среду и формируются две ортогонально поляризованные компоненты поля на частоте ω с амплитудами $A_{1,2}$. С учетом того, что $\varphi_{10} = \varphi_{20} = \varphi_0$, граничные условия для системы (18) записываются в виде

$$\tilde{A}_{10} = \sqrt{I_0} \sin \psi_0 \exp(i\varphi_0), \quad (25a)$$

$$\tilde{A}_{20} = \sqrt{I_0} \cos \psi_0 \exp(i\varphi_0). \quad (25б)$$

Для того чтобы нагляднее охарактеризовать роль именно фотоиндуцированных процессов, пренебрежем теперь и исходной анизотропией среды, положив $k_1 = k_2$. На практике это может соответствовать, например, введению в схему преобразователя дополнительной волновой пластинки, компенсирующей различие между показателями преломления двух компонент накачки. Из соотношений (20) следует, что в этом случае фотоиндуцированная анизотропия диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_{yy} - \Delta\epsilon_{xx} \propto 6\beta^2 I_0 \cos 2\psi_0$ не обращается в нуль только тогда, когда $\psi_0 \neq \psi_n = (2n + 1)\pi/4$, где n – произвольное целое число. Текущее состояние поляризации волны накачки при этом можно определить двумя параметрами, $\tan \psi(z) = X_1(z)/X_2(z)$ и $\Delta\varphi(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z)$, описывающими его эволюцию по мере распространения излучения [8]. С учетом (23)–(25) легко видеть, что именно в тех ситуациях, когда $\psi_0 \neq \psi_n$, состояние поляризации волны на частоте ω действительно меняется. Так, при $\psi_0 \neq \psi_n$ и $\Delta = 0$ (т. е. при точном выполнении условий фазового синхронизма) поляризация излучения накачки остается линейной, т. к.

$$\Delta\varphi(z) = \varphi_1 - \varphi_2 \equiv 0, \quad (26)$$

хотя ориентация вектора поляризации e в плоскости xu периодически меняется по мере распространения, поскольку периодически меняется

$$\begin{aligned} \tan \psi(z) &= X_1/X_2 \\ &= \tan \psi_0 \left[\frac{1 + |\cos 2\psi_0| - 2 \cos^2 \psi_0 \operatorname{sn}^2(\gamma z, k)}{1 + |\cos 2\psi_0| - 2 \sin^2 \psi_0 \operatorname{sn}^2(\gamma z, k)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (27)$$

(см. [8]). При этом $\tan \psi(z) = \tan \psi_0$, и направления e и e_0 совпадают лишь в точках $z = z_n = 2nK/\gamma$, т. е. на расстояниях от входной плоскости $z = 0$, кратных периоду $2K/\gamma$

осцилляций $X_{1,2}$. Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл [6].

При $\psi_0 \neq \psi_n$ и $\Delta \neq 0$ ситуация существенно усложняется. Поляризация волны накачки по мере ее распространения непрерывно меняется, постоянно трансформируясь от линейной к эллиптической и обратно. С учетом (24) и (25) излучение накачки линейно поляризовано только в тех точках $z = z_j$ оси z , где

$$\Delta\varphi(z_j) = \frac{\Delta}{2} I_0 \int_0^{z_j} \left[\frac{\sin^2 \psi_0}{X_1^2(z')} - \frac{\cos^2 \psi_0}{X_2^2(z')} \right] dz' = j2\pi. \quad (28)$$

Здесь j – произвольное целое число. Поскольку в общем случае $z_j \neq z_n$ ни при каких j и n (см. выше), вектор e даже при $z = z_j$ должен быть развернут относительно e_0 . В остальных точках $z \neq z_j$ волна накачки должна быть эллиптически поляризована, причем ориентация осей эллипса поляризации у нее должна быть все время разная, т. к.

$$\begin{aligned} \tan \psi(z) &= \tan \psi_0 \left\{ \left[1 + \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_0} + \left[\left(1 + \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_0} \right)^2 - \sin^2 2\psi_0 \right]^{1/2} - 2 \cos^2 \psi_0 \operatorname{sn}^2(\gamma z, k) \right] \right. \\ &\times \left. \left\{ 1 + \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_0} + \left[\left(1 + \frac{\Delta^2}{8\beta^2 I_0} \right)^2 - \sin^2 2\psi_0 \right]^{1/2} - 2 \sin^2 \psi_0 \operatorname{sn}^2(\gamma z, k) \right\}^{-1} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (29)$$

и $\psi(z) = \psi_0$ только при $z = z_n$.

Наглядно проиллюстрировать такую достаточно сложную трансформацию можно на сфере Пуанкаре [8]. Для этого, определив сначала стандартным образом компоненты s_{1-3} нормированного ($s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$) вектора Стокса $s = \{s_1, s_2, s_3\}$, с учетом замены (21) и граничных условий (25) получим

$$s_1 = \frac{\tilde{A}_1 \tilde{A}_2^* + \tilde{A}_1^* \tilde{A}_2}{\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^* + \tilde{A}_2 \tilde{A}_2^*} = \frac{2X_1 X_2}{X_1^2 + X_2^2} \cos \Delta\varphi, \quad (30a)$$

$$s_2 = i \frac{\tilde{A}_1^* \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 \tilde{A}_2^*}{\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^* + \tilde{A}_2 \tilde{A}_2^*} = \frac{2X_1 X_2}{X_1^2 + X_2^2} \sin \Delta\varphi, \quad (30б)$$

$$s_3 = \frac{\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^* - \tilde{A}_2 \tilde{A}_2^*}{\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^* + \tilde{A}_2 \tilde{A}_2^*} = -\frac{I_0 \cos 2\psi_0}{X_1^2 + X_2^2}. \quad (30в)$$

Из соотношений (30) следует, что при $\psi_0 = \psi_n$ и $\Delta\varphi \equiv 0$ (т. е. при $\Delta I_0 = 0$ и $\Delta = 0$) состояние поляризации волны накачки не меняется и описывается на сфере Пуанкаре точкой $\{s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 0\}$, лежащей в ее экваториальной плоскости (рис.1,а). При $\psi_0 \neq \psi_n$ и $\Delta\varphi \equiv 0$ (т. е. при $\Delta I_0 \neq 0$ и $\Delta = 0$) конец вектора s , начав свое движение по поверхности сферы Пуанкаре из точки $\{s_1 = \sin 2\psi_0, s_2 = 0, s_3 = -\cos 2\psi_0\}$ и пройдя по меридиану $s_2 = 0$ (сохранение линейной поляризации) через ее ближайшую вершину ($s_3 = \pm 1$), достигает точки $\{s_1 = -\sin 2\psi_0, s_2 = 0, s_3 = -\cos 2\psi_0\}$, где разворачивается и начинает двигаться в обратную сторону (рис.1,а, жирная линия). Такое периодическое изменение ориентации s соответст-

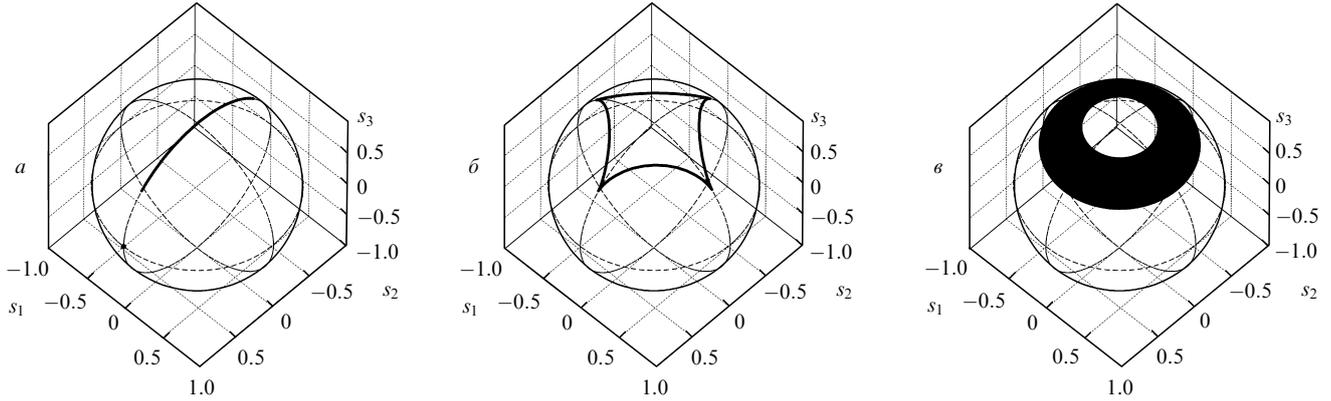


Рис. 1. Траектории движения (при изменении z) конца нормированного вектора Стокса $s = \{s_1, s_2, s_3\}$ волны накачки на сфере Пуанкаре: $\Delta I_0 = 0$ и $\Delta = 0$ ($\psi_0 = \pi/4$ и $\Omega = 1$, точка в экваториальной плоскости), $\Delta I_0 \neq 0$ и $\Delta = 0$ ($\psi_0 = 2$ и $\Omega = 1$, жирная линия) (а); $\Delta I_0 \neq 0$ и $\Delta \neq 0$ при отношении периодов изменения φ и θ , равном 4 ($\psi_0 = 2$ и $\Omega \approx 1.1667$) (б) и $2\sqrt{3}$ ($\psi_0 = 2$ и $\Omega = 1.1065$) (в).

вует тому, что поляризация волны накачки, оставаясь линейной, периодически меняет свое направление в плоскости xy .

При $\psi_0 \neq \psi_n$ и $\Delta \neq 0$ (т. е. при $\Delta I_0 \neq 0$ и $\Delta \neq 0$) характер движения конца вектора s становится гораздо сложнее. Отметим сначала, что из (30) следует, что полярный (φ) и азимутальный (θ) углы, характеризующие ориентацию вектора s в системе координат $\{s_1, s_2, s_3\}$, определяются выражениями

$$\cot \varphi = \frac{s_2}{s_1} = \tan \Delta \varphi, \quad (31a)$$

$$\cot \theta = \frac{s_3}{(s_1^2 + s_2^2)^{1/2}} = -\frac{I_0 \cos 2\psi_0}{2X_1 X_2}. \quad (31б)$$

Причем из (31б) с учетом (23) и (25) вытекает, что в точках $z = z_n$ и $z = (z_n + 2K/\gamma)$, в которых значения $X_{1,2}^2$ максимальны и минимальны, выполнены соотношения

$$\cot \theta|_{\text{sn}^2(\gamma z, k)=0} = -\frac{\cos 2\psi_0}{|\sin 2\psi_0|}, \quad (32a)$$

$$\cot \theta|_{\text{sn}^2(\gamma z, k)=1} = -\frac{\cos 2\psi_0}{|\sin 2\psi_0|} \times \frac{[\Omega + (\Omega^2 - \sin^2 2\psi_0)^{1/2}]^{1/2}}{[2(\Omega - 1)]^{1/2}}, \quad (32б)$$

где $\Omega = 1 + \Delta^2/(8\beta^2 I_0) \geq 1$. Поэтому в ходе эволюции состояния поляризации волны накачки (по мере ее распространения) конец вектора s обязан двигаться по траекториям, локализованным в пределах поверхности шарового слоя

$$\theta \in [\theta|_{\text{sn}^2(\gamma z, k)=0}, \theta|_{\text{sn}^2(\gamma z, k)=1}]. \quad (33)$$

Характер же этого движения благодаря параметру $\Omega = 1 + \Delta^2/(8\beta^2 I_0)$ зависит от соотношения периодов изменения φ и θ . Если эти периоды кратны, т. е. выполняется условие

$$j\pi = [2(\Omega - 1)]^{1/2} [\Omega + (\Omega^2 - \sin^2 2\psi_0)^{1/2}]^{1/2} \cos 2\psi_0$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^{2nK} \text{sn}^2(\xi, k) d\xi [\Omega + (\Omega^2 - \sin^2 2\psi_0)^{1/2}] \\ & - 2 \cos^2 \psi_0 \text{sn}^2(\xi, k)^{-1} [\Omega + (\Omega^2 - \sin^2 2\psi_0)^{1/2}] \\ & - 2 \sin^2 \psi_0 \text{sn}^2(\xi, k)^{-1}, \end{aligned} \quad (34)$$

где j и n – целые числа, состояние поляризации волны накачки меняется периодически (рис. 1, б) и формируется кноидальная волна, поляризация излучения в которой по мере ее распространения периодически изменяется от линейной к эллиптической и обратно. Если же условие (34) не выполнено и соотношение периодов изменения φ и θ иррационально, состояние поляризации волны накачки по мере распространения меняется аperiodически и, несмотря на строгую детерминированность задачи, конец вектора Стокса s в ходе своей эволюции обязательно проходит через каждую точку поверхности шарового слоя (33) (рис. 1, в). Вектор s при этом ведет себя как странный аттрактор, полностью заполняя при своем аperiodическом движении соответствующую область фазового пространства.

4. Заключение

Итак, выше показано, что наличие эффективной фотоиндуцированной анизотропии диэлектрической проницаемости ($\Delta \varepsilon \neq 0$) при $\Delta I_0 \neq 0$ и $\Delta \neq 0$ кардинально отличает процесс параметрического преобразования частоты на квадратичной нелинейности от хорошо изученных процессов формирования кноидальных волн в средах с локальной кубической нелинейностью. И именно благодаря этому решение соответствующей задачи не сводится к тривиальному учету обычной эффективной керровской нелинейности.

В процессе генерации второй гармоники II типа при $\Delta I_0 \neq 0$ и $\Delta \neq 0$ за счет этой эффективной анизотропии характер эволюции состояния поляризации излучения накачки определяется значением численного параметра $\Omega = 1 + \Delta^2/(8\beta^2 I_0)$ и может быть совершенно разным. При выполнении условия (34) излучение накачки является кноидальной волной, поляризация которой периодически меняется от линейной к эллиптической и обратно по мере ее распространения за счет изменения соотношений амплитуд и фаз двух ее ортогонально поляризованных составляющих. При нарушении этого условия век-

тор Стокса волны накачки ведет себя как странный аттрактор и состояние ее поляризации меняется аperiodически. Заметим, что ранее формирование уединенных и периодических нелинейных волн похожего типа – так называемых эллиптически поляризованных солитонов и кноидальных волн – рассматривалось лишь для двулучепреломляющих оптических волокон и гиротропных сред с нелинейностью керровского типа [4], т.е. для систем с реальной, а не эффективной анизотропией.

Отметим также, что учет описанных выше фотоиндуцированных поляризационных особенностей распространения излучения накачки при параметрическом взаимодействии II типа весьма важен и с практической точки зрения. И в первую очередь здесь надо отметить задачу реализации эффективных внутрирезонаторных удвоителей частоты.

1. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **37**, 266 (2007); Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **76**, 046611 (2007).
2. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S. *Phys. Rev.*, **127**, 1918 (1962); Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М.: ВИНТИ, 1964); Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.: Мир, 1966); Цернике Ф., Мидвингер Дж. *Прикладная нелинейная оптика* (М.: Мир, 1976); Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М.: Наука, 1989).
3. Островский Л.А. *Письма в ЖЭТФ*, **5**, 331 (1967); Клышко Д.Н., Полковников Б.Ф. *Квантовая электроника*, **4** (16), 81 (1974); Meredith G.R. *J. Chem. Phys.*, **77**, 5863 (1982); Kobayakov A., Lederer F. *Phys. Rev. A*, **54**, 3455 (1996).
4. Akhmediev N.N., Buryak A.V., Soto-Crespo J.M. *Opt. Commun.*, **112**, 278 (1994); Akhmediev N.N., Buryak A.V., Soto-Crespo J.M., Andersen D.R. *J. Opt. Soc. Am. B*, **12**, 434 (1995); Akhmediev N.N., Ostrovskaya E.A. *Opt. Commun.*, **132**, 190 (1996); Анкевич А., Ахмедиев Н. *Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки* (М.: Физматлит, 2003).
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Том VIII. Электродинамика сплошных сред* (М.: Физматлит, 2003).
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
7. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **37**, 561 (2007).
8. Горшков М.М. *Эллипсометрия* (М.: Сов. радио, 1974); Аззам Р., Башара Н. *Эллипсометрия и поляризованный свет* (М.: Мир, 1981).