

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М.В. ЛОМОНОСОВА  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА

На правах рукописи

Кейзеров Сергей Иванович

**САМОДЕЙСТВИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАДИОНА  
С ПОЛЯМИ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ**

Специальность 1.3.15 – Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика  
высоких энергий

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научные руководители  
член-корреспондент РАН,  
доктор физ.-мат. наук  
Боос Э.Э.,  
доктор физ.-мат наук  
Волобуев И.П.

МОСКВА – 2024

## Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Модель Рэндалл-Сундрума и решение проблемы иерархии .....	16
Глава 2. Сравнение процессов с участием радиона с аналогичными процессами с участием бозона Хиггса.....	34
Глава 3. Нелинейные самодействие и взаимодействие радиона с полями Стандартной модели .....	65
Глава 4. Устойчивость стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума относительно квантовых поправок, вызванных эффектом Казимира .....	79
Заключение .....	95
Благодарности.....	97
Приложение А. Вычисление коэффициентов в полиномиальном разложении эффективного четырехмерного действия радиона .....	98
Приложение В. Вершины взаимодействий радиона и полей Стандартной модели .....	103
Приложение С. Регуляризация и выделение конечной части выражения для энергии Казимира скалярных мод.....	106
Литература .....	115

## Введение

### Актуальность и степень разработанности темы диссертации

Теории с дополнительными измерениями пространства-времени изучаются в теоретической физике уже более ста лет. Пионерская работа Теодора Калуцы [1], в которой была сделана попытка объединить гравитационное и электромагнитное взаимодействия с помощью гипотезы о наличии у физического пространства-времени пятого измерения, была опубликована в 1921 году. Несколько лет спустя Оскаром Клейном была опубликована работа [2], в которой с помощью пятого измерения, свернутого в микроскопическую окружность, объяснялась дискретность зарядов и масс элементарных частиц, а также обосновывалось отсутствие непосредственной возможности наблюдать это дополнительное измерение в прямых экспериментах. И хотя в конечном итоге ни подобная теория объединения электромагнитных и гравитационных взаимодействий, ни такая модель квантования зарядов и масс не оказались реалистичными, тем не менее, идея, что в микромире физическое пространство-время может иметь более четырех измерений, прочно вошла в инструментарий физиков-теоретиков и к настоящему времени получила серьезнейшее развитие (см., например, обзор [3]).

Во второй половине 20-го века идеи Калуцы и Клейна были обобщены на случай более чем одного дополнительного измерения. В частности, было показано, что в подобных теориях можно получить калибровочные поля с произвольной группой калибровочной симметрии<sup>1</sup> [4], а компактификация дополнительных измерений может быть следствием точных решений многомерных динамических уравнений, как классических [5-7], так и уравнений, полученных с учетом квантовых поправок [8,9]. Введение в теорию дополнительных полей, которые имеют негравитационное, неметрическое или даже негеометрическое

---

<sup>1</sup> Позднее, в предисловии к русскому изданию книги «Динамическая теория групп и полей» ДеВитт предлагал воспринимать ассоциацию его имени с неабелевыми обобщениями теории Калуцы-Клейна как «большую шутку». Тем не менее, в обзоре [3] его работа 1963 г. указана в качестве первой в этой области.

происхождение, например, так называемых симметричных калибровочных полей [10,11], позволяет получить после проведения процедуры размерной редукции эффективные лагранжианы четырехмерных скалярных и векторных полей, сходные по структуре с теми, что фигурируют в Стандартной модели, в частности полиномиальный потенциал поля Хиггса четвертой степени с нетривиальным минимумом.

После появления математически строгого определения супермногообразия [12,13], появилась возможность корректной формулировки супергравитации как калибровочной теории группы Пуанкаре, дополненной преобразованиями суперсимметрии в пространстве-времени с дополнительными измерениями, координаты которых являются грассмановыми переменными. Заметим также, что без идеи дополнительных измерений пространства-времени невозможно представить такие современные научные направления, как теория суперструн и М-теория, для которых из требований самосогласованности и непротиворечивости вытекает необходимость существования определенного числа дополнительных измерений.

К сожалению, несмотря на формальное сходство четырехмерных лагранжианов, получаемых в результате редукции многомерной теории, с теми структурами, которые присутствуют в лагранжиане Стандартной модели, реалистичная многомерная теория, хорошо описывающая экспериментальные данные, так и не была создана. Дело в том, что соотношения между эффективными четырехмерными константами, получаемыми в таких моделях, имеют достаточно жесткие теоретические ограничения и при этом оказываются достаточно далеки от наблюдаемых. Четырехмерные поля оказываются или безмассовыми, или имеют массы порядка обратного радиуса компактификации (характерного размера дополнительных измерений). Кроме того, как правило, в таких моделях возникают бесконечные последовательности четырехмерных полей (мод) с возрастающими массами – так называемые калуца-клейновские башни, причем массы соседних мод оказываются сравнимыми (возможно за исключением самой легкой моды, которая

может быть безмассовой). При этом для подавляющего большинства простых моделей типа Калуцы-Клейна выполняется условие, что если четырехмерные константы взаимодействия калибровочных полей, получаемые в процессе редукции, оказываются порядка единицы, то радиус компактификации будет планковским. Поэтому величины наименьших ненулевых масс и размерных констант, получаемых после размерной редукции, оказываются одного порядка с энергетическим масштабом четырехмерного гравитационного взаимодействия, то есть порядка массы Планка (примерно  $10^{19}$  ГэВ). Тогда как масштаб масс и размерных констант полей СМ (примерно 200 ГэВ) на много порядков отличается от фундаментального планковского масштаба. Столь существенная разница характерных энергетических масштабов гравитационного и калибровочных взаимодействий получила название «проблемы иерархии».

Принципиально новый подход к проблеме ненаблюдаемости дополнительных измерений пространства был предложен в работах [14,15]. В них была построена самосогласованная модель, в которой поля материи с помощью определенного механизма удерживались на доменной стенке, возникающей в результате решения многомерных уравнений движения. И для того, чтобы локализованные на доменной стенке частицы могли быть от нее оторваны, требовалась огромная энергия, много большая характерного энергетического масштаба Стандартной модели. В результате в такой модели дополнительные измерения могут иметь большие (макроскопические) или даже бесконечные размеры, оставаясь при этом ненаблюдаемыми. Если постулировать такое удержание частиц на бесконечно тонкой доменной стенке, то в теории возникает новый объект, получивший сначала название «мембрана», которое впоследствии, чтобы отличать его от мембран в других областях физики, было сокращено до «брана». Оказалось, что такой подход к теориям с дополнительными измерениями позволяет дать решение проблемы иерархии взаимодействий.

Одним из первых вариантов решения этой проблемы стал подход с использованием «больших» дополнительных измерений, известный как ADD-

сценарий [16]. В этом подходе предполагается локализация полей материи на бране, то есть на четырехмерной гиперповерхности, погруженной в пространство-время большего числа измерений, что объясняет эффективную четырехмерность низкоэнергетической теории. Натяжение браны (плотность энергии браны) полагается равным нулю. Дополнительные измерения, которых в этом подходе может быть более одного, предполагаются компактными, но при этом имеют достаточно большой размер по сравнению с планковской длиной. Связь четырехмерной фундаментальной гравитационной массы Планка  $M_{Pl}$  с аналогичной многомерной массой  $M$  в случае  $n$  дополнительных измерений, образующих однородное компактное пространство объема  $V_n$ , описывается формулой

$$M_{Pl}^2 = M^{n+2} V_n,$$

где  $V_n = kL^n$ ,  $L$  – характерный «размер» дополнительного измерения, а  $k$  – зависящая от геометрии свернутого пространства константа порядка единицы. Очевидно, что при достаточно большом  $V_n$  (то есть при больших  $L$ ) величины  $M_{Pl}$  и  $M$  могут различаться на много порядков. Отличительной чертой этой модели является ее простота, а серьезным недостатком – пренебрежение гравитационным полем, порождаемым браной.

Модели с выделенными гиперповерхностями или бранами естественным образом возникают также в теории суперструн и М-теории [17,18]. Оказывается, что такие гиперповерхности могут обладать собственным натяжением – четырехмерной космологической константой на бране, отличной от космологической константы объемлющего пространства.

В более общих случаях многомерное действие, состоящее из суммы многомерной части (интеграла по всему многомерному пространству) и действия на бранах (четырёхмерных интегралов по бранам или границам) может содержать любые скалярные (псевдоскалярные) комбинации физических полей. При этом параметры в многомерном действии (массы, константы взаимодействий и т.д.)

могут отличаться от аналогичных параметров в действии на бранах. Сами же дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечный размер, а собственно бран может быть несколько. В тех случаях, когда имеется только одно дополнительное измерение, брана может разбивать многомерное пространство на несвязные части, в каждой из которых может быть своя космологическая константа, вакуумные конфигурации полей и/или другие параметры. Стоит также подчеркнуть, что различные феноменологические модели с бранами не обязательно должны быть следствием М-теории и удовлетворять ограничениям, из нее вытекающим.

Рассматриваются также модели с так называемыми «универсальными дополнительными измерениями» (Universal Extra Dimension, UED), в которых все или некоторые поля материи находятся не на бранах, а во всем многомерном пространстве (bulk), что делает их по духу близкими к теориям типа Калуцы-Клейна, расцвет которых пришелся на первую половину двадцатого века. Браны в таких моделях являются причиной существенной неоднородности самосогласованных решений многомерных уравнений движения гравитационного и материальных полей. Феноменологическим следствием таких моделей, как правило, являются тяжелые двойники частиц Стандартной модели [19]. Существование таких частиц активно обсуждается [20-22], и их поиски ведутся в экспериментах на LHC [23-28].

Одной из феноменологически наиболее интересных моделей с дополнительными измерениями пространства-времени является так называемая модель Рэндалл-Сундрума (RS-модель), предложенная в работе Л. Рэндалл и Р. Сундрума [29]. В отличие от ADD-сценария [16], где влиянием собственного ТЭИ браны на метрику многомерного пространства пренебрегается, и роль браны сводится к локализации полей материи, в RS-модели структура многомерного пространства-времени является результатом решения многомерных уравнений движения для гравитационного поля с учетом собственной гравитации двух бран, а возможность удержания на них материи фактически постулируется. В

последующих работах было выяснено, что такое решение не фиксирует расстояние между бранами, поэтому эта модель получила название нестабилизированная RS-модель. В ней натяжение бран предполагается различным, что приводит к неоднородности полученного решения по пятой координате, и, как следствие, к различному эффективному гравитационному взаимодействию на разных бранах. При этом возможна ситуация, когда многомерное гравитационное взаимодействие по порядку величины сравнимо с остальными (калибровочными) взаимодействиями, но на одной из бран эффективное четырехмерное гравитационное взаимодействие оказывается сильно подавлено за счет так называемого конформного фактора (warp factor), и именно таким образом эта модель решает проблему иерархии.

Дальнейший последовательный анализ RS-модели показал [30-32], что в ней присутствует КК-башня тензорных мод со спином 2, среди которых имеется одна безмассовая мода – гравитон. Взаимодействие тензорных мод с полями СМ на бранах имеет обычный вид свертки с тензором энергии-импульса (ТЭИ) материи, однако на одной из бран оно экспоненциально подавлено по сравнению с другой браной и гравитационным взаимодействием в «балке» (bulk). Кроме того, в модели имеется одна безмассовая скалярная мода (то есть мода со спином нуль), называемая радионом. Она взаимодействует со следом ТЭИ материи, причем константа взаимодействия имеет порядок пятимерного фундаментального масштаба.

Феноменология нестабилизированной RS-модели далека от реалистичности. Наличие в ней безмассового скалярного поля (поля радиона), достаточно сильно взаимодействующего с полями Стандартной модели, а также невозможность зафиксировать расстояние между бранами, делает ее нежизнеспособной. Для устранения этих недостатков были предложены различные механизмы. Один из них, предложенный в работе [33], предполагает введение в теорию дополнительного пятимерного скалярного поля (так называемое поле Гольдбергера-Вайза), которое стабилизирует расстояние между бранами, а также



приводит к появлению массы у безмассового скалярного поля радиона и возникновению калуца-клейновской башни массивных скалярных полей, самое легкое из которых, в принципе, может быть наблюдаемым. Позднее была предложена модель, в которой роль такого поля играет поле Хиггса [34]. Рассматривались также модели, в которых в балке распространялось безмассовое калибровочное поле, обладающее нетривиальными потенциалами на бранах (см., например, [35]). Таким образом, пятое измерение в обсуждаемой модели в некотором смысле становится «универсальным дополнительным измерением», напоминая UED-сценарий тем, что в «балке» распространяется не только гравитационное поле, но и другая материя, в данном случае поле Хиггса и калибровочные поля. В настоящей диссертации будет рассматриваться вариант стабилизированной RS-модели, предложенный в работах [36-38], в которой поля Стандартной модели локализованы на бране со слабым гравитационным взаимодействием, и благодаря специальному выбору потенциалов поля Гольдбергера-Вайза существует точное решение для фоновых (вакуумных) конфигураций метрики и скалярного поля.

### **Предмет и объект исследований**

Объектом исследования диссертации является расширение Стандартной модели с помощью пятимерной стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума, в которой поля Стандартной модели локализованы на бране со слабым гравитационным взаимодействием.

Предметом исследований являются физическая адекватность такого расширения Стандартной модели с точки зрения согласованности фонового решения с самодействием поля радиона и квантовыми поправками, а также его феноменологические следствия в секторе скалярных частиц.

### **Цели и задачи исследования**

Целью настоящей диссертации является изучение вида потенциала самодействия поля радиона, возникающего в стабилизированной модели Рэндалл-

Сундрума, и некоторых особенностей взаимодействия радиона с полями Стандартной модели в процессах рассеяния, а также влияния квантовых поправок на устойчивость фонового решения модели.

Для достижения поставленной цели были решены следующие основные задачи:

1. Вычислены аналитически амплитуды процессов с участием одиночного радиона и произвольного числа калибровочных бозонов, а также амплитуды ассоциативного рождения радиона с бозоном Хиггса и произвольным числом калибровочных бозонов, как в древесном приближении, так и при наличии фермионных петель;
2. Проведен сравнительный анализ полученных амплитуд процессов с участием радиона с амплитудами аналогичных процессов с участием бозона Хиггса и найдено подобие в поведении амплитуд процессов с участием этих частиц;
3. Найден эффективный четырехмерный лагранжиан самодействия радиона в полиномиальном приближении четвертой степени по полю радиона и второго порядка по константе связи;
4. Найден лагранжиан взаимодействия радиона с полями Стандартной модели во втором порядке по константе связи (второй степени по полю радиона);
5. Для скалярного поля в стабилизированной RS-модели вычислены квантовые вакуумные поправки, приводящие к эффекту Казимира. Получена оценка аналогичных квантовых поправок, возникающих за счет тензорных мод стабилизированной RS-модели;
6. Произведена оценка возможного влияния таких поправок на структуру фонового решения стабилизированной RS-модели.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. В выражениях для амплитуд древесных и петлевых процессов с радионом и произвольным числом фермионных и массивных векторных полей

- Стандартной модели в конечных состояниях имеет место точное сокращение вкладов, обусловленных взаимодействиями, содержащими радион, фермионы и ковариантные производные калибровочных полей СМ;
2. Амплитуды процессов с рождением радиона и амплитуды аналогичных процессов с рождением бозона Хиггса, несмотря на различие их лагранжианов взаимодействия с полями СМ, структурно идентичны с точностью до замены в соответствующих аналитических выражениях массы бозона Хиггса массой радиона, вакуумного среднего бозона Хиггса размерным параметром взаимодействия радиона, и перешкалирования константы самодействия бозона Хиггса некоторым фактором, зависящим от масс радиона и бозона Хиггса;
  3. Эффективный четырехмерный лагранжиан радиона в приближении четвертой степени по полю радиона и втором порядке по обратному размерному параметру взаимодействия радиона имеет нестандартный кинетический член и полиномиальный потенциал самодействия четвертой степени. Коэффициенты полиномиального разложения лагранжиана по полю радиона аналитически выражаются в виде интегралов и вычисляются приближенно с помощью разложения по трем малым безразмерным комбинациям параметров модели, а кинетический член радиона приводится к стандартному виду нелинейным преобразованием поля радиона;
  4. На классическом уровне у поля радиона не возникает ненулевого вакуумного среднего, то есть в вычисленном приближении истинный минимум потенциала находится в нуле;
  5. В стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума с двумя бранами эффект Казимира, вызванный наличием распространяющихся в балке между бранами гравитационного поля и поля радиона, не оказывает влияния на форму фонового решения системы уравнений Эйнштейна и уравнений движения для поля Гольдбергера-Вайза, то есть стабилизированная модель

Рэндалл-Сундрума устойчива по отношению к квантовым вакуумным поправкам, приводящим к эффекту Казимира.

### **Научная новизна**

1. Впервые получено доказательство, что бозон Хиггса и радион в ряде физически интересных процессов невозможно отличить на уровне амплитуд (с точностью до перешкалирования констант взаимодействия), несмотря на то, что они имеют разную структуру вершин взаимодействия;
2. Впервые получен лагранжиан самодействия радиона во втором порядке по константе связи и четвертой степени по полю радиона;
3. Впервые получен лагранжиан взаимодействия радиона с полями SM во втором порядке по константе связи и второй степени по полю радиона;
4. Впервые показано, что эффект Казимира, вызванный распространяющимися в балке полями, не приводит к разрушению фонового решения стабилизированной RS-модели.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов состоит в демонстрации сходства на уровне амплитуд процессов с участием радиона и бозона Хиггса. Причем такое сходство предсказывается как в древесном приближении, так и при наличии фермионных петель для многих процессов, интересных с точки зрения экспериментального изучения свойств обоих бозонов. Таким образом, настоящее исследование указывает на необходимость разработки дополнительных экспериментальных методов для различия вкладов этих бозонов в сечения процессов рассеяния при изучении их свойств и параметров взаимодействий.

### **Методология и методы исследования**

Основные результаты настоящего исследования были получены с помощью последовательного подхода, основанного на методах квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, и являются следствием строгих теоретических расчетов. При оценке эффекта Казимира в RS-модели в качестве

методов регуляризации использовались как размерная регуляризация, так и формула Абея-Плана для выделения поверхностных расходимостей. Численные расчеты производились с помощью пакета «Mathematica».

### **Достоверность и обоснованность результатов**

Научная достоверность результатов настоящего исследования определяется как их внутренней согласованностью и непротиворечивостью, так и строгостью применяемого математического аппарата, и использованием корректных теоретических методов, которые повсеместно применяются в теории поля и физике элементарных частиц и дают успешные теоретические предсказания. Результаты, полученные в настоящем исследовании для стабилизированной RS-модели, прошли тщательное сравнение с трудами научного сообщества по аналогичной тематике и совпадают с ними в специальных предельных случаях. Также численные значения параметров RS-модели, использованные в настоящем исследовании, согласованы с современными экспериментальными ограничениями и не противоречат им.

### **Личный вклад автора**

Представленные в настоящей работе результаты получены либо самим автором, либо при его определяющем участии. Во всех опубликованных работах вклад автора является основополагающим.

### **Апробация результатов**

По теме диссертации в научных изданиях, индексируемых в базах данных Scopus, Web of Science, автором опубликовано семь работ [39-45].

Результаты докладывались на семинарах отделов экспериментальной физики высоких энергий и теоретической физики высоких энергий НИИЯФ МГУ и следующих научных конференциях:

1. Международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий» (Москва, 17-21 ноября 2014);

2. Международная конференция по физике высоких энергий QFTNER 2015 (Самара, 24 июня - 1 июля 2015);
3. Международная сессия-конференция Секции ядерной физики Отделения физических наук РАН «Физика фундаментальных взаимодействий», (Дубна, 12-15 апреля 2016);
4. Ломоносовские чтения 2016, (Москва, НИИЯФ МГУ, 18-27 апреля 2016);
5. Международная конференция по физике высоких энергий «QUARKS-2016», (г. Пушкин, 29 мая - 4 июня 2016);
6. Международная конференция по физике высоких энергий и квантовой теории поля QFTNER 2019, (Сочи, 22-29 сентября 2019);
7. Ломоносовские чтения 2024 (Москва, НИИЯФ МГУ, 21 марта - 1 апреля 2024);
8. Научная сессия секции ядерной физики ОФН РАН, посвященная 300-летию Российской Академии Наук, (Дубна, 1-5 апреля 2024).

### **Объем и структура диссертации**

Диссертация состоит из Введения, четырех глав основного содержания, Заключения, трех приложений и списка литературы, содержащего 80 библиографических ссылок. Полный объем диссертации составляет 122 страницы, включая 11 рисунков.

Во **Введении** описаны актуальность и степень разработанности темы диссертации, сформулированы цели и задачи работы, приведены основные полученные результаты, выносимые на защиту, обоснована их научная новизна, практическая значимость и достоверность, кратко описаны методология исследования и апробация результатов, также приводится информация о структуре, объеме и содержании диссертации.

В **Главе 1** изложены основы нестабилизированной модели Рэндалл-Сундрума и стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума. В контексте темы настоящей диссертации обсуждаются свойства этих моделей, а также их возможные феноменологические следствия и экспериментальные проявления.

Демонстрируется возникновение различия между энергетическим масштабом эффективного четырехмерного гравитационного взаимодействия и характерным энергетическим масштабом Стандартной модели.

В **Главе 2** рассматриваются процессы взаимодействия радиона с полями Стандартной модели и изучается их сходство и различие с аналогичными процессами с участием бозона Хиггса.

В **Главе 3** построен эффективный четырехмерный лагранжиан радиона в полиномиальном приближении до четвертой степени по полю радиона включительно, и обсуждаются некоторые следствия из того, какие значения получены для параметров модели.

В **Главе 4** вычислена энергия Казимира в стабилизированной RS-модели и изучен вопрос ее устойчивости относительно квантовых поправок, приводящих к эффекту Казимира.

В **Заключении** кратко сформулированы основные результаты работы.

## Глава 1. Модель Рэндалл-Сундрума и решение проблемы иерархии

### 1.1 Модель Рэндалл-Сундрума

В 1999 г. была опубликована основополагающая работа [29] Лизы Рэндалл и Рамана Сундрума, в которой было предложено новое решение проблемы иерархии. Модель Рэндалл-Сундрума (RS-модель) можно кратко описать следующим образом: рассматривается пятимерное пространство-время (метрика которого является решением уравнений Эйнштейна), ограниченное двумя четырехмерными гиперповерхностями – бранами, на одной из которых сосредоточены поля Стандартной модели, то есть наша наблюдаемая Вселенная. Таким образом, в RS-модели пятое (дополнительное) измерение фактически представляет собой отрезок, а параметризующая его координата  $x^4 \equiv y$  изменяется от 0 до  $L$ . Браны имеют равные по модулю и противоположные по знаку собственные натяжения, обозначаемые соответственно  $\lambda_0$  и  $\lambda_L$ . Пятимерная масса Планка  $M$  согласно современным экспериментальным ограничениям может составлять порядка 5 ТэВ. Решение многомерных уравнений движения для метрики содержит зависящий от пятой координаты конформный фактор (англ. «warp-фактор»), экспоненциально убывающий в пространстве между бранами (в англоязычной литературе такое пространство именуется специальным термином «bulk», в отечественной научной литературе значительно реже используется русскоязычная калька «балк», далее будут использоваться оба термина. Благодаря конформному фактору четырехмерное гравитационное взаимодействие на бране с полями СМ оказывается сильно подавленным, другими словами, четырехмерная масса Планка  $M_{Pl}$  становится очень большой. Кроме того, в RS-модели возникает эффективное четырехмерное скалярное поле с нулевой массой, взаимодействующее со следом тензора энергии-импульса (ТЭИ) полей СМ с размерной константой порядка пятимерной массы Планка  $M$ . Такое поле до настоящего времени не наблюдалось экспериментально. Последнее обстоятельство, а также некоторые другие особенности, делают рассматриваемую модель нереалистичной. Тем не менее,



здесь заметим, что ее простая модификация – стабилизированная модель Рэндалл-Сундрума – позволяет построить теорию с реалистичной феноменологией, в которой при этом отсутствует проблема иерархии. Стабилизированная RS-модель будет подробно рассмотрена в следующем разделе настоящей главы, а ниже продолжим более детальное рассмотрение собственно модели Рэндалл-Сундрума.

Поскольку пятое измерение в RS-модели представляет собой отрезок, то для корректного описания динамики физической системы необходимо задать граничные условия в его крайних точках. Однако при такой топологии возможен и несколько иной подход к заданию граничных условий: дополним отрезок до окружности и наложим на поля и метрику подходящие периодические условия. А именно: будем полагать, что координата  $y$  пробегает значения от  $-L$  до  $L$  и при этом точки  $\{x, -y\}$  и  $\{x, y\}$  отождествлены. Таким образом, пятое измерение в данном случае представляет собой так называемый орбифолд  $S^1/Z_2$ , а симметрии компонент метрики (единственного поля, распространяющегося в «балке») выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}(x, -y) &= g_{\mu\nu}(x, y), \\
 g_{4\nu}(x, -y) &= -g_{4\nu}(x, y), \\
 g_{44}(x, -y) &= g_{44}(x, y), \\
 g_{\mu\nu}(x, L-y) &= g_{\mu\nu}(x, L+y), \\
 g_{4\nu}(x, L-y) &= -g_{4\nu}(x, L+y), \\
 g_{44}(x, L-y) &= g_{44}(x, L+y).
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

В случае, когда можно пренебречь динамическим вкладом полей СМ, пятимерное действие модели Рэндалл-Сундрума можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2, \text{ где} \\
 S_1 &= \int_{\tilde{X}_4} \int_{-L}^L 2M^3 (R - \Lambda) \sqrt{-g} d^5x, \\
 S_2 &= \int_{\tilde{X}_4} \int_{-L}^L \left[ \lambda_0 \delta(y) + \lambda_L \delta(y-L) \right] \sqrt{-\tilde{g}} d^5x,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где  $R$  – пятимерная скалярная кривизна, отвечающая метрике  $G_{AB}$ ,  $\Lambda$  – пятимерная космологическая константа, а  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$  – метрический тензор, индуцированный на четырехмерных гиперповерхностях, задаваемых уравнением  $y = const$ .

Уравнения движения являются уравнениями Эйлера-Лагранжа для функционала действия (1.2) и могут быть получены посредством его вариации по метрическому тензору пятимерного пространства-времени  $g_{AB}$ :

$$R_{AB} - \frac{1}{2}(R - \Lambda)g_{AB} + \frac{1}{2M^3}[\lambda_0\delta(y) + \lambda_L\delta(y-L)]\tilde{g}_{\mu\nu}\delta_A^\mu\delta_B^\nu = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) имеет решение, инвариантное относительно преобразований из группы Пуанкаре для четырехмерных координат  $x^\mu$ :

$$g_{AB} = \gamma_{AB}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = e^{C-2k|y|_Z}\eta_{\alpha\beta}, \quad \gamma_{\alpha 4} = 0, \quad \gamma_{44} = -1, \quad (1.4)$$

где  $\eta_{\alpha\beta}$  – метрический тензор Минковского,  $C$  и  $k$  – некоторые константы, а под  $|y|_Z$  подразумевается функция, обладающая симметрией орбифлекса, то есть равная абсолютному значению  $y$  при  $-L < y < L$  и имеющая зеркальную симметрию в точках  $nL$ ,  $n \in Z$ . Известно (см., например, [32, 36, 37]), что между константой  $k$  и параметрами  $M$ ,  $\Lambda$ ,  $\lambda_0$  и  $\lambda_L$  имеют место следующие соотношения

$$k = \sqrt{-\frac{\Lambda}{12}}, \quad \lambda_0 = -\lambda_L = 24M^3\sqrt{-\frac{\Lambda}{12}}. \quad (1.5)$$

Константа  $C$  является постоянной интегрирования и определяется из следующих соображений. Метрика, индуцированная на гиперповерхностях  $y = const$ , имеет вид

$$ds^2 = e^{C-2k|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (1.6)$$

Фактически выбор той или иной константы  $C$  эквивалентен выбору некоторого масштаба для координат  $x^\mu$ . Каноническая нормировка полей материи предполагает, что их лагранжиан записан в галлиевых координатах, то есть

метрика имеет вид  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ . Таким образом, если предположить, что материя сосредоточена исключительно на бране с координатой  $y=0$ , следует выбрать константу  $C=0$ . Однако, если материя локализована на второй бране, имеющей координату  $y=L$ , то константу  $C$  нужно выбирать следующим образом:

$$C = 2kL.$$

Далее решение (1.4) считается фоновым и рассматриваются малые флуктуации метрики над ним<sup>2</sup>. Параметризуем метрику следующим образом:

$$g_{AB} = \gamma_{AB} + \kappa h_{AB}, \quad \text{где } \kappa \equiv \frac{1}{\sqrt{2M^3}}. \quad (1.7)$$

В работе [32] показано, что лагранжиан нулевого порядка по  $\kappa$  (то есть квадратичный по  $h$ ), получаемый после подстановки (1.6) в (1.2), после некоторых преобразований можно привести к виду:

$$\begin{aligned} L_h = & -\frac{1}{4} \nabla_M h_{PQ} \nabla^K h^{PQ} - \frac{1}{4} \nabla_M h \nabla^M h + \\ & + \frac{1}{2} \nabla_M h^{MP} \nabla_P h - \frac{1}{2} \nabla_M h^{MP} \nabla^Q h_{PQ} + \frac{k^2}{2} (h_{PQ} h^{PQ} + h^2) + \\ & + \left[ -2kh_{PQ} h^{PQ} + kh\tilde{h} - kh_{P\nu} h^{P\nu} + 3k \left( h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{h}^2 \right) \right] [\delta(y) - \delta(y-L)], \end{aligned} \quad (1.8)$$

где ковариантная производная  $\nabla_P$  берется по фоновой метрике  $\gamma$ , подъем и опускание индексов также производится с помощью фоновой метрики  $\gamma$ , а  $h$  и  $\tilde{h}$  есть свертки вида

$$h \equiv h_{PQ} \gamma^{PQ}, \quad \tilde{h} \equiv h_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

В работе [32] также показано, что действие с лагранжианом (1.8) инвариантно относительно калибровочных преобразований, которые позволяют наложить на  $h$  дополнительные условия

$$h_{4\nu} = 0, \quad h_{44}(x, y) = N_r r(x), \quad (1.10)$$

<sup>2</sup> Здесь и далее построение эффективной четырехмерной модели в основном следует работам [31,32]

где  $N_r$  – некоторая нормировочная константа. Кроме того, представив компоненты  $h_{\mu\nu}$  в виде

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + (k|y|_Z - c)\gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2k^2} \left( k|y|_Z - c + \frac{1}{2} + \frac{c}{2} e^{-2k|y|_Z} \right) \partial_\mu \partial_\nu r, \quad (1.11)$$

$$c \equiv \frac{kL}{e^{2kL} - 1}, \quad (1.12)$$

также можно наложить на величины  $b_{\mu\nu}$  калибровочные условия вида

$$\eta^{\mu\nu} b_{\mu\nu} \equiv b = 0, \quad \gamma^{\mu\nu} b_{\mu\nu} \equiv \tilde{b} = 0, \quad (1.13)$$

$$\partial^\mu b_{\mu\nu} = 0. \quad (1.14)$$

В такой калибровке компоненты уравнений движения с индексами  $4\nu$  превращаются в тождества, а компоненты с индексами  $\mu\nu$  и  $44$  приобретают, соответственно, вид

$$\frac{1}{2} e^{-2k|y|_Z} \square b_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b_{\mu\nu}}{\partial y^2} - 2k^2 b_{\mu\nu} + 2k [\delta(y) - \delta(y-L)] b_{\mu\nu} = 0, \quad (1.15)$$

$$\square r = 0, \quad (1.16)$$

где  $\square$  – четырехмерный оператор д'Аламбера, построенный с помощью плоской метрики  $\eta_{\mu\nu}$ .

Уравнение (1.16) означает, что в рассматриваемой модели после проведения процедуры размерной редукции появляется одно безмассовое скалярное поле. Тяжелых скалярных мод (КК-башни скалярных полей) при этом не возникает.

Уравнение (1.15) решается методом разделения переменных. Представив пятимерное поле  $b_{\mu\nu}(x, y)$  в виде разложения по базису из волновых функций тензорных мод  $\Omega_n(y)$

$$b_{\mu\nu}(x, y) = \sum_n b_{\mu\nu}^n(x) \Omega_n(y), \quad (1.17)$$

получим уравнения на моды  $b_{\mu\nu}^n(x)$  и их волновые функции  $\Omega_n(y)$

$$\square b_{\mu\nu}^n + m_n^2 b_{\mu\nu}^n = 0, \quad (1.18)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2k [\delta(y) - \delta(y-L)] - 2k^2 + \frac{m_n^2}{2} e^{2k|y|} \right\} \Omega_n(y) = 0. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.19) имеет простое решение при  $m_n = 0$ :

$$\Omega_0 = N_0 e^{-2k|y|}, \quad (1.20)$$

где  $N_0$  – константа, которую можно определить из условия нормировки, потребовав, чтобы кинетический член имел канонический вид. Решения с  $m_n \neq 0$  можно выразить с помощью линейной комбинации функций Бесселя и Неймана

$$\Omega_n(y) = a_n J_2 \left( \frac{m_n}{k} e^{k|y|} \right) + b_n Y_2 \left( \frac{m_n}{k} e^{k|y|} \right). \quad (1.21)$$

Условия симметрии в точках  $y=0$  и  $y=L$  дают нам соотношение между параметрами  $a$  и  $b$ , а также связь между  $m_n$  и нулями линейной комбинации

$$Y_1 \left( \frac{m_n}{k} \right) J_1 \left( \frac{m_n}{k} e^{kL} \right) - J_1 \left( \frac{m_n}{k} \right) Y_1 \left( \frac{m_n}{k} e^{kL} \right) = 0. \quad (1.22)$$

А именно, представив  $m_n$  в виде

$$m_n = \beta_n k e^{-kL}, \quad (1.23)$$

и, учитывая, что  $e^{-kL}$  – малая величина (во многих работах по рассматриваемой тематике  $kL$  полагается равной примерно  $30 \div 35$ , см., например, [36]), произведем в (1.22) разложение по малому аргументу. Тогда для  $\beta_n$  получим приближенное уравнение

$$J_1(\beta_n) \approx 0. \quad (1.24)$$

Условие нормировки кинетических членов полей дает второе соотношение для параметров  $a$  и  $b$ . В итоге для волновых функций и нормировочных констант получаем следующие выражения:

$$\Omega_n(y) = N_n \left[ Y_1(\beta_n k e^{-kL}) J_2(\beta_n k e^{k|y| - kL}) - J_1(\beta_n k e^{-kL}) Y_2(\beta_n k e^{k|y| - kL}) \right], \quad (1.25)$$

$$N_0 = \sqrt{\frac{k}{1-e^{-2kL}}}, \quad N_r = \sqrt{\frac{e^{2kL}-1}{3kL^2}} \quad (1.26)$$

$$N_n = \sqrt{\frac{k}{e^{2kL}f(\beta_n)^2 - f(\beta_n e^{-kL})^2}}, \quad f(x) \equiv Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right)J_2(x) - J_1\left(\frac{m_n}{k}\right)Y_2(x). \quad (1.27)$$

После интегрирования по пятой координате  $y$  эффективное четырехмерное действие в квадратичном приближении по  $b$  и  $r$  приобретает вид

$$S_{eff} = \int_{X_4} d^4x \left\{ -\frac{1}{2} e^C \eta^{\lambda\tau} \partial_\lambda r \partial_\tau r - \right. \\ \left. -\frac{1}{4} \sum_n \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \left[ e^{-C} \eta^{\lambda\tau} (\partial_\lambda b_{\alpha\mu}^n) (\partial_\tau b_{\beta\nu}^n) + m_n^2 b_{\alpha\mu}^n b_{\beta\nu}^n \right] \right\}. \quad (1.28)$$

Теперь учтем тот факт, что в рассматриваемой модели материя может находиться только на бранах. Взаимодействие флуктуаций метрики с полями материи имеет стандартный вид

$$S_{int} = \frac{\kappa}{2} \int_{X_4} h^{\mu\nu}(x,0) T_{\mu\nu}^0 \sqrt{-\gamma_0} d^4x + \frac{\kappa}{2} \int_{X_4, y=L} h^{\mu\nu}(x,L) T_{\mu\nu}^L \sqrt{-\gamma_L} d^4x, \quad (1.29)$$

где  $\gamma_{0,L}$  – определитель соответствующей фоновой метрики, а  $T_{\mu\nu}^{0,L}$  – тензор энергии-импульса (ТЭИ) материи на бранах в точках  $y=0$  и  $y=L$  соответственно.

Рассмотрим первую брану. Положим константу  $C$  равной нулю, что соответствует выбору галилеевых координат на первой бране, расположенной в точке  $y=0$  [31], [32]. Подставив в (1.29) выражения (1.11) и (1.17), получаем для первого слагаемого в (1.29), описывающего действие для браны, расположенной в точке  $y=0$ , следующее выражение

$$S_{int0} = \frac{1}{2} \int_{X_4} \left[ \kappa_0 b^{0\mu\nu} T_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n b^{n\mu\nu} T_{\mu\nu} - \kappa_r r T_\mu^\mu \right] d^4x, \quad (1.30)$$

где

$$\kappa_0 \equiv N_0 \kappa, \quad \kappa_n \equiv \Omega_n(0) \kappa \approx \frac{e^{-kL}}{|J_2(\beta_n)|} N_0 \kappa, \quad (1.31)$$

$$\kappa_r \equiv \frac{e^{-kL}}{\sqrt{3}} N_0 \kappa. \quad (1.32)$$

Отождествим теперь безмассовую тензорную моду  $b_{\mu\nu}^0$  с гравитоном, и предположим, что наша Вселенная находится именно на первой бране. Тогда, чтобы получить на ней наблюдаемую гравитационную постоянную (постоянную Ньютона), константа  $\kappa_0$  должна быть выбрана равной  $1/\sqrt{2M_{Pl}^2}$ , и таким образом получаем связь между фундаментальной пятимерной массой  $M$  и эффективной четырехмерной массой Планка

$$M_{Pl}^2 = \frac{1 - e^{-2kL}}{k} M^3. \quad (1.33)$$

Как видим, при  $k \sim M$  величины  $M_{Pl}$  и  $M$  должны быть также одного порядка. Кроме того, масштабы взаимодействия безмассового скаляра и массивных тензорных мод с полями материи на этой бране подавлены фактором  $\exp(-kL)$  по сравнению с гравитационным. Такой вариант хоть и возможен, но не является удовлетворительным, поскольку не позволяет решить проблему иерархии.

Рассмотрим теперь вторую брану, расположенную в точке с координатой  $y=L$ . Положим константу  $C$  равной  $2kL$ , что соответствует выбору галилеевых координат на этой бране. После этого переопределим поля и массы тензорных мод следующим образом:

$$r = e^{-kL} r', \quad b_{\alpha\beta}^n = e^{kL} b_{\alpha\beta}^n, \quad m_n = e^{-kL} m'_n.$$

Это сделано для того, чтобы привести кинетические члены полей в действии (1.28) к каноническому виду. В новых координатах второе слагаемое в формуле (1.29), описывающее действие для второй браны, приобретает вид

$$S_{\text{int}L} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{X}_4} \left[ \kappa'_0 b'^{0\mu\nu} T_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa'_n b'^{n\mu\nu} T_{\mu\nu} - \kappa'_r r' T_{\mu}^{\mu} \right] d^4x, \quad (1.34)$$

где

$$\begin{aligned}\kappa'_0 &= e^{-kL} N_0 \kappa, \\ \kappa'_n &= e^{kL} \Omega_n(L) \kappa \approx -N_0 \kappa,\end{aligned}\tag{1.35}$$

$$\kappa'_r = \frac{1}{\sqrt{3}} N_0 \kappa.\tag{1.36}$$

Как это было сделано ранее в случае с первой браной, отождествим безмассовую тензорную моду  $b_{\mu\nu}^0$  с гравитоном и предположим, что наша Вселенная находится теперь на второй бране. Потребовав, чтобы гравитационная постоянная на ней совпадала с экспериментально наблюдаемой, получим, что на второй бране связь между фундаментальным пятимерным масштабом  $M$  и эффективным четырехмерным масштабом  $M_{Pl}$  имеет вид

$$M_{Pl}^2 = \frac{e^{2kL} - 1}{k} M^3\tag{1.37}$$

В этом случае при  $k \sim M$  величина  $M_{Pl}$  оказывается примерно в  $e^{kL}$  раз больше величины  $M$ . Таким образом, если выполняется условие  $kL \sim 30 \div 35$ , то наблюдаемое чрезвычайно слабое гравитационное взаимодействие возникает при значении фундаментального пятимерного масштаба  $M$  порядка нескольких ТэВ. При этом величины  $\kappa'_n$  и  $\kappa'_r$  при этих же предположениях оказываются порядка  $M^{-1}$ , то есть порядка ТэВ<sup>-1</sup>. Массы тензорных мод  $m'_n = \beta_n k$  также будут лежать в диапазоне порядка нескольких ТэВ. Отметим еще, что в работах [46, 47] рассматривался сценарий, когда параметр  $k$  много меньше многомерного фундаментального масштаба  $M$ . Такой подход приводит к существенно иной феноменологии и здесь не рассматривается.

Таким образом, в нестабилизированной модели Рэндалл-Сундрума иерархия между калибровочным и гравитационным масштабами взаимодействий возникает естественным образом. Тем не менее, такая модель не может считаться физически адекватной, поскольку возникающая в ней четырехмерная скалярная мода – радион, которая описывает относительное движение бран [30], является безмассовой. Действительно, легко показать, что



$$\int_0^L ds = \int_0^L \sqrt{g_{44}} dy \approx \left(1 + \frac{r}{\sqrt{8M}}\right) L. \quad (1.38)$$

Из этого соотношения очевидно, что радион  $r$  определяет физическое расстояние между бранами. Но отсутствие у радиона массы приводит к тому, что, по крайней мере в низшем порядке, система должна быть неустойчивой относительно малых флуктуаций, то есть, другими словами, расстояние между бранами оказывается нефиксированным. Этот факт, а также то обстоятельство, что безмассовое поле, взаимодействующее с полями СМ на ТэВном масштабе, было бы уже обнаружено экспериментально, делает данную модель феноменологически неприемлемой.

## 1.2 Стабилизированная модель с дополнительным скалярным полем

Указанных выше недостатков лишена так называемая стабилизированная модель мира на бране (стабилизированная RS-модель) [33, 34, 36-38]. В ней, как и в нестабилизированной модели Рэндалл-Сундрума, пространство-время имеет пять измерений, причем топологически пятое измерение представляет собой орбифолд. В «балке» между двумя бранами, расположенными в точках 0 и  $L$ , помимо гравитационного поля распространяется также скалярное поле  $\phi$ , минимальным образом взаимодействующее с гравитационным полем и обладающее некоторым пятимерным потенциалом самодействия, а также различными четырехмерными потенциалами на бранах. На бране, расположенной в точке  $y=L$ , локализованы поля Стандартной модели. Пятимерное действие такой модели имеет вид

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2, \\ S_1 &= \int_{x_4=-L}^L \int \left( 2M^3 R - \frac{1}{2} g^{PQ} \partial_P \phi \partial_Q \phi - V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^5 x, \\ S_2 &= \int_{x_4=-L}^L \int \left[ -\lambda_0(\phi) \delta(y) + (L_{SM} - \lambda_L(\phi)) \delta(y-L) \right] \sqrt{-\tilde{g}} d^5 x, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где  $V(\phi)$  – пятимерный потенциал скалярного поля,  $\lambda_0(\phi)$  и  $\lambda_L(\phi)$  – дополнительные потенциалы скалярного поля на бранах,  $L_{SM}$  – лагранжиан полей Стандартной модели. Для гравитационного поля учет симметрии орбифолда, как и

в случае нестабилизированной модели Рэндалл-Сундрума, налагает условия вида (1.1), а для скалярного поля – условие

$$\phi(x, -y) = \phi(x, y). \quad (1.40)$$

Из действия (1.39) получаются следующие уравнения движения:

$$-\frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{AB}} = G_{AB} - \kappa^2 T_{AB} = 0, \quad (1.41)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi} = \square \phi - \frac{dV}{d\phi} - \left[ \frac{d\lambda_0}{d\phi} \delta(y) + \frac{d\lambda_L}{d\phi} \delta(y-L) \right] = 0, \quad (1.42)$$

где  $G_{AB}$  есть пятимерный тензор Эйнштейна, а  $T_{AB}$  – тензор энергии-импульса скалярного поля, определяемый следующим образом:

$$T_{AB} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{AB}} = \partial_A \phi \partial_B \phi - g_{AB} \left( \frac{1}{2} g^{PQ} \partial_P \phi \partial_Q \phi - V(\phi) \right) + [\lambda_0(\phi) \delta(y) + \lambda_L(\phi) \delta(y-L)] g_{\mu\nu} \delta_A^\mu \delta_B^\nu. \quad (1.43)$$

В работах [36] и [37] показано, что фоновые решения уравнений (1.41), (1.42) с тензором энергии-импульса (1.43) следует искать в виде

$$g_{\mu\nu}(x, y) \equiv \bar{g}_{\mu\nu}(y) = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu}, \quad g_{4\mu} = 0, \quad g_{44} = -1, \quad \phi(x, y) = \bar{\phi}(y). \quad (1.44)$$

В этом случае для функций  $A(y)$ ,  $\bar{\phi}(y)$  получаются следующие уравнения:

$$\frac{dV(\bar{\phi})}{d\bar{\phi}} + \frac{d\lambda_0}{d\bar{\phi}} \delta(y) + \frac{d\lambda_L}{d\bar{\phi}} \delta(y-L) = -4A' \bar{\phi}' + \bar{\phi}'', \quad (1.45)$$

$$12M^3 (A')^2 + \frac{1}{2} (V - \frac{1}{2} (\bar{\phi}')^2) = 0, \quad (1.46)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} (\bar{\phi}')^2 + V(\bar{\phi}) + \lambda_0 \delta(y) + \lambda_L \delta(y-L) \right) = -2M^3 (-3A'' + 6(A')^2), \quad (1.47)$$

В работе [37] также показано, что при определенном выборе потенциалов фоновые решения для функций  $A(y)$ ,  $\bar{\phi}(y)$  имеют вид

$$\bar{\phi}(y) = \phi_0 e^{-2u|y|/z}, \quad (1.48)$$

$$A(y) = k|y|_Z + \frac{\phi_0^2}{48M^3} e^{-2u|y|_Z} - \left( kL + \frac{\phi_0^2}{48M^3} e^{-2uL} \right). \quad (1.49)$$

В формуле (1.49) слагаемое в круглых скобках есть просто константа интегрирования, которая сразу выбрана таким образом, чтобы четырехмерные координаты  $x^\mu$  на бране, расположенной в точке  $y=L$ , были галилеевыми. Фигурирующие в решении, заданном формулами (1.44), (1.48), (1.49), константы  $k$ ,  $u$  и  $\phi_0$  однозначно выражаются через параметры потенциалов  $V$ ,  $\lambda_0$  и  $\lambda_L$ , однако для дальнейших построений удобнее выразить потенциалы через эти константы:

$$V(\phi) = -24M^3k^2 + \frac{(u+4k)u}{2}\phi^2 - \frac{u^2}{24M^3}\phi^4, \quad (1.50)$$

$$\lambda_0 = 24M^3k - u\phi_0^2 - 2u\phi_0(\phi - \phi_0) + \beta_0^2(\phi - \phi_0)^2, \quad (1.51)$$

$$\lambda_L = 24M^3k - u\phi_L^2 - 2u\phi_L(\phi - \phi_L) + \beta_L^2(\phi - \phi_L)^2, \quad \text{где } \phi_L \equiv \phi_0 e^{-uL}. \quad (1.52)$$

Полагая теперь, что решение (1.44), (1.48), (1.49) является фоновым, рассмотрим малые флуктуации  $h_{AB}(x, y)$  и  $f(x, y)$  гравитационного и скалярного полей соответственно над таким фоном. Запишем гравитационное и скалярное поля в низшем порядке по пятимерной гравитационной константе связи  $\kappa$  в виде следующего разложения:

$$g_{AB}(x, y) = \bar{g}_{AB}(y) + \kappa h_{AB}(x, y), \quad (1.53)$$

$$\phi(x, y) = \bar{\phi}(y) + \kappa f(x, y). \quad (1.54)$$

В работе [37] приводится квадратичный по малым флуктуациям  $h$  и  $f$  лагранжиан, а также следующие из него уравнения движения. Кроме того, в [37] показано, что существует такая калибровка, в которой уравнения движения расцепляются, так что в итоге получаются независимые уравнения для тензорных, векторных и скалярных компонент, причем тензорные и скалярные компоненты являются физическими степенями свободы, а векторные могут быть обращены в нуль, то есть являются чистой калибровкой. В такой калибровке поля можно представить в следующем виде:

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\varphi, \quad h_{44} = e^{2A}\varphi, \quad h_{4\mu} = 0, \quad f = \frac{3}{2}\frac{e^{2A}}{\kappa^2\bar{\phi}'}\varphi', \quad (1.55)$$

где тензорное поле  $b_{\mu\nu}$  – поперечно-бесследовое, а штрих здесь означает производную по пятой координате  $y$ . Уравнения для тензорного поля  $b_{\mu\nu}$  и скалярного поля  $\varphi$  имеют следующий вид:

$$\frac{1}{2}(\square b_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}'' - (2A'^2 - A'')b_{\mu\nu}) = 0, \quad (1.56)$$

$$\varphi'' + 2\left(A' - \frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}'}\right)\varphi' - \frac{\kappa^2\bar{\phi}'^2}{3}\varphi - \square\varphi = 0. \quad (1.57)$$

Разлагая поля  $b_{\mu\nu}(x^\mu, y)$  и  $\varphi(x^\mu, y)$  по базисам из волновых функций  $\Omega_n(y)$  и  $\Psi_n(y)$  соответственно, получаем так называемые башни Калуцы-Клейна:

$$b_{\mu\nu}(x^\mu, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\mu\nu}^n(x^\mu)\Omega_n(y), \quad (1.58)$$

$$\varphi(x^\mu, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x^\mu)\Psi_n(y). \quad (1.59)$$

В разложении (1.58) суммирование начинается с  $n=0$ , чтобы подчеркнуть наличие нулевой (безмассовой) моды с  $\Omega_0 = N_0 e^{-2A}$  (под  $N_0$ , как и выше, подразумевается нормировочный множитель). Видно, что слагаемое с нулевой модой  $b_{\mu\nu}^0\Omega_0 = b_{\mu\nu}^0 N_0 e^{-2A}$  имеет ту же структуру, что и фоновая метрика  $\bar{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} e^{-2A}$ , поэтому можно объединить эти два слагаемых, что эквивалентно переходу от плоского четырехмерного фона к искривленному. В главе 3 будет показано, что эффективное четырехмерное действие, описывающее этот фон, в точности совпадает с четырехмерной скалярной кривизной, поэтому эффективная четырехмерная гравитация в стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума совпадает с гравитацией общей теории относительности.

Несмотря на то, что все скалярные моды являются массивными, самая легкая из них может иметь массу порядка энергетического масштаба Стандартной модели

(то есть намного меньшую по сравнению с массами остальных мод). Уравнение для волновых функций скалярных мод  $\Psi_n$  имеет вид

$$\left(\frac{e^{2A}}{\bar{\phi}'^2}\Psi_n'\right)' - \frac{\kappa^2 e^{2A}}{3}\Psi_n + \mu_n^2 \frac{e^{4A}}{\bar{\phi}'^2} \left(1 + \frac{2}{\beta_1^2 + u}\delta(y) + \frac{2}{\beta_2^2 - u}\delta(y-L)\right)\Psi_n = 0. \quad (1.60)$$

Решения уравнения (1.60) – функции  $\Psi_n(y)$  – образуют полную ортогональную систему, которую можно нормировать следующим образом:

$$\frac{9\mu_n^2}{4\kappa^2} \int_{-L}^L dy \frac{e^{4A}}{\bar{\phi}'^2} \left(1 + \frac{2}{\beta_1^2 + u}\delta(y) + \frac{2}{\beta_2^2 - u}\delta(y-L)\right)\Psi_n \Psi_m = \delta_{nm} \quad (1.61)$$

В приближении малых  $uL$  (например, в третьей главе настоящей диссертации рассматривается ситуация, когда  $uL \sim 0.1$ ) в выражениях (1.48) и (1.49) для величин  $A(y)$  и  $\bar{\phi}(y)$  можно разложить в ряд экспоненты  $e^{-2u|y|_Z}$  и  $e^{-2uL}$ , сохранив в разложении только линейные по  $|y|_Z$  и  $L$  члены:

$$A(y) \approx \tilde{k}(|y|_Z - L), \quad \bar{\phi}(y) \approx \phi_0(1 - u|y|_Z), \quad \text{где } \tilde{k} \equiv k - \frac{u}{12}\kappa^2\phi_0^2. \quad (1.62)$$

Для волновых функций тензорных мод  $\Omega_n$  после такого разложения получается уравнение аналогичное уравнению (1.19) в нестабилизированной RS-модели, в котором символ  $k$  заменен символом  $\tilde{k}$ :

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\tilde{k}[\delta(y) - \delta(y-L)] - 2\tilde{k}^2 + \frac{m_n^2}{2}e^{2\tilde{k}|y|}\right\}\Omega_n = 0. \quad (1.63)$$

Чтобы получить уравнение для волновых функций скалярных мод  $\Psi_n$ , подставим приближенные выражения (1.62) для величин  $A(y)$  и  $\bar{\phi}(y)$  в уравнение (1.60) и перейдем к переменной  $z = \frac{\mu}{\tilde{k}}e^{-\tilde{k}(L-y)}$ . В результате получим на интервале  $z \in (\mu e^{-\tilde{k}L}/\tilde{k}, \mu/\tilde{k})$  уравнение вида

$$\frac{d^2\Psi_n}{dz^2} + \left(3 + \frac{2u}{\tilde{k}}\right)\frac{1}{z}\frac{d\Psi_n}{dz} + \left(1 - \frac{b^2}{z^2}\right)\Psi_n = 0, \quad \text{где } b^2 \equiv \frac{\kappa^2\phi_0^2}{3}\frac{u^2}{\tilde{k}^2}. \quad (1.64)$$

Условия симметрии на концах интервала  $z \in \left( \frac{\mu}{\tilde{k}} e^{-\tilde{k}L}, \frac{\mu}{\tilde{k}} \right)$ , то есть в точках расположения бран  $y=0$  и  $y=L$ , дают нам граничные условия, которым должны подчиняться решения уравнения (1.64)

$$\begin{aligned} \left( \tilde{k}z^2 \Psi_n + (\beta_0^2 + u) z \frac{d\Psi_n}{dz} \right) \Big|_{z=\frac{\mu_n}{\tilde{k}} e^{-\tilde{k}L}} &= 0, \\ \left( \tilde{k}z^2 \Psi_n - (\beta_L^2 - u) z \frac{d\Psi_n}{dz} \right) \Big|_{z=\frac{\mu_n}{\tilde{k}}} &= 0, \end{aligned} \quad (1.65)$$

При этом само решение уравнения (1.64) может быть выражено через линейную комбинацию функций Бесселя:

$$\Psi_n = z^{-1-u/\tilde{k}} \left( B_n J_\alpha(z) + C_n J_{-\alpha}(z) \right), \quad \text{где } \alpha = \sqrt{\left(1 + u/\tilde{k}\right)^2 + b^2}. \quad (1.66)$$

Если теперь предположить, что фундаментальный пятимерный параметр  $M$  имеет величину порядка нескольких ТэВ, то, как и в нестабилизированной RS-модели, получим наблюдаемую эффективную четырехмерную константу гравитационного взаимодействия при условии, что  $\tilde{k} \sim M$  и  $\tilde{k}L \sim 35$ . Поэтому, в силу того, что  $\mu/\tilde{k} \ll e^{\tilde{k}L} \sim 10^{15}$ , первое граничное условие из системы (1.65) дает нам соотношение

$$\begin{aligned} C_n &\approx \frac{\alpha - 1 - u/\tilde{k}}{\alpha + 1 + u/\tilde{k}} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\Gamma(1+\alpha)} \left( \frac{\mu_n}{2\tilde{k}} e^{-\tilde{k}L} \right)^{2\alpha} B_n \sim \\ &\sim 4 \times 10^{-31} e^{-70(\alpha-1)} \frac{\alpha - 1 - u/\tilde{k}}{\alpha + 1 + u/\tilde{k}} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\Gamma(1+\alpha)} \left( \frac{\mu_n}{2\tilde{k}} \right)^{2\alpha} B_n \end{aligned} \quad (1.67)$$

Из формулы (1.67) видно, что константы  $C_n$  сильно подавлены по сравнению с константами  $B_n$ , поэтому вкладом второго слагаемого в формуле (1.66) можно пренебречь. Действительно, даже на правой границе интервала, где  $J_{-\alpha}$  растет как  $z^{-\alpha}$ , для функций  $\Psi_n$  можно записать приближенное выражение

$$\Psi_n \approx B_n \frac{z^{\alpha-1-u/\tilde{k}}}{2^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-2\alpha\tilde{k}L} \frac{\alpha-1-u/\tilde{k}}{\alpha+1+u/\tilde{k}} \right] \quad (1.68)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках в формуле (1.68) есть вклад от  $C_n J_{-\alpha}$ . Очевидно, что он много меньше вклада от первого слагаемого, поэтому вторым слагаемым в выражении (1.66) можно пренебречь на всем интервале. Значение параметра  $B_n$  определяется из условия нормировки, выражение для него будет выписано в третьей главе диссертации.

Второе граничное условие в (1.65) позволяет получить спектр масс скалярных частиц:

$$\left( 1 + \alpha + \frac{u}{\tilde{k}} + \frac{1}{\beta_2^2 - u} \frac{\mu_n^2}{\tilde{k}} \right) J_\alpha \left( \frac{\mu_n}{\tilde{k}} \right) - \frac{\mu_n}{\tilde{k}} J_{\alpha-1} \left( \frac{\mu_n}{\tilde{k}} \right) = 0 \quad (1.69)$$

В зависимости от значений остальных параметров, это уравнение может иметь одно сколь угодно близкое к нулю решение, очевидно соответствующее легкой моде. Если ее масса удовлетворяет условию  $\mu_1^2 \ll \tilde{k}^2$  можно сделать в (1.69) разложение функции Бесселя и получить для массы легкой моды приближенное выражение

$$\mu_1^2 \approx \frac{2}{3} \frac{(\beta_L^2 - u)u^2}{\beta_L^2 + 4\tilde{k}} \kappa^2 \Phi_0^2 \quad (1.70)$$

Следующие нули выражения (1.69) дают для остальных скалярных мод массы порядка  $\tilde{k}$ , а при достаточно больших  $n$  получаем для масс скалярных мод приближенную формулу

$$\mu_n^2 \approx \pi^2 \tilde{k}^2 n^2 \quad (1.71)$$

В стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума анализ взаимодействия тензорных и скалярных мод с материей на бранах в целом аналогичен анализу в нестабилизированной RS-модели. В первом порядке по гравитационной постоянной  $\kappa$  для браны, расположенной в точке  $y=L$ , получается выражение

$$S_{\text{int}L} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{X}_4} \left[ \kappa_0 b^{0\mu\nu} T_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n b^{n\mu\nu} T_{\mu\nu} - \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{rn} \phi_n T_{\mu}^{\mu} \right] d^4x, \quad (1.72)$$

где для каждой тензорной и скалярной моды получаем свою константу взаимодействия:

$$\kappa_0 = \Omega_0(L) \kappa, \quad \kappa_n = \Omega_n(L) \kappa, \quad (1.73)$$

$$\kappa_{rn} = \Psi_n(L) \kappa. \quad (1.74)$$

Если на бране, расположенной в точке  $y = L$ , выбраны галилеевы координаты, то нормированные тензорные волновые функции выглядят как  $\Omega_0(L) \approx \sqrt{\tilde{k}} e^{-\tilde{k}L}$  и  $\Omega_n(L) \approx -\sqrt{\tilde{k}}$ . И тогда, как это было и в нестабилизированной RS-модели, получаем для констант взаимодействия следующее выражение

$$\kappa_0 \approx e^{-\tilde{k}L} \sqrt{\tilde{k}} \kappa, \quad \kappa_n \approx -e^{\tilde{k}L} \kappa_0 \quad (1.75)$$

Совершенно аналогичным способом получается формула для волновых функций скалярных мод:

$$\Psi_n(L) \approx \frac{1}{2} B_n \left( \frac{\mu}{\tilde{k}} \right)^{-1-u/\tilde{k}} J_{\alpha} \left( \frac{\mu}{\tilde{k}} \right) \quad (1.76)$$

Что касается выражения для константы взаимодействия легкой скалярной моды с полями Стандартной модели, то оно будет рассмотрено в третьей главе настоящей диссертации, здесь же заметим, что при выбранном в настоящей главе диапазоне параметров модели величина  $\Lambda \equiv \kappa_{r1}^{-1}$  вполне может иметь значение порядка нескольких ТэВ.

### 1.3 Выводы по главе 1

В модели Рэндалл-Сундрума естественным образом возникает иерархия между масштабами четырехмерных гравитационного и калибровочного взаимодействий. Нестабилизированный вариант модели помимо безмассового



гравитона и бесконечного числа тяжелых тензорных мод, взаимодействующих с ТЭИ материи с константами взаимодействий порядка четырехмерной постоянной Планка, содержит одну безмассовую скалярную моду, называемую радионом (от английского «radion»), взаимодействующую со следом ТЭИ материи с константой взаимодействия порядка фундаментального многомерного масштаба. Этот фундаментальный масштаб задает также масштаб взаимодействия четырехмерных калибровочных полей и может лежать в диапазоне нескольких ТэВ.

В стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума иерархия между гравитационным и калибровочным энергетическими масштабами получается аналогично нестабилизированному варианту RS-модели. Однако, эффективный четырехмерный скалярный сектор стабилизированной RS-модели вместо одного безмассового поля содержит бесконечное число массивных мод. Массы этих полей (кроме, возможно, самого легкого) начинаются с величин порядка многомерного фундаментального масштаба. При этом самая легкая мода может иметь массу на порядок меньшую (сотни ГэВ), а ее взаимодействие с полями материи имеет форму, аналогичную той, что возникает в нестабилизированной RS-модели. Также следует отметить, что константа взаимодействия радиона с материей в стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума в несколько раз меньше аналогичной константы в нестабилизированной RS-модели.

## Глава 2. Сравнение процессов с участием радиона с аналогичными процессами с участием бозона Хиггса

В предыдущей главе было показано, что эффективное четырехмерное взаимодействие радиона с полями Стандартной модели в низшем порядке хорошо изучено [36], [37] и описывается лагранжианом вида (1.34)

$$L_{\text{int}} = -\frac{1}{\Lambda} r T_{\mu}^{\mu}, \quad (2.1)$$

где  $T_{\mu}^{\mu}$  – след тензора энергии-импульса (ТЭИ) полей Стандартной модели,  $r$  – поле радиона, а  $\Lambda$  – константа, имеющая размерность энергии. Поскольку в данном случае радион фактически играет роль дилатона, то он взаимодействует также и с безмассовыми векторными полями Стандартной модели (фотоном и глюоном) посредством конформной аномалии, которая должна быть включена в след ТЭИ. С учетом последнего замечания след тензора энергии-импульса записывается в виде

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{\mu} = \sum_f \left\{ \frac{3i}{2} \left[ (D_{\mu} \bar{f}) \gamma^{\mu} f - \bar{f} \gamma^{\mu} (D_{\mu} f) \right] + 4m_f \bar{f} f \left( 1 + \frac{h}{v} \right) \right\} + \\ - (\partial_{\mu} h) (\partial^{\mu} h) + 2m_h^2 h^2 \left( 1 + \frac{h}{2v} \right)^2 - (m_Z^2 Z_{\mu} Z^{\mu} + 2m_W^2 W_{\mu}^{+} W^{-\mu}) \left( 1 + \frac{h}{v} \right)^2 + \\ + \frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\mu\nu}^{ab} G_{ab}^{\mu\nu} + \frac{\beta(e)}{2e} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где суммирование в первом слагаемом ведется по всем фермионам Стандартной модели, а  $D_{\mu}$  есть ковариантная производная СМ. Последние два слагаемых в формуле (2.2) описывают глюонную и фотонную аномалии, а множители  $\beta(g_s)$  и  $\beta(e)$  есть бета-функции квантовой хромодинамики и квантовой электродинамики соответственно. Во многих работах при рассмотрении конкретных процессов с участием радиона предполагается, что поля находятся на массовой поверхности (т.е. подчиняются уравнениям движения). В этом случае след тензора энергии-импульса для спинорных и векторных полей принимает особенно простой вид:

$$T_{\mu}^{\mu} = \frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\mu\nu}^{ab} G_{ab}^{\mu\nu} + \frac{\beta(e)}{2e} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m_Z^2 Z_{\mu} Z^{\mu} - 2m_W^2 W_{\mu}^{+} W^{-\mu} + \sum_f m_f \bar{f} f. \quad (2.3)$$

Если при этом по каким-либо соображениям оказывается возможным пренебречь аномальными членами в формуле (2.3), то очевидно на массовой поверхности взаимодействие спинорных и векторных полей с радионом принимает тот же самый вид, что и взаимодействие этих полей с бозоном Хиггса (с заменой константы связи вида  $\Lambda \rightarrow \nu$ ).

Иная картина имеет место вне массовой поверхности. Взаимодействие радиона с фермионами содержит члены с производными по координатам, и, следовательно, соответствующие вершины в импульсном представлении имеют зависимость от импульсов фермионов. Поэтому естественно было бы ожидать, что процессы с участием фермионов, калибровочных бозонов и радиона должны в принципе отличаться от аналогичных процессов, где вместо радиона возникает бозон Хиггса. Однако, в наших работах [39-41], было показано, что амплитуды рассеяния любых процессов с участием одного радиона и произвольного количества фермионов и векторных бозонов имеют ту же самую структуру, что и амплитуды аналогичных процессов с участием хиггсовского бозона. Дополнительные (по сравнению с процессами с участием бозона Хиггса) вклады сокращаются при суммировании амплитуд как в древесном, так и в однопетлевом приближении. В частности, процессы рождения одиночного радиона совпадают с аналогичными процессами рождения бозона Хиггса с точностью до замены массы бозона Хиггса массой радиона, а также замены вакуумного среднего  $\nu$  константой  $\Lambda$ . Более того, в наших работах [42, 43] показано, что похожее сокращение имеет место и в случае ассоциативного рождения радиона и бозона Хиггса в сравнении с парным рождением хиггсовского бозона – различие сводится к замене масс, констант взаимодействия и перешкалированию константы самодействия третьей степени для бозона Хиггса, при этом константа не меняется для равных масс скаляров. В настоящей главе для различных процессов подробно рассматривается, как возникает такое сокращение дополнительных вкладов в амплитуду рассеяния

радиона, приводящее к потенциальной неразличимости процессов с участием таких, казалось бы, по-разному взаимодействующих скаляров, как радион и бозон Хиггса.

## 2.1 Процессы с участием одного скалярного бозона

### 2.1.1 Процесс рождения радиона

Простейшим примером, на котором можно продемонстрировать сокращение дополнительных «кинетических» вкладов в полную амплитуду рассеяния, может быть процесс рождения радиона в паре с  $Z$ -бозоном в  $e^+e^-$  столкновениях, который будем называть *radionstrahlung* (по аналогии с хорошо известным процессом рождения бозона Хиггса – *Higgsstrahlung*). В низшем порядке этот процесс описывается четырьмя фейнмановскими диаграммами, приведенными на рисунке 1:

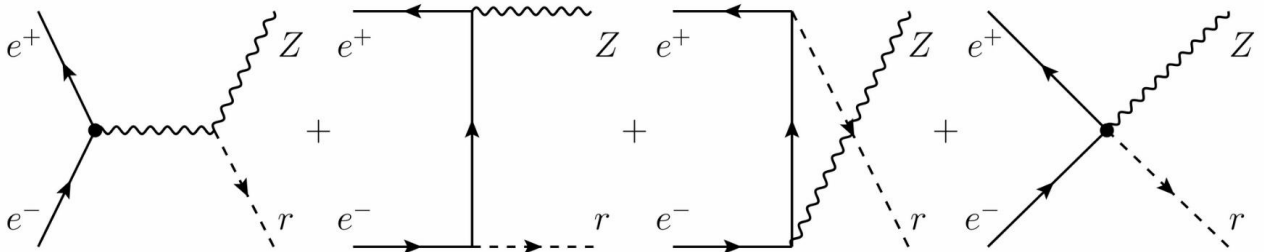


Рисунок 1 – Фейнмановские диаграммы, дающие вклад в процесс *radionstrahlung*  $e^+e^- \rightarrow Zr$

Сравним четыре приведенные на рисунке 1 амплитуды для процесса  $e^+e^- \rightarrow Zr$ , с аналогичными амплитудами процесса *Higgsstrahlung*. Первая диаграмма на рисунке 1 ту же самую имеет структуру (с точностью до замены радиона хиггсовским бозоном), что и аналогичная диаграмма для процесса *Higgsstrahlung*. Аналоги второй и третьей диаграмм, приведенных на рисунке 1, в принципе, также дают вклад полную амплитуду процесса *Higgsstrahlung*, но обычно они не рассматриваются в силу пренебрежимо малой массы электрона, которой пропорциональна вершинная функция  $e^+e^-h$ . При рассмотрении процесса *radionstrahlung* невозможно сразу же пренебречь аналогичной амплитудой, поскольку помимо масс фермионов в нее явно дают вклад импульсы входящих

фермионов. Четвертая диаграмма на рисунке 1, содержащая вершину, происходящую из слагаемого с произведением радиона на ковариантную производную фермиона, не имеет аналога для процесса Higgsstrahlung.

Если использовать для пропагатора калибровочного бозона выражение в калибровке т' Хофта-Фейнмана и пренебречь массой электрона, то четырем диаграммам, приведенным на рисунке 1, описывающим процесс radionstrahlung, соответствуют следующие аналитические выражения:

$$M_1 = -i2C\bar{e}(p_+)\Gamma^\mu e(p_-)\frac{1}{k^2 - m_Z^2}m_Z^2\varepsilon(q_Z)_\mu r(q_r), \quad (2.4)$$

$$M_2 = -iC\bar{e}(p_+)\Gamma^\mu \frac{l}{l^2} \left[ \frac{3}{2}(l + \not{p}_-) \right] e(p_-)\varepsilon(q_Z)_\mu r(q_r), \quad (2.5)$$

$$M_3 = -iC\bar{e}(p_+)\left[ \frac{3}{2}(\not{p}_+ + l') \right] \frac{l'}{l'^2} \Gamma^\mu e(p_-)\varepsilon(q_Z)_\mu r(q_r), \quad (2.6)$$

$$M_4 = i3C\bar{e}(p_+)\Gamma^\mu e(p_-)\varepsilon(q_Z)_\mu r(q_r), \quad (2.7)$$

где введены следующие обозначения:

$$C \equiv \frac{1}{\Lambda} \frac{e}{2\sin\theta_W \cos\theta_W}, \quad (2.8)$$

$$k = p_+ + p_- = q_r + q_Z, \quad (2.9)$$

$$l = q_Z - p_+ = p_- - q_r, \quad (2.10)$$

$$l' = q_r - p_+ = p_- - q_Z, \quad (2.11)$$

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \left( 2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \right). \quad (2.12)$$

Используя уравнение Дирака для безмассовой частицы в импульсном представлении  $\not{p}_- e(p_-) = 0$ ,  $\bar{e}(p_+) \not{p}_+ = 0$ , а также очевидное тождество  $l \frac{l}{l^2} = 1$ , легко убедиться, что сумма второй и третьей диаграмм в точности равна четвертой диаграмме с обратным знаком и следовательно

$$M_2 + M_3 + M_4 = 0. \quad (2.13)$$

Поэтому квадрат модуля матричного элемента  $|M|^2$  процесса radionstrahlung равен  $|M|^2 = |M_1|^2$  и имеет структуру в точности совпадающую с таковой для процесса рождения бозона Хиггса, и, таким образом, сечение имеет хорошо известный вид (с соответствующей заменой  $\Lambda \leftrightarrow \nu$  и  $m_r \leftrightarrow m_h$ ):

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow rZ) = \frac{m_Z^2}{\Lambda^2} \frac{\alpha(8\sin^4\theta_W - 4\sin^2\theta_W + 1)}{24\sin^2\theta_W \cos^2\theta_W} \frac{\sqrt{\lambda_r} \lambda_r + 12m_Z^2 s}{4s^2 (s - m_Z^2)}, \quad (2.14)$$

где по определению  $\lambda_r \equiv (m_Z^2 + m_r^2 - s)^2 - 4m_Z^2 m_r^2$ .

Как видно из формулы (2.13), все вклады от дополнительных диаграмм, представленных на рисунке 1, взаимно сократились, и поэтому сечение процесса radionstrahlung описывается той же самой формулой, что и сечение процесса Higgsstrahlung (с точностью до перешкалирования массы скалярного бозона и константы взаимодействия). С помощью аналогичных рассуждений легко продемонстрировать, что подобное сокращение амплитуд имеет место и для ассоциативного рождения радиона и  $W^\pm$ -бозонов, например в процессе  $u\bar{d} \rightarrow rW^+$ .

### 2.1.2 Сокращение дополнительных вкладов в полную амплитуду для процессов с участием одиночного радиона на древесном уровне.

В этом разделе на древесном уровне рассматриваются процессы с участием одиночного радиона и произвольного количества калибровочных бозонов в начальных и конечных состояниях. Для таких процессов заявленное сокращение дополнительных вкладов в полную амплитуду рассеяния вытекает из структуры фермионного тока, излучающего радион и калибровочные бозоны.

Для понимания, как подобное сокращение происходит в общем случае, полезно сначала детально рассмотреть простейший пример с излучением фермионным током одного калибровочного бозона и одного радиона, которому соответствуют три диаграммы, приведенные ниже на рисунке 2.

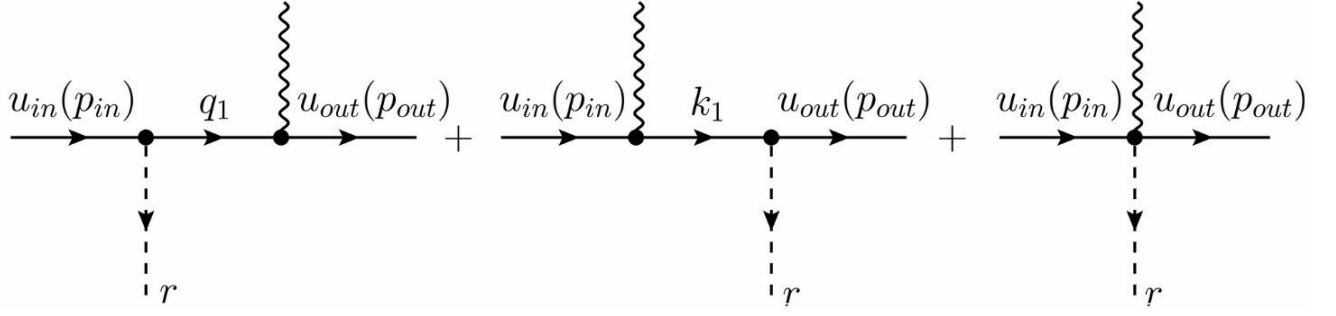


Рисунок 2 – Излучение фермионным током радиона и одного калибровочного бозона

Перепишем вершину  $\frac{i}{\Lambda} \left[ \frac{3}{2} (\not{p} + \not{q}) - 4m_f \right]$  фермион-радионного взаимодействия в следующем виде:

в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\Lambda} \left[ \frac{3}{2} (\not{p} + \not{q}) - 4m_f \right] &= \frac{i}{\Lambda} \left[ \frac{3}{2} (\not{p} - m_f) + \frac{3}{2} (\not{q} - m_f) - m_f \right] = \\ &= \frac{i}{\Lambda} \left[ \frac{3}{2} S^{-1}(\not{p}) + \frac{3}{2} S^{-1}(\not{q}) - m_f \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $p$  и  $q$  – импульсы входящих в вершину фермионов, а  $S^{-1}(p)$  обратный фермионный пропагатор  $S(p) \equiv \frac{\not{p} + m_f}{p^2 - m_f^2}$ . Заметим, что в формуле (2.15),

описывающей вершину взаимодействия, последнее слагаемое в квадратных скобках пропорционально массе фермиона  $m_f$ , так же как это имеет место для вершины взаимодействия бозона Хиггса с фермионами. С учетом преобразования (2.15) для вершин фермион-радионного взаимодействия можно записать аналитические выражения для диаграмм, изображенных на рисунке 2 в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_1 &= -i C \bar{u}_{out}(p_{out}) \Gamma^\mu S(k_1) \left[ \frac{3}{2} S^{-1}(k_1) + \frac{3}{2} S^{-1}(p_{in}) - m_f \right] u_{in}(p_{in}) = \\ &= -i \frac{3}{2} C \bar{u}_{out}(p_{out}) \Gamma^\mu u_{in}(p_{in}) + i m_f C \bar{u}_{out}(p_{out}) \Gamma^\mu S(k_1) u_{in}(p_{in}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= -iC\bar{u}_{out}(p_{out}) \left[ \frac{3}{2}S^{-1}(\not{p}_{out}) + \frac{3}{2}S^{-1}(q_1) - m_f \right] S(q_1)\Gamma^\mu u_{in}(p_{in}) = \\
&= -i\frac{3}{2}C\bar{u}_{out}(p_{out})\Gamma^\mu u_{in}(p_{in}) + im_f C\bar{u}_{out}(p_{out})S(q_1)\Gamma^\mu u_{in}(p_{in}),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$M_3 = +i3C\bar{u}_{out}(p_{out})\Gamma^\mu u_{in}(p_{in}), \tag{2.18}$$

где символом  $C$  обозначено произведение констант при всех вершинах, входящих в амплитуду, а выражением  $\Gamma^\mu$  – одинаковую лоренцеву структуру для вершин фермион-бозон и фермион-бозон-радион. Начальный и конечный фермионы совпадают в случае  $Z$ -бозона (нейтральный ток) и различны в случае  $W$ -бозона (заряженный ток). Как видно из формул (2.16)-(2.18), после суммирования всех трех диаграмм вклад в полную амплитуду процесса с участием одиночного радиона в конечном итоге дают только два слагаемых пропорциональные массам фермионов.

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = im_f C\bar{u}_{out}(p_{out}) \left[ \Gamma^\mu S(k_1) + S(q_1)\Gamma^\mu \right] u_{in}(p_{in}) \tag{2.19}$$

Сравнивая (2.19) с аналогичным выражением для полной амплитуды процесса с участием одиночного бозона Хиггса, обнаруживаем, что полные амплитуды этих двух процессов совпадают, если произвести замену констант взаимодействия  $\Lambda \leftrightarrow v$ .

В процессах с участием радиона аналогичное сокращение дополнительных (если сравнивать с процессами с участием бозона Хиггса) вкладов имеет место и при излучении фермионным током произвольного числа  $N$  калибровочных бозонов и одиночного радиона. Два типа диаграмм, характерных для такого процесса, изображены на рисунках 3 и 4.

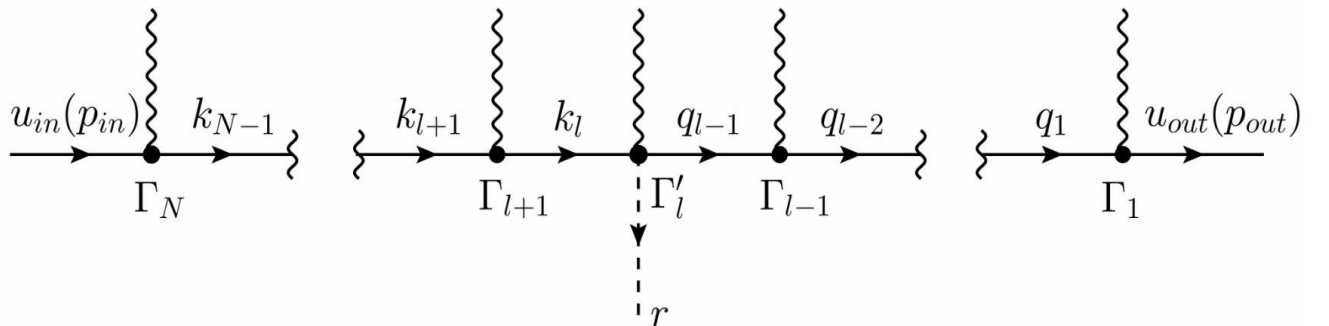




Рисунок 3 – Пример одного из  $N$  возможных вариантов излучения фермионным током одиночного радиона из вершины типа  $\Gamma'_l$  с четырьмя линиями и  $N$  калибровочных бозонов из вершин типа  $\Gamma_l$

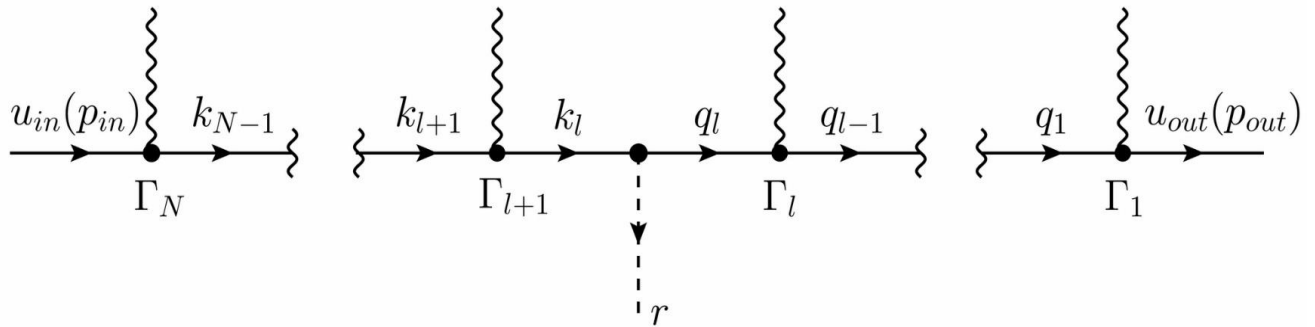


Рисунок 4 – Пример одного из  $N+1$  возможных вариантов излучения фермионным током одиночного радиона из вершины с тремя линиями и  $N$  калибровочных бозонов из вершин типа  $\Gamma_l$

Глядя на рисунок 4, можно сделать вывод, что существует всего  $N+1$  диаграмма с испусканием одиночного радиона с треххвостой вершиной, поскольку вершина, содержащая радион, может быть размещена на диаграмме, приведенной на рисунке 4, ровно  $N+1$  способом. Аналогично, посмотрев на рисунок 3, можно заключить, что существует всего  $N$  диаграмм с испусканием одиночного радиона, содержащих четыреххвостые вершины. В самом деле, на приведенной на рисунке 3 диаграмме есть ровно  $N$  треххвостых вершин типа  $\Gamma_l$ , которые можно было бы превратить в четыреххвостые вершины типа  $\Gamma'_l$ , где радион испускается из одной вершины совместно с калибровочным бозоном. Таким образом, сумму всех диаграмм для этого процесса можно записать в виде

$$M = M_0 + \sum_{l=1}^N (M_l + M'_l), \quad (2.20)$$

где амплитуды  $M_l$ , аналогичные амплитуде приведенной на рисунке 4, содержат вершину с испусканием радиона только треххвостого типа:

$$M_l = i^{2N+1} C \bar{f}_{out}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^l \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(q_l) - \frac{3}{2} S^{-1}(k_l) + m_{f_l} \right] \times \\ \times \left[ \prod_{j=l+1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] f_{in}(p_{in}), \quad \text{при } l=1, \dots, N-1, \quad (2.21)$$

$$M_0 = i^{2N+1} C \bar{f}_{out}(p_{out}) \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(p_{out}) - \frac{3}{2} S^{-1}(k_0) + m_{f_{out}} \right] \times \\ \times \left[ \prod_{j=1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] f_{in}(p_{in}), \quad (2.22)$$

$$M_N = i^{2N+1} C \bar{f}_{out}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^l \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] \times \\ \times \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(q_N) - \frac{3}{2} S^{-1}(p_{in}) + m_{f_{in}} \right] f_{in}(p_{in}), \quad (2.23)$$

а штрихованные амплитуды  $M'_l$ , аналогичные амплитуде, приведенной на рисунке 3, содержат вершину с испусканием радиона только четвертой степени:

$$M'_l = i^{2N-1} C \bar{f}_{out}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{l-1} \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] \left[ -3\Gamma_l^{\mu_l} \right] \times \\ \times \left[ \prod_{j=l+1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] f_{in}(p_{in}), \quad \text{при } l=2, \dots, N-1, \quad (2.24)$$

$$M'_1 = i^{2N-1} C \bar{f}_{out}(p_{out}) \left[ -3\Gamma_1^{\mu_1} \right] \left[ \prod_{j=2}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] f_{in}(p_{in}), \quad (2.25)$$

$$M'_N = i^{2N-1} C \bar{f}_{out}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{N-1} \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] \left[ -3\Gamma_N^{\mu_N} \right] f_{in}(p_{in}). \quad (2.26)$$

Здесь, чтобы явно выделить лоренцеву структуру полученных выражений, введено обозначение  $\Gamma_j^{\mu_j}$  для вершин испускания фермионом калибровочных бозонов  $V_j$ , обладающих импульсом  $p_{V_j}$  (на рисунках 3 и 4 лоренцев индекс у таких вершин опущен:  $\Gamma_l$ ). Под  $C$  в формулах (2.21)-(2.26) надо понимать произведение констант при всех входящих в выражение вершинах. Заметим, что для того, чтобы этот фактор был одинаковым для всех выражений (2.21)-(2.26), в формулах (2.24)-(2.26)

вершина взаимодействия радиона с двумя фермионами и калибровочным бозоном (см. рисунок 3, штрихованная вершина) выражена через (нештрихованную) треххвостую вершину:

$$\Gamma_j^\mu = \frac{1}{\Lambda} \times [-3\Gamma_j^\mu]. \quad (2.27)$$

Кроме того, приняты следующие обозначения для импульсов и их линейных комбинаций:

$$k_l = p_{in} - \sum_{j=1}^N p_{V_j}, \quad (2.28)$$

$$q_l = k_l - p_r = p_{out} + \sum_{j=1}^l p_{V_j}, \quad (2.29)$$

$$q_0 = p_{out}, \quad (2.30)$$

где  $q_l$  и  $k_l$  – импульсы фермионов в промежуточных состояниях,  $p_r$  – импульс радиона, а  $m_{f_{in}}$ ,  $m_{f_{out}}$  и  $m_{f_i}$  – массы фермионов в начальном, конечном и промежуточных состояниях соответственно. Отметим, что в диаграммах (2.21)-(2.23) и в диаграммах (2.24)-(2.26) множители  $i^{2N+1}$  и  $i^{2N-1}$  отличаются, поскольку в диаграммах типа  $M$  и  $M'$  число пропагаторов и вершин отличается на единицу, что в конечном итоге приводит к противоположным знакам вкладов этих диаграмм.

Из формул (2.20)-(2.26), используя очевидные тождества  $S^{-1}(q_l)S(q_l)=1$  и уравнение Дирака, которому подчиняются начальные  $f_{in}(p_{in})$  и конечные  $\bar{f}_{out}(p_{out})$  фермионные состояния, получаем:

$$M_0 = M_0^H - \frac{1}{2}M'_1, \quad (2.31)$$

$$M_l = M_l^H - \frac{1}{2}M'_l - \frac{1}{2}M'_{l+1}, \quad l=1, \dots, N-1, \quad (2.32)$$

$$M_N = M_N^H - \frac{1}{2}M'_N, \quad (2.33)$$

где под  $M_j^H$  подразумеваются амплитуды, структура которых аналогична амплитудам процессов, в которых вместо радиона участвует хиггсовский бозон, то есть вклады, пропорциональные массам фермионов:

$$M_l^H = i^{2N+1} \bar{f}_{out}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^l \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] [m_{f_l}] \left[ \prod_{j=l+1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] f_{in}(p_{in}) \quad (2.34)$$

$$M_0^H = i^{2N+1} \bar{f}_{out}(p_{out}) [m_{f_{out}}] \left[ \prod_{j=1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] f_{in}(p_{in}) \quad (2.35)$$

$$M_N^H = i^{2N+1} \bar{f}_{out}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^l \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] [m_{f_{in}}] f_{in}(p_{in}) \quad (2.36)$$

Подставляя (2.31)-(2.33) в выражение для полной амплитуды рассматриваемого процесса (2.20), получаем следующее равенство

$$M = \sum_{l=0}^N M_l + \sum_{l=1}^N M'_l = \sum_{l=0}^N M_l^H \quad (2.37)$$

Из формулы (2.37) становится очевидным, что помимо хиггсоподобных вкладов  $M_l^H$  все остальные вклады в полную амплитуду  $M$  процесса с участием одиночного радиона взаимно сокращаются, и остается только хиггсоподобная часть  $\sum_{l=0}^N M_l^H$ .

### 2.1.3 Сокращение дополнительных вкладов в полную амплитуду для процессов с участием одиночного радиона на петлевом уровне.

Сформулированный в предыдущем разделе результат был получен для древесного случая (фермионы в начальном и конечном состояниях находились на массовой поверхности). Покажем, что аналогичный результат имеет место и для случая фермионных петель, то есть рассмотрим ситуацию, когда ни один из фермионов не находится на массовой оболочке. Тогда количество диаграмм типа  $M_l$  оказывается на единицу меньшим по сравнению с древесным случаем, поскольку для замкнутой петли излучение радиона правее первой калибровочной

вершины тождественно излучению радиона левее  $N$ -ной калибровочной вершины. То есть для полной амплитуды процесса можно записать

$$M = \sum_{l=1}^N M_l + \sum_{l=1}^N M'_l, \quad (2.38)$$

где, как и в древесном случае,  $M_l$  есть диаграммы, содержащие вершину взаимодействия радиона кубического типа:

$$M_l = i^{2N+1} Sp \left\{ \left[ \prod_{j=1}^l \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(q_l) - \frac{3}{2} S^{-1}(k_l) + m_{f_l} \right] \left[ \prod_{j=l+1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] S(p) \right\}, \quad (2.39) \\ l = 1, \dots, N-1,$$

$$M_l = i^{2N+1} Sp \left\{ \left[ \prod_{j=1}^l \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(q_l) - \frac{3}{2} S^{-1}(k_l) + m_{f_l} \right] \left[ \prod_{j=l+1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] S(p) \right\}, \quad (2.40) \\ l = 1, \dots, N-1,$$

$$M_0 = i^{2N+1} Sp \left\{ \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(p_{out}) - \frac{3}{2} S^{-1}(k_0) + m_{f_{out}} \right] \left[ \prod_{j=1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] S(p) \right\}, \quad (2.41)$$

$$M_N = i^{2N+1} Sp \left\{ \left[ \prod_{j=1}^l \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(q_N) - \frac{3}{2} S^{-1}(p_{in}) + m_{f_{in}} \right] S(p) \right\}, \quad (2.42)$$

а  $M'$  – диаграммы содержащие вершину взаимодействия радиона четвертого порядка:

$$M'_l = i^{2N-1} Sp \left\{ \left\{ \left[ \prod_{j=1}^{l-1} \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] \left[ -3\Gamma_l^{\mu_l} \right] \left[ \prod_{j=l+1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] S(p) \right\} \right\}, \quad (2.43) \\ l = 2, \dots, N-1,$$

$$M'_1 \sim i^{2N-1} Sp \left\{ \left[ -3\Gamma_1^{\mu_1} \right] \left[ \prod_{j=2}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] S(p) \right\} \quad (2.44)$$

$$M'_N \sim i^{2N-1} Sp \left\{ \left[ \prod_{j=1}^{N-1} \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] \left[ -3\Gamma_N^{\mu_N} \right] S(p) \right\} \quad (2.45)$$

и для линейных комбинаций импульсов выполняются соотношения

$$k_l = p - \sum_{j=l}^N p_{V_j}, \quad q_l = k_l - p_r = p + \sum_{j=1}^l p_{V_j}. \quad (2.46)$$

Рассуждая так же как и в древесном случае, из формул (2.39)-(2.45) получаем выражения, в которых отдельно выделены хиггсоподобные вклады:

$$M_l = M_l^H - \frac{1}{2} M'_l - \frac{1}{2} M'_{l+1}, \quad (2.47)$$

$$M_N = M_N^H - \frac{1}{2} M'_N - \frac{1}{2} M'_1. \quad (2.48)$$

Подставляя формулы (2.47)-(2.48) в выражение для полной амплитуды процесса (2.38), аналогично древесному случаю получаем, что все дополнительные вклады в полную амплитуду процесса  $M$ , сокращаются и остаются только вклады, похожие на вклады бозона Хиггса:

$$M = \sum_{l=1}^{N-1} M_l^H. \quad (2.49)$$

## 2.2 Процессы с ассоциативным рождением радиона и бозонов Хиггса

В предыдущем разделе было показано, что в процессах рождения одиночного фермиона в сопровождении произвольного числа любых калибровочных бозонов, несмотря на наличие в вершинах взаимодействия радиона и фермионов членов, зависящих от импульсов фермионов, а также четыреххвостых вершин типа фермионы-калибровочный бозон-радион, все дополнительные вклады сокращаются таким образом, что остается только часть, имеющая вид такой же, что и в аналогичных процессах с рождением бозона Хиггса. Данный результат имеет место как на древесном уровне, так и в случае фермионной петли, причем

участвующие в процессе векторные бозоны могут находиться как на массовой поверхности, так и вне ее. Амплитуды процессов с участием радиона могут быть получены из амплитуд аналогичных процессов с участием бозона Хиггса простой заменой массы бозона Хиггса  $m_h$  массой радиона  $m_r$  и хиггсовского вакуумного среднего  $v$  обратной константой взаимодействия радиона  $\Lambda$ . Теперь покажем, что в случае, если помимо калибровочных бозонов радион рождается в сопровождении произвольного числа бозонов Хиггса, похожее сокращение также имеет место, но теперь помимо указанных замен необходимо изменить также константу в треххвостой вершине самодействия бозона Хиггса.

### 2.2.1 Аннигиляция фермион-антифермионной пары

Начнем с простого примера ассоциативного рождения радиона и бозона Хиггса в процессе фермион-антифермионной аннигиляции. Диаграммы этого процесса изображены на рисунке 5.

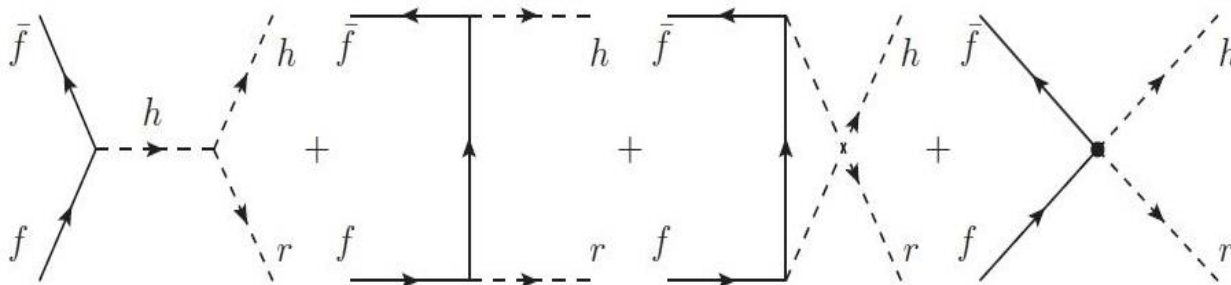


Рисунок 5 – Рождение радиона и бозона Хиггса при аннигиляции фермион-антифермионной пары

Первые три диаграммы аналогичны диаграммам процесса парного рождения бозонов Хиггса (если исходящий радион заменить хиггсовским бозоном, а вершины взаимодействия фермионов с радионом и бозона Хиггса с радионом заменить соответственно вершинами взаимодействия фермионов с хиггсовским бозоном и его вершиной самодействия третьей степени). Согласно правилам Фейнмана, каждому из четырех графов, изображенных на рисунке 5, можно

сопоставить аналитические выражения, приведенные ниже в формулах (2.50)-(2.53). Для первой диаграммы на рисунке 5 получаем

$$M_1 = -\frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) [m_f] f(p_2) \frac{1}{k^2 - m_h^2} [-2(k \cdot q_h) + 4m_h^2] r(q_r) h(q_h). \quad (2.50)$$

Вторая диаграмма, приведенная на рисунке 5 описывается выражением

$$M_2 = -\frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(p_1) - \frac{3}{2} S^{-1}(l) + m_f \right] S(l) [m_f] f(p_2) r(q_r) h(q_h). \quad (2.51)$$

Третью диаграмму, изображенную на рисунке 5 можно описать формулой

$$M_3 = -\frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) [m_f] S(l') \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(l') - \frac{3}{2} S^{-1}(p_2) + m_f \right] f(p_2) r(q_r) h(q_h). \quad (2.52)$$

И, наконец, четвертой диаграмме на рисунке 5 соответствует следующее аналитическое выражение

$$M_4 = -4 \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) [m_f] f(p_2) r(q_r) h(q_h). \quad (2.53)$$

где

$$k = p_1 + p_2 = q_h + q_r, \quad (2.54)$$

$$l = p_2 - q_r = q_h - p_1, \quad (2.55)$$

$$l' = p_2 - q_h = q_r - p_1, \quad (2.56)$$

Используя простые кинематические соотношения

$$\begin{aligned} 2(k \cdot q_h) &= 2((q_h + q_r) \cdot q_h) = 2q_h^2 + (q_r + q_h)^2 - q_r^2 - q_h^2 = \\ &= k^2 - q_r^2 + q_h^2 = k^2 - m_r^2 + m_h^2. \end{aligned} \quad (2.57)$$

а также уравнение Дирака, можно переписать первые три диаграммы следующим образом:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) [m_f] f(p_2) r(q_r) h(q_h) + \\ &- \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) [m_f] f(p_2) \frac{1}{k_h^2 - m_h^2} [m_r^2 + 2m_h^2] r(q_r) h(q_h), \end{aligned} \quad (2.58)$$



$$M_2 = \frac{3}{2} \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) [m_f] f(p_2) r(q_r) h(q_h) + \quad (2.59)$$

$$- \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) [m_f^2 S(l)] f(p_2) r(q_r) h(q_h),$$

$$M_3 = \frac{3}{2} \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) [m_f] f(p_2) r(q_r) h(q_h) + \quad (2.60)$$

$$- \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) [m_f^2 S(l')] f(p_2) r(q_r) h(q_h).$$

Как видим, первые слагаемые во всех трех диаграммах, с точностью до коэффициентов совпадают с четвертой диаграммой, причем коэффициенты у этих четырех диаграмм таковы, что их сумма равна нулю ( $1 + 1/2 + 3/2 - 4 = 0$ ). Поэтому сумма всех четырех диаграмм имеет вид

$$M \equiv M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = - \frac{im_f}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) f(p_2) \frac{m_r^2 + 2m_h^2}{k_h^2 - m_h^2} r(q_r) h(q_h) \quad (2.61)$$

$$- \frac{im_f^2}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) [S(l) + S(l')] f(p_2) r(q_r) h(q_h).$$

Сравним полученное выражение (2.61) с выражением для амплитуды парного рождения бозонов Хиггса при аннигиляции фермион-антифермионной пары, где диаграммы соответствующего процесса приведены на рисунке 6.

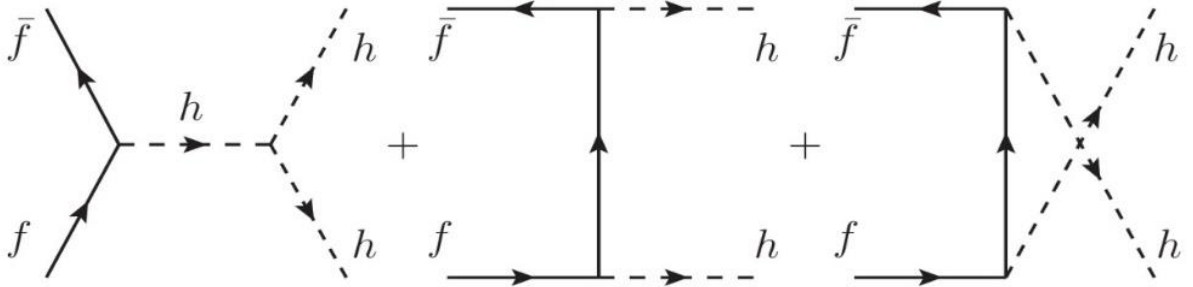


Рисунок 6 – Аннигиляция двух фермионов с рождением двух бозонов Хиггса

Аналитические выражения для этих диаграмм приведены в (2.62)-(2.64):

$$M_1^H = - \frac{im_f}{v^2} \bar{f}(p_1) f(p_2) \frac{3m_h^2}{k_h^2 - m_h^2} h(q_1) h(q_2), \quad (2.62)$$

$$M_2^H = - \frac{im_f^2}{v^2} \bar{f}(p_1) S(l) f(p_2) h(q_1) h(q_2), \quad (2.63)$$

$$M_3^H = -\frac{im_f^2}{v^2} \bar{f}(p_1) S(l') f(p_2) h(q_1) h(q_2), \quad (2.64)$$

а их сумма есть

$$M^H \equiv M_1^H + M_2^H + M_3^H = -\frac{im_f^2}{v^2} \bar{f}(p_1) f(p_2) \frac{3m_h^2}{k_h^2 - m_h^2} r(q_r) h(q_h) + \quad (2.65)$$

$$-\frac{im_f^2}{v^2} \bar{f}(p_1) [S(l) + S(l')] f(p_2) r(q_r) h(q_h).$$

Как видим, выражение (2.61) можно получить из выражения (2.65) заменой одного вакуумного среднего  $v$  в факторе  $v^{-2}$  константой  $\Lambda$  и заменой константы самодействия бозона Хиггса  $3m_h^2/v$  новой константой следующего вида:

$$\frac{1}{\Lambda} (2m_h^2 + m_r^2) = \frac{3m_h^2}{\Lambda} \left( 1 + \frac{m_r^2 - m_h^2}{3m_h^2} \right) = (1 + \zeta) \frac{3m_h^2}{\Lambda}, \quad (2.66)$$

где

$$\zeta \equiv \frac{m_r^2 - m_h^2}{3m_h^2} \quad (2.67)$$

### 2.2.2 Слияние двух глюонов с образованием пары скалярных частиц

В следующем примере сравним два процесса с участием двух глюонов: совместное рождение бозона Хиггса и радиона ( $gg \rightarrow hr$ ), и парное рождение бозонов Хиггса ( $gg \rightarrow hh$ ). Диаграммы этих процессов представлены ниже на рисунке 7 и рисунке 8 соответственно.

Первые четыре диаграммы у процесса совместного рождения бозона Хиггса и радиона аналогичны диаграммам парного рождения бозонов Хиггса. Оставшиеся три диаграммы содержат вершины, которых нет в Стандартной модели.

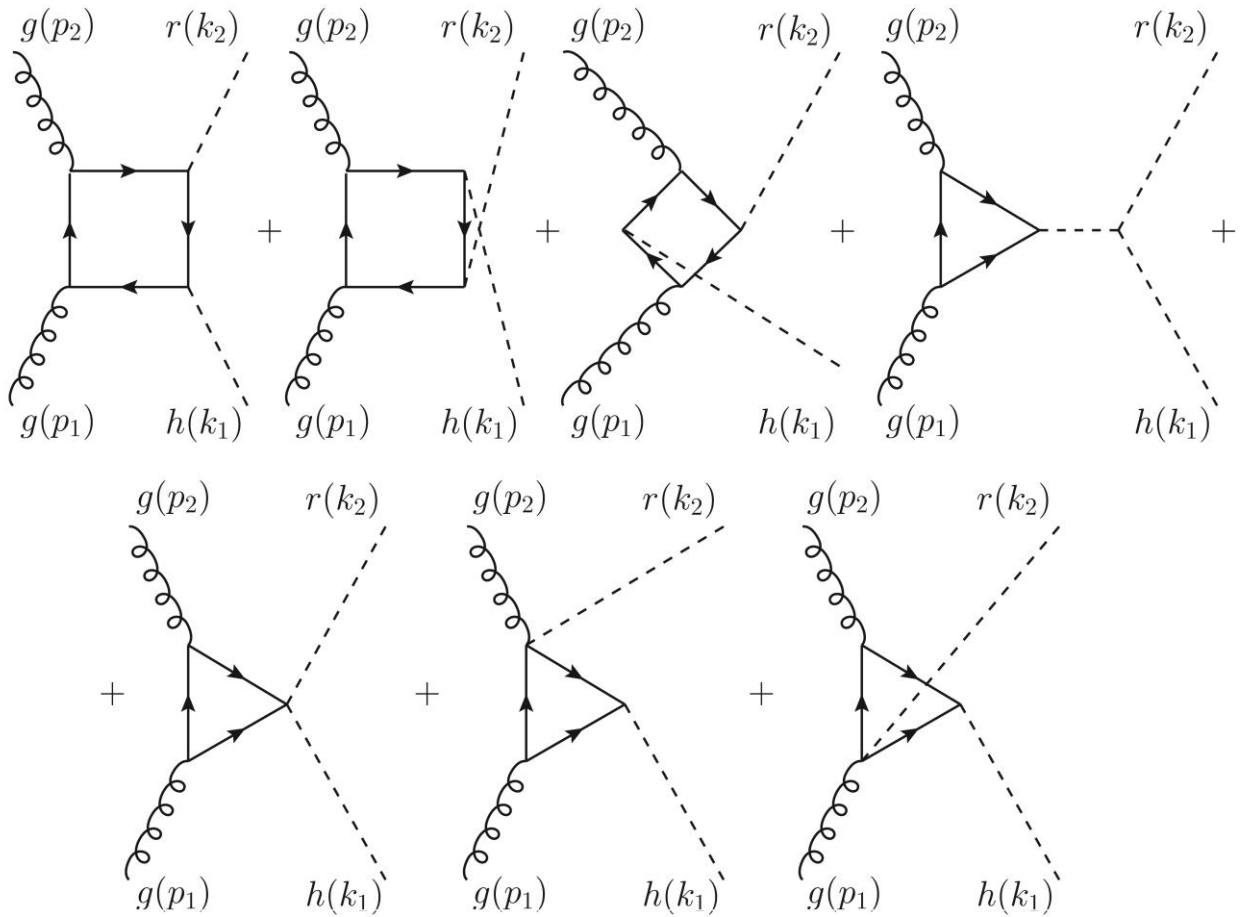


Рисунок 7 – Совместное рождение бозона Хиггса и радиона при слиянии двух глюонов

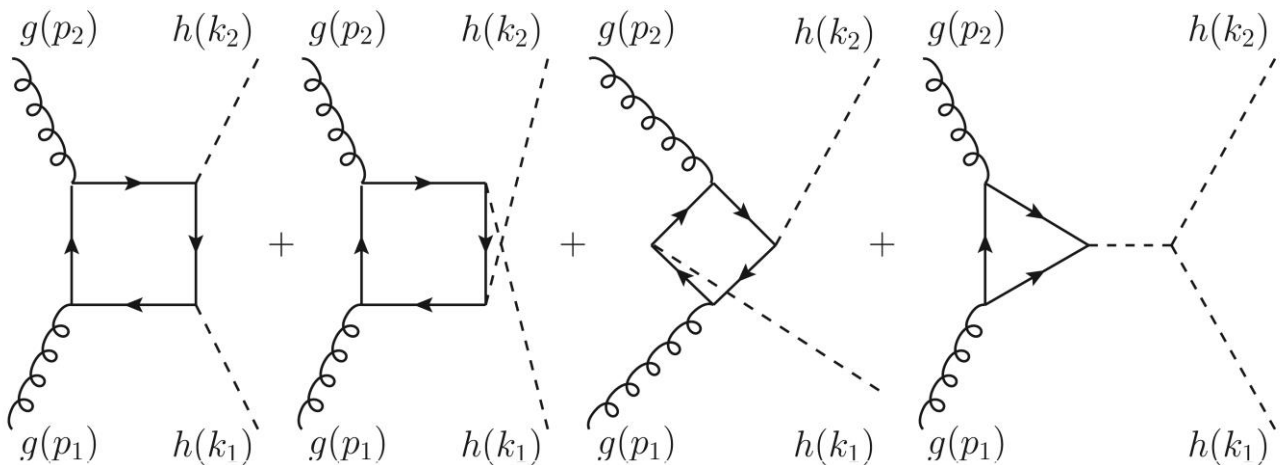


Рисунок 8 – Парное рождение бозонов Хиггса при слиянии двух глюонов

Вклады каждой из диаграмм на рисунках 7 и 8 можно представить в следующей простой форме:

$$M_i^{(rh)} = \frac{g_c^2}{v\Lambda} \varepsilon(p_1)_\mu \varepsilon(p_2)_\nu h(k_1) r(k_2) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} X_i^{\mu\nu}(p_1, p_2, k_1, k_2), \quad i=1, \dots, 7, \quad (2.68)$$

для процесса  $gg \rightarrow hr$  (см. рисунок 7),

$$M_i^{(hh)} = \frac{g_c^2}{v_0^2} \varepsilon(p_1)_\mu \varepsilon(p_2)_\nu h(k_1) h(k_2) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} Y_i^{\mu\nu}(p_1, p_2, k_1, k_2), \quad i=1, \dots, 4. \quad (2.69)$$

для процесса  $gg \rightarrow hh$  (см. рисунок 8), где величины  $X_i^{\mu\nu}$  и  $Y_i^{\mu\nu}$  задаются следующими выражениями:

$$X_1^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ \gamma^\mu S_1 \gamma^\nu S_2 \Gamma_{2,3} S_3 [-m] S_4 \right], \quad (2.70)$$

$$X_2^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ \gamma^\mu S_1 \gamma^\nu S_2 [-m] S_5 \Gamma_{5,4} S_4 \right], \quad (2.71)$$

$$X_3^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ \gamma^\mu S_1 [-m] S_6 \gamma^\nu S_5 \Gamma_{5,4} S_4 \right], \quad (2.72)$$

$$X_4^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ \gamma^\mu S_1 \gamma^\nu S_2 [-m] S_4 \right] D\Gamma', \quad (2.73)$$

$$X_5^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ \gamma^\mu S_1 \gamma^\nu S_2 [+4m] S_4 \right], \quad (2.74)$$

$$X_6^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ \gamma^\mu S_1 [-3\gamma^\nu] S_3 [-m] S_4 \right], \quad (2.75)$$

$$X_7^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ [-3\gamma^\mu] S_1 \gamma^\nu S_2 [-m] S_5 \right], \quad (2.76)$$

$$Y_1^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ \gamma^\mu S_1 \gamma^\nu S_2 [-m] S_3 [-m] S_4 \right], \quad (2.77)$$

$$Y_2^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ \gamma^\mu S_1 \gamma^\nu S_2 [-m] S_5 [-m] S_4 \right], \quad (2.78)$$

$$Y_3^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ \gamma^\mu S_1 [-m] S_6 \gamma^\nu S_5 [-m] S_4 \right], \quad (2.79)$$

$$Y_4^{\mu\nu} \equiv Sp \left[ \gamma^\mu S_1 \gamma^\nu S_2 [-m] S_4 \right] D\Gamma', \quad (2.80)$$

где

$$\Gamma_{i,j} \equiv \frac{3}{2} S_i^{-1} + \frac{3}{2} S_j^{-1} - m, \quad (2.81)$$

$$\Gamma' \equiv \begin{cases} -3m_h^2 & gg \rightarrow hh \\ 2 \left\{ ((k_1 + k_2) \cdot k_1) - 2m_h^2 \right\} & gg \rightarrow hr' \end{cases} \quad (2.82)$$

$$S_j \equiv S(l - q_j), \quad (2.83)$$

$$D^{-1} \equiv (k_1 + k_2)^2 - m_h^2. \quad (2.84)$$

Вершины  $\Gamma_{i,j}$  содержат обратные пропагаторы  $S_i^{-1}$  и  $S_j^{-1}$ . В выражениях  $X_1^{\mu\nu}$ ,  $X_2^{\mu\nu}$  и  $X_3^{\mu\nu}$  для квадратных диаграмм эти вершины окружены пропагаторами  $S_i$  и  $S_j$ . Это позволяет редуцировать квадратные диаграммы с радионом в линейную комбинацию двух треугольных диаграмм и квадратную диаграмму с вершиной как у бозона Хиггса, как показано на рисунке 9:

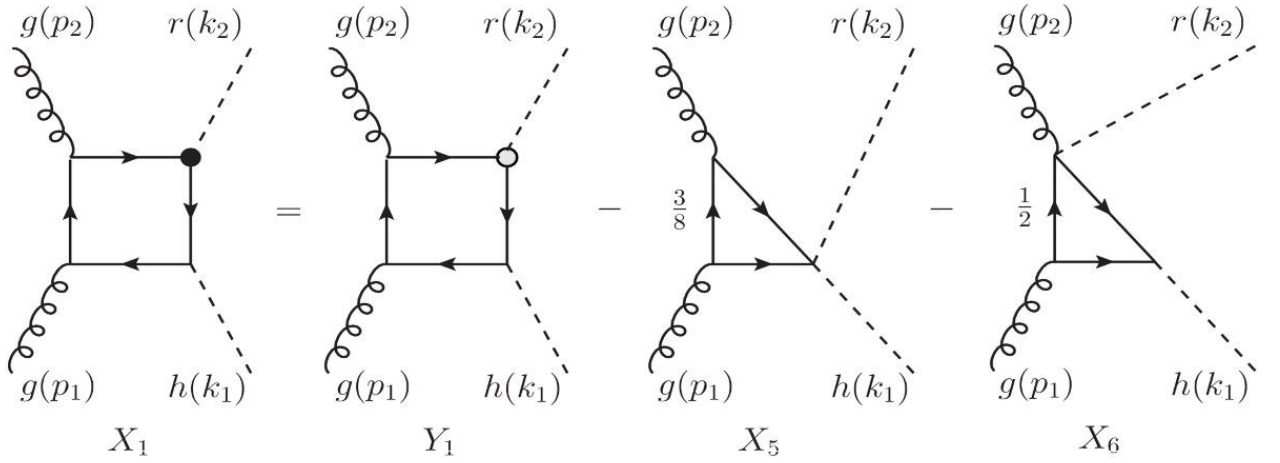


Рисунок 9 – Редукция квадратной диаграммы с вершиной радиона до линейной комбинации квадратной диаграммы с хиггсоподобной вершиной (светлая точка) и двух треугольных диаграмм

Аналитическое выражение для такой редукции следующее:

$$S_i \Gamma_{i,j} S_j = S_i \left\{ \frac{3}{2} S_i^{-1} + \frac{3}{2} S_j^{-1} - m \right\} S_j = -S_i m S_j + \frac{3}{2} S_j + \frac{3}{2} S_i \quad (2.85)$$

Первое слагаемое есть хиггсоподобный член с вершиной пропорциональной массе фермиона, второе слагаемое соответствует диаграмме исчезнувшим пропагатором  $S_i$  и излучением радиона и глюона из одной вершины, и, аналогично, третье слагаемое – диаграмме с исчезнувшим пропагатором  $S_j$  и излучением из одной вершины радиона и бозона Хиггса. Таким образом, мы преобразуем все квадратные диаграммы с радионной вершиной в суммы других диаграмм, с более простыми вершинами, не зависящими от импульсов.

В общем случае декомпозиция диаграммы, содержащей зависящую от импульсов вершину радион-фермион-фермион, на более простые диаграммы с вершинами, не зависящими от импульсов, продемонстрирована на рисунке 10.

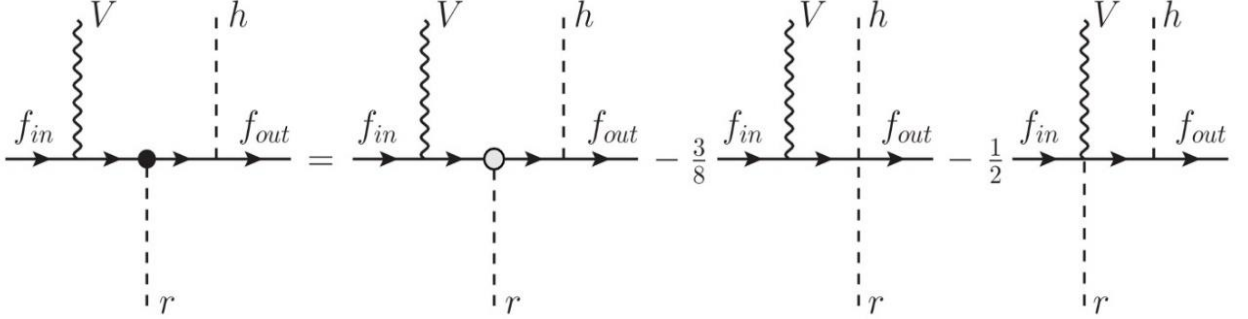


Рисунок 10 – Выражение фермионного тока с излучением радиона, калибровочного бозона и бозона Хиггса через диаграммы с хиггсоподобной вершиной излучения радиона и диаграммы с четыреххвостыми фермион-радион-бозонными вершинами с соответствующими числовыми множителями

Подставив (2.85) в (2.70)-(2.72) получим следующие выражения  $X_1^{\mu\nu}$ ,  $X_2^{\mu\nu}$  и  $X_3^{\mu\nu}$  через  $Y_1^{\mu\nu}$ ,  $Y_2^{\mu\nu}$  и  $Y_3^{\mu\nu}$  и  $X_5^{\mu\nu}$ ,  $X_6^{\mu\nu}$  и  $X_7^{\mu\nu}$ :

$$X_1^{\mu\nu} = Y_1^{\mu\nu} - \frac{3}{8} X_5^{\mu\nu} - \frac{1}{2} X_6^{\mu\nu}, \quad (2.86)$$

$$X_2^{\mu\nu} = Y_2^{\mu\nu} - \frac{3}{8} X_5^{\mu\nu} - \frac{1}{2} X_7^{\mu\nu}, \quad (2.87)$$

$$X_3^{\mu\nu} = Y_3^{\mu\nu} - \frac{1}{2} X_6^{\mu\nu} - \frac{1}{2} X_7^{\mu\nu}. \quad (2.88)$$

Далее, преобразуем хиггс-радионную вершину  $\Gamma'$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma' &= 2 \left\{ (k_1 + k_2) \cdot k_1 - 2m_h^2 \right\} = (k_1 + k_2)^2 + k_1^2 - k_2^2 - 4m_h^2 = \\ &= \left[ (k_1 + k_2)^2 - m_h^2 \right] - m_r^2 - 2m_h^2. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Теперь произведение пропагатора  $D$  на вершину  $\Gamma'$  приобретает вид

$$D\Gamma' = 1 - \frac{m_r^2 + 2m_h^2}{(k_1 + k_2)^2 - m_h^2} \quad (2.90)$$

Наконец, используем полученное выражение для того, чтобы выразить  $X_4^{\mu\nu}$  через  $X_5^{\mu\nu}$  и  $Y_4^{\mu\nu}$ :

$$X_4^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} X_5^{\mu\nu} + \frac{m_r^2 + 2m_h^2}{(k_1 + k_2)^2 - m_h^2} Y_4^{\mu\nu}. \quad (2.91)$$

Теперь сумма всех  $X_i^{\mu\nu}$  для процесса  $gg \rightarrow hr$  может быть выражена через  $Y_i^{\mu\nu}$  и введенный выше в формуле (2.67) параметр  $\zeta$ :

$$\sum_{i=1}^7 X_i^{\mu\nu} = Y_1^{\mu\nu} + Y_2^{\mu\nu} + Y_3^{\mu\nu} + (1 + \xi) Y_4^{\mu\nu}. \quad (2.92)$$

Последнее выражение выглядит очень похоже на выражение для процесса  $gg \rightarrow hh$ :

$$\sum_{i=1}^4 Y_i^{\mu\nu} = Y_1^{\mu\nu} + Y_2^{\mu\nu} + Y_3^{\mu\nu} + Y_4^{\mu\nu}. \quad (2.93)$$

Таким образом, мы снова видим, что амплитуды этих двух процессов совпадают с точностью до параметра  $\zeta$ , замены масс скаляров и констант связи.

Другими словами, участие в процессе радиона может имитировать отклонение константы самодействия третьего порядка бозона Хиггса от ее значения в СМ.

### 2.2.3 Общий случай: сокращение на древесном уровне

Покажем теперь, что такое сокращение происходит и в общем случае рождения одиночного радиона в сопровождении произвольных числа калибровочных и хиггсовских бозонов. Рассмотрим фермионный ток (или фермионную петлю), испускающий некоторое число  $N$  бозонов (калибровочных бозонов  $V_j$  или бозонов Хиггса  $h_j$ , индекс  $j$  нумерует бозоны). Число калибровочных бозонов обозначим  $N_V$ , число бозонов Хиггса –  $N_h$ , так что  $N_V + N_h = N$ , процесс  $\bar{f}f \rightarrow h_1 \dots h_{N_h} V_1 \dots V_{N_V+1}$ . Добавим в произвольное возможное место диаграммы процесса либо еще один хиггсовский бозон (превратив тем самым процесс в  $\bar{f}f \rightarrow h_1 \dots h_{N_h+1} V_1 \dots V_{N_V+1}$ ), либо радион (превратив процесс в

$\bar{f}f \rightarrow rh_1 \dots h_N V_1 \dots V_{N+1}$ ). Очевидно, что существует два возможных способа добавления бозона Хиггса:

- а) с испусканием от фермионной линии;
- б) с испусканием от бозонной линии ( $V$  или  $h$ );

для радиона к этим двум возможностям добавляется третья:

с) с испусканием радиона из уже существующей фермион-бозонной вершины (таким образом превращая треххвостую вершину в четыреххвостую).

Все три возможности изображены на рисунке 11.

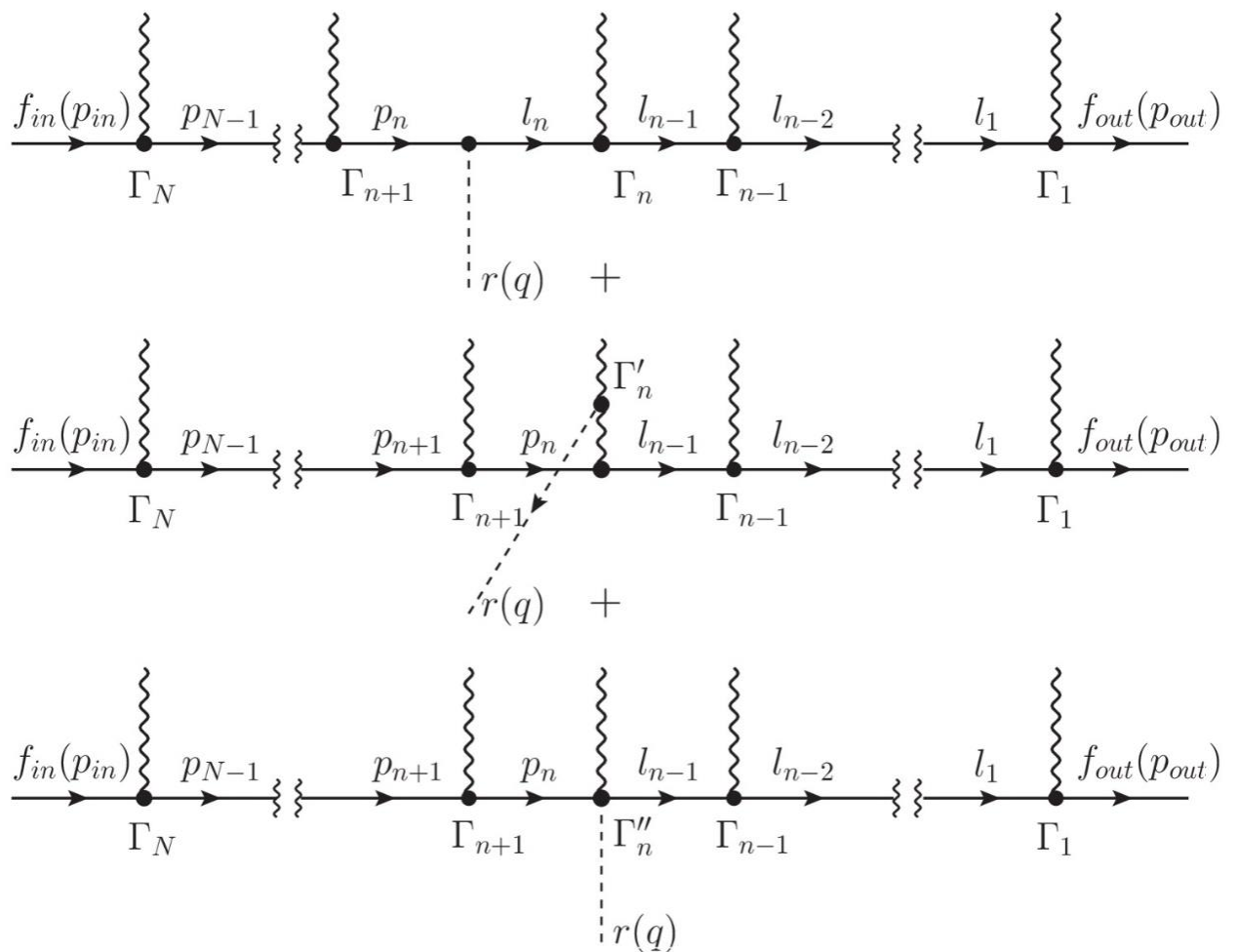


Рисунок 11 – Возможные варианты добавления радиона к фермионному току, излучающему  $N$  хиггсовских и калибровочных бозонов

Для удобства введем некоторые обозначения. Будем использовать латинские индексы ( $a, b, c, \dots$ ) для параллельного рассмотрения случаев с калибровочным



бозоном или бозоном Хиггса. Для частного случая калибровочных бозонов латинские индексы принимают значения векторных индексов  $(\alpha, \beta, \lambda \dots)$ , а для бозонов Хиггса они сводятся к метке  $h$ , обозначающей вершину бозона Хиггса. Все линии, относящиеся к вершине, считаются входящими.

Таким образом, для вершин типа фермион-фермион-калибровочный бозон и фермион-фермион-бозон Хиггса имеем следующие обозначения:

$$\Gamma_a = \begin{cases} \Gamma_\mu \\ \Gamma_{(h)} \end{cases} = i \begin{cases} \gamma_\mu (a_f + b_f \gamma_5) \\ -\frac{m_f}{v} \end{cases}. \quad (2.94)$$

Для треххвостых вершин с двумя калибровочными бозонами и бозоном Хиггса либо с тремя бозонами Хиггса имеем следующее обозначение:

$$\left[ \Gamma'_{(h)} \right]_b^a = \begin{cases} \left[ \Gamma'_{(h)} \right]_\beta^\alpha \\ \Gamma'_{(h)} \end{cases} = i \begin{cases} \frac{2m_V^2}{v} \delta_\beta^\alpha \\ -\frac{3m_h^2}{v} \end{cases}. \quad (2.95)$$

Вершины с радионом и двумя фермионами являются функциями входящих фермионных импульсов, например,  $p$  и  $l$ . Они могут быть переписаны в терминах пропагаторов:

$$\begin{aligned} \Gamma_{(r)}(p, l) &= -\frac{i}{\Lambda} \left\{ \frac{3}{2} \left[ (\not{p} + m_f) - (l - m_f) \right] + m_f \right\} = \\ &= \frac{i}{\Lambda} \left\{ \frac{3}{2} \left[ S^{-1}(l) + S^{-1}(-p) \right] - m_f \right\} = \\ &= \frac{v}{\Lambda} \Gamma_{(h)} + \frac{i3}{2\Lambda} \left[ S^{-1}(l) + S^{-1}(-p) \right]. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Введенное ниже в формуле (2.97) обозначение  $\left[ \Gamma'_{(r)} \right]_b^a$  объединяет вершины для двух калибровочных бозонов и радиона (исключая аномалии) либо для двух бозонов Хиггса и радиона – в последнем случае вершина также зависит от входящих хиггсовских импульсов:

$$\left[ \Gamma'_{(r)} \right]_b^a = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \Gamma'_{(r)} \right]_\beta^\alpha \\ \Gamma'_{(r)} \end{array} \right. = i \left\{ \begin{array}{l} \frac{2m_V^2}{\Lambda} \delta_\beta^\alpha \\ -\frac{2}{\Lambda} \{ (p \cdot k) + 2m_h^2 \} \end{array} \right. . \quad (2.97)$$

Наконец, обозначение  $\Gamma''_{(r),a}$  используется для четыреххвостых вершин фермион-фермион-калибровочный бозон-радион либо фермион-фермион-бозон Хиггс-радион:

$$\Gamma''_{(r),a} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \Gamma''_{(r)} \right]_\mu \\ \Gamma''_{(r)} \end{array} \right. = \frac{i}{\Lambda_r} \left\{ \begin{array}{l} 3\gamma_\mu (a_f + b_f \gamma_5) \\ -\frac{4m_f}{v} \end{array} \right. = \frac{1}{\Lambda} \left\{ \begin{array}{l} 3\Gamma_\mu \\ 4\Gamma_{(h)} \end{array} \right. = \frac{3}{\Lambda} \Gamma_a + \frac{1}{\Lambda} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \Gamma_{(h)} \end{array} \right. . \quad (2.98)$$

Теперь можно представить три типа изображенных на рисунке 11 диаграмм в следующем виде:

$$M[\varphi]_n = i^N \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^n \varepsilon(k_j)^{a_j} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \times \quad (2.99)$$

$$\times \varphi(q) \Gamma_{(\varphi)} \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \varepsilon(k_j)^{a_j} \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}),$$

$$M'[\varphi]_n = i^N \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \varepsilon(k_j)^{a_j} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \times \quad (2.100)$$

$$\times \left( \varepsilon(k_n)^{a_n} \varphi(q) [\Gamma'_{(\varphi)}]_{a_n}^c G(k_n + q)_c^b \Gamma_b \right) \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \varepsilon(k_j)^{a_j} \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}),$$

$$M''[r]_n = i^{N-1} \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \varepsilon(k_j)^{a_j} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \times \quad (2.101)$$

$$\left( \varepsilon(k)^{a_n} r(q) [\Gamma''_{(r)}]_{a_n} \right) \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \varepsilon(k_j)^{a_j} \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}),$$

где  $\varphi$  в первых двух выражениях – это либо  $h$ , либо  $r$ , а  $\varepsilon(k_j)^{a_j}$  – это либо вектор поляризации  $\varepsilon(k_j)^{a_j}$  калибровочного бозона, либо  $h(k_j)$  для бозона Хиггса, и  $G(k_n + q)_c^b$  – это либо пропагатор  $G(k_n + q)_v^\mu$  калибровочного бозона, либо

пропагатор  $G(k_n + q)$  бозона Хиггса. И где для импульсов введены следующие обозначения:

$$p_{n-1} = p_n - k_n \quad (2.102)$$

$$p_{in} = p_N \quad (2.103)$$

$$p_{out} = p_0 - q \quad (2.104)$$

В выражениях (2.99)-(2.101) индекс  $n$  пробегает значения от 1 до  $N$ . В случае древесного процесса, когда начальные и конечные фермионные состояния находятся на массовой поверхности, есть еще диаграмма  $M[\varphi]_0$ :

$$M[\varphi]_0 = i^N \varphi(q) \bar{f}(p_{out}) \Gamma_{(\varphi)} \left[ \prod_{j=1}^N S(p_{j-1}) \varepsilon(k_j)^{a_j} \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}). \quad (2.105)$$

Если добавляемая частица – бозон Хиггса, то  $M[\varphi]_0$  принимает вид

$$M[h]_0 = i^N h(q) \bar{f}(p_{out}) \Gamma_{(h)} \left[ \prod_{j=1}^N S(p_{j-1}) \varepsilon(k_j)^{a_j} \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}). \quad (2.106)$$

Если добавляемая частица – радион, то, используя выражение (2.96) для  $\Gamma_{(r)}$ , а также уравнение Дирака  $\bar{f}(p_{out}) S^{-1}(p_{out}) = 0$ , можно переписать  $M[r]_0$  в виде

$$\begin{aligned} M[r]_0 &= i^N \frac{v}{\Lambda} r(q) \bar{f}(p_{out}) \Gamma_{(h)} \left[ \prod_{j=1}^N S(p_{j-1}) \varepsilon(k_j)^{a_j} \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}) + \\ &+ i^N \frac{i3}{2\Lambda} r(q) \bar{f}(p_{out}) S^{-1}(p_0) \left[ \prod_{j=1}^N S(p_{j-1}) \varepsilon(k_j)^{a_j} \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}) = \\ &= M[h]_0 + i^N \frac{i3}{2\Lambda} \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^N \Gamma_{a_j} S(p_j) \right] \Gamma_{a_N} f(p_{in}). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Рассмотрим теперь произвольное  $n$  от 1 до  $N$ . В случае добавления бозона Хиггса имеем

$$\begin{aligned}
M[h]_n + M'[h]_n &= i^N \left( \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right) h(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \times \\
&\times \left\{ \Gamma_{a_n} S(p_n - q) \Gamma_{(h)} + [\Gamma'_{(\varphi)}]_{a_n}^c G(q+k)_c^b \Gamma_b \right\} \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}).
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Если же добавляется радион, то получается следующая сумма:

$$\begin{aligned}
M[r]_n + M'[r]_n + M''[r]_n &= i^N \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \times \\
&\left\{ \Gamma_{a_n} S(p_n - q) \Gamma_{(r)} + [\Gamma'_{(r)}]_{a_n}^c G(k_n + q)_c^b \Gamma_b - i[\Gamma''_{(r)}]_{a_n} \right\} \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}).
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках в (2.108):

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{a_n} S(p_n - q) \Gamma_{(r)} + [\Gamma'_{(r)}]_{a_n}^c G(k_n + q)_c^b \Gamma_b - i[\Gamma''_{(r)}]_{a_n} = \\
&= \frac{\nu}{\Lambda} \left( \Gamma_{a_n} S(p_n - q) \Gamma_{(h)} + \left\{ \frac{1}{1 + \zeta} \right\} [\Gamma'_{(h)}]_{a_n}^c G(k_n + q)_c^b \Gamma_b \right) + \\
&\quad + \frac{i3}{2\Lambda} \Gamma_{a_n} \left( S(p_n - q) S^{-1}(p_n) - 1 \right).
\end{aligned} \tag{2.110}$$

После подстановки последнего выражения в (2.109) получаем

$$\begin{aligned}
M[r]_n + M'[r]_n + M''[r]_n &= i^N \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \times \\
&\times \frac{\nu}{\Lambda} \left( \Gamma_{a_n} S(p_n - q) \Gamma_{(h)} + \left\{ \frac{1}{1 + \zeta} \right\} [\Gamma'_{(h)}]_{a_n}^c G(k_n + q)_c^b \Gamma_b \right) \times \\
&\times \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}) + \\
&\quad + i^N \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \times \\
&\times \frac{i3}{2\Lambda} \Gamma_{a_n} \left( S(p_n - q) S^{-1}(p_n) - 1 \right) \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in})
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Первое слагаемое в этом выражении по структуре такое же, что в случае бозона Хиггса (выражение (2.108)), полностью совпадает с ним при  $\zeta=0$  и  $\Lambda=\nu$ . Второе слагаемое после раскрытия круглых скобок при  $n < N$  приобретает вид

$$\begin{aligned}
& i^N \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \times \\
& \times \frac{i3}{2\Lambda} \Gamma_{a_n} \left( S(p_n - q) S^{-1}(p_n) - 1 \right) \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}) = \\
& = \frac{3i^{N+1}}{2\Lambda} \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^n \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \Gamma_{a_{n+1}} \left[ \prod_{j=n+2}^N S(p_{j-1}) \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}) \quad (2.112) \\
& - \frac{3i^{N+1}}{2\Lambda} \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \Gamma_{a_n} \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}) = \\
& = U_{n+1} - U_n.
\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned}
U_n & \equiv i^N \frac{i3}{2\Lambda} \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \times \\
& \times \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \Gamma_{a_n} \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}). \quad (2.113)
\end{aligned}$$

Выражение для  $U_1$  можно переписать в виде

$$U_1 = i^N \frac{i3}{2\Lambda} \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{N-1} \Gamma_{a_j} S(p_j) \right] \Gamma_{a_N} f(p_{in}). \quad (2.114)$$

Вспоминая выражение (2.107) для  $M[r]_0$ , получаем

$$M[r]_0 = M[h]_0 + U_1. \quad (2.115)$$

Для  $n = N$  необходимо отдельно рассмотреть случай реальных начальных и конечных фермионов и случай фермионной петли. В первом случае выполняется уравнение движения  $S^{-1}(p_N) f(p_{in}) = 0$ , поэтому

$$\begin{aligned}
& i^N \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \times \\
& \quad \times \frac{i3}{2\Lambda} \Gamma_{a_n} \left( S(p_n - q) S^{-1}(p_n) - 1 \right) f(p_{in}) = \\
& = -i^N \frac{i3}{2\Lambda} \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{N-1} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \Gamma_{a_N} f(p_{in}) = -U_N.
\end{aligned} \tag{2.116}$$

В результате, окончательное выражение для древесного случая получается следующим:

$$\begin{aligned}
& M[r]_0 + \sum_{n=1}^N (M[r]_n + M'[r]_n + M''[r]_n) = \\
& = \frac{v}{\Lambda} M[h]_0 + \frac{v}{\Lambda} \sum_{n=1}^N \left( M[h]_n + \left\{ \frac{1}{1+\zeta} \right\} M'[h]_n \right) + \\
& \quad + U_1 + (U_2 - U_1) + \dots + (U_N - U_{N-1}) - U_N = \\
& = \frac{v}{\Lambda} M[h]_0 + \frac{v}{\Lambda} \sum_{n=1}^N \left( M[h]_n + \left\{ \frac{1}{1+\zeta} \right\} M'[h]_n \right).
\end{aligned} \tag{2.117}$$

#### 2.2.4 Общий случай: сокращение в случае фермионной петли

В случае фермионной петли переместим  $\bar{f}(p_{out})$  в конец матричного произведения (со взятием следа от последнего<sup>3</sup>), используем тот факт, что теперь  $p_{out} = p_{in}$ , воспользуемся тождеством  $f(p_{in}) \bar{f}(p_{out}) = S(p_{in}) = S(p_{out})$  и получим выражение

$$\begin{aligned}
& i^N \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \bar{f}(p_{out}) \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \times \\
& \quad \times \frac{i3}{2\Lambda} \Gamma_{a_n} \left( S(p_n - q) S^{-1}(p_n) - 1 \right) \left[ \prod_{j=n+1}^N S(p_{j-1}) \Gamma_{a_j} \right] f(p_{in}) = \\
& = i^N \frac{i3}{2\Lambda} Sp \left\{ \left[ \prod_{j=1}^N \varepsilon(k_j)^{a_j} \right] r(q) \left[ \prod_{j=1}^N \Gamma_{a_j} S(p_j - q) \right] \right\} - U_N.
\end{aligned} \tag{2.118}$$

<sup>3</sup> Т.е., воспользуемся матричным тождеством  $x^T My = Sp [Myx^T]$

Легко убедиться, что первое слагаемое в правой части этого выражения равно  $U_1$ . Для этого переместим последний пропагатор под знаком следа в начало произведения и сдвинем бегущий в петле импульс на величину  $q$ . Теперь, как и в случае фермионов на массовой поверхности, получается выражение (2.117).

### 2.3 Выводы по главе 2

Следствием формы взаимодействия радиона с полями СМ является то, что для поля радиона помимо членов юкавского взаимодействия с фермионами в лагранжиане появляются члены взаимодействия с кинетическими членами фермионов. Поскольку обычно процессы рождения радиона описываются диаграммами Фейнмана, в которых могут присутствовать фермионы вне массовой поверхности, следует ожидать существенного различия между структурами амплитуд таких процессов и амплитуд аналогичных процессов с участием скалярных частиц (например, бозона Хиггса), взаимодействующих с фермионами только через вершины юкавского типа. К такому же выводу приводит и наличие дополнительных четыреххвостых вершин взаимодействия радиона с фермионами в точке испускания фермионной линией векторного или скалярного бозонов.

Однако, несмотря на более сложную структуру взаимодействия и наличие дополнительных вершин, все дополнительные вклады устроены таким образом, что либо полностью взаимно сокращаются, либо дают в сумме выражения такие, как и для бозона Хиггса, приводя, таким образом, всего лишь к изменению констант связи, но не структуры амплитуд. Такое сокращение было продемонстрировано на частных примерах ( $e^+e^- \rightarrow Zr$ ,  $\bar{f}f \rightarrow hr$ ,  $gg \rightarrow hr$ ) и доказано в общем случае, как на древесном уровне, так и в случае петель. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Амплитуды процессов рождения одиночного радиона в сопровождении произвольного количества калибровочных бозонов имеют ту же структуру, что и амплитуды аналогичных процессов с рождением одиночного бозона Хиггса и

получаются заменой в последних массы бозона Хиггса  $m_h$  на массой радиона  $m_r$ , а также вакуумного среднего  $v$  обратной константой взаимодействия радиона  $\Lambda$ .

Амплитуда ассоциативного рождения радиона и произвольного числа  $N_h$  бозонов Хиггса и  $N_V$  калибровочных бозонов имеет ту же структуру, что и амплитуда рождения  $N_h + 1$  бозонов Хиггса с тем же числом калибровочных бозонов. Выражение для первого процесса можно получить из выражения для второго, заменив одно хиггсовское вакуумное среднее  $v$  в факторе  $v^{N_h+1}$  константой  $\Lambda$ , а также умножив константу самодействия третьей степени поля бозона Хиггса на фактор  $1+\zeta$ . При равенстве масс двух скаляров и констант  $\Lambda = v$  амплитуды процессов будут выглядеть одинаково несмотря на наличие в лагранжиане взаимодействия поля радиона с членами, содержащими ковариантные производные спинорных полей и поля Хиггса.

Таким образом, в рассмотренном типе процессов невозможно отличить модель с радионом и бозоном Хиггса от модели без радиона, но с переопределенной константой самодействия третьей степени поля бозона Хиггса.

Полученный результат интересен, в частности, тем, что не зависит от «происхождения» радиона и справедлив для любого скалярного поля, линейно взаимодействующего со следом тензора энергии-импульса полей Стандартной модели. В качестве примеров теорий с такими скалярными полями можно привести скалярно-тензорные теории гравитации (в частности, теорию Бранса-Дикке) или теории с дилатоном, в которых последний взаимодействует с материей указанным образом.



### Глава 3. Нелинейные самодействие и взаимодействие радиона с полями Стандартной модели

В предыдущей главе было показано, что процессы рождения одиночного радиона в сопровождении произвольного количества векторных бозонов как на древесном, так и на петлевом уровне с точностью до замены масс и константы взаимодействия совпадают с аналогичными процессами с рождением бозона Хиггса. Более того, для процессов с ассоциативным рождением радиона и бозона Хиггса имеет место аналогичный результат (с точностью до замены масс, константы взаимодействия и константы самодействия в треххвостой вершине самодействия бозона Хиггса). Современные экспериментальные данные исключают существование скалярных частиц с массами меньше 1 ТэВ, но не исключают существования скалярных частиц с массами порядка бозона Хиггса с константами взаимодействия с полями СМ меньшими, чем у бозона Хиггса. Следовательно, если масса радиона близка к массе бозона Хиггса, имеет место проблема идентификации участвующих в процессах скалярных частиц. Это, в свою очередь, делает актуальным более подробное изучение возможных свойств радиона, в частности, получение потенциала самодействия радиона более высоких степеней, чем вторая, а также нелинейных членов взаимодействия радиона с полями СМ, как это сделано нами в работе [44].

#### 3.1 Эффективный четырехмерный лагранжиан радиона четвертой степени

Оставим в разложениях тензорного и скалярного полей только нулевую моду гравитационного поля и поле радиона. Таким образом, с точностью до членов порядка  $1/M^3$  поля  $g_{MN}$  и  $\phi$  представляются в виде

$$g_{\mu\nu}(x, y) = e^{-2A(y)} (1 - \chi(y)r(x)) g_{\mu\nu}^{(0)}(x), \quad g_{\mu\nu}^{(0)}(x) = \eta_{\mu\nu} + N_0 b_{\mu\nu}^{(0)}(x), \quad (3.1)$$

$$g_{4\mu} = 0, \quad (3.2)$$

$$g_{44}(x, y) = 1 + 2\chi(y)r(x), \quad (3.3)$$

$$\phi(x, y) = \bar{\phi}(y) + \Phi(y)r(x), \quad (3.4)$$

где

$$\chi(y) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2M^3}} e^{2A(y)} \Psi_1(y), \quad (3.5)$$

$$\Phi(y) \equiv \frac{3\sqrt{2M^3} e^{2A(y)}}{2\bar{\phi}'(y)} \Psi_1'(y). \quad (3.6)$$

Зависящие от пятой координаты функции  $A$ ,  $\bar{\phi}$  и  $\Psi_1$  имеют вид (1.49), (1.48) и (1.66). Подставив в гравитационную часть многомерного лагранжиана (1.39) выражения (3.1)-(3.4), получим

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R[g] = & \partial^\mu \left[ e^{-2A} \sqrt{-g^{(0)}} g_{\mu\nu}^{(0)} \frac{(1+8\chi r)\chi}{\sqrt{1+2\chi r}} \partial^\nu r \right] + \\ & -\partial_4 \left[ e^{-2A} \sqrt{-g^{(0)}} \frac{4(1-\chi r)\chi}{\sqrt{1+2\chi r}} \partial_4 (e^{-2A}(1-\chi r)) \right] + \\ & + \sqrt{-g^{(0)}} \left\{ \frac{3}{\sqrt{1+2\chi r}} (e^{-2A}(1-\chi r))'^2 - e^{-2A} \frac{3(1-4\chi r)\chi^2}{2\sqrt{1+2\chi r}(1-\chi r)} g_{\mu\nu}^{(0)} \partial^\mu r \partial^\nu r \right\} + \\ & e^{-2A}(1-\chi r)\sqrt{1+2\chi r}\sqrt{-g^{(0)}}R[g^{(0)}]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Первое слагаемое в формуле (3.7) представляет собой полную четырехмерную дивергенцию, поэтому в получаемом после редукции эффективном четырехмерном действии отбрасывается. Второе слагаемое представляет собой производную по пятой координате от некоторой функции, периодической по этой координате (так как дополнительное измерение представляет собой орбифолд  $S^1/Z_2$ , то есть окружность длиной  $2L$  с дополнительными условиями симметрии, см. главу 1). Поэтому интеграл от него по пятой координате на интервале  $(-L, L]$  будет равен нулю, а значит в эффективное действие он вклада не дает. Третье и четвертое слагаемые в (3.7) описывают нелинейное самодействие радиона.

Последнее слагаемое в формуле (3.7) представляет собой произведение кривизны четырехмерного пространства  $R[g^{(0)}]$  с метрическим тензором  $g_{\mu\nu}^0$  и

некоторой функции от поля радиона  $r$ . После интегрирования по пятой координате это слагаемое будет описывать неминимальное взаимодействие поля радиона с четырехмерной гравитацией, в низшем приближении описываемое выражением вида  $\lambda r^2 R$ , с некоторой константой  $\lambda$  порядка единицы. Такие члены несущественны в настоящую эпоху для процессов с участием полей СМ на масштабах порядка ТэВ. Поскольку процесс эволюции ранней Вселенной не является предметом исследования настоящей диссертации, то подобные взаимодействия мы здесь не рассматриваем и ограничиваемся только не зависящей от радиона частью

$$e^{-2A} \sqrt{-g^{(0)}} R[g^{(0)}]. \quad (3.8)$$

Это слагаемое позволяет вывести четырехмерную гравитационную постоянную способом альтернативным тому, что был представлен в главе 1. А именно, в нулевом порядке по  $\chi r$  имеем:

$$2M^3 \int_{-L}^L e^{-2A} \sqrt{-g^{(0)}} R[g^{(0)}] dy \equiv 2M_{Pl}^2 \sqrt{-g^{(0)}} R[g^{(0)}], \quad (3.9)$$

откуда получим

$$M_{Pl}^2 = M^2 \int_{-L}^L e^{-2A} dy. \quad (3.10)$$

Используя для  $A$  приближение (1.62), можно вычислить интеграл в формуле (3.10)

$$M_{Pl}^2 = \frac{e^{2\tilde{k}L} - 1}{\tilde{k}} M^3 \approx \frac{M^3}{\tilde{k}} e^{2\tilde{k}L}. \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) совпадает с формулой для планковского масштаба  $\kappa_0 \equiv 1/\sqrt{2M_{Pl}^2}$ , полученной в конце главы 1, а также с аналогичными выражениями, приведенными в других работах, см., например, обсуждение и цитируемую литературу в [36, 37].

Подставляя в скалярную часть пятимерного лагранжиана (1.39) выражения (3.1)-(3.4), получим

$$e^{-4A}(1-\chi r)^2 \sqrt{-g^{(0)}} \sqrt{1+2\chi r} \left[ \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{e^{2A}}{1-\chi} g_{\mu\nu}^{(0)} \partial^\mu r \partial^\nu r + \frac{(\bar{\Phi}' + \Phi' r)^2}{2(1+2\chi r)} \right] + \quad (3.12)$$

$$+ e^{-4A}(1-\chi r)^2 \sqrt{-g^{(0)}} \left\{ \lambda_0 (\bar{\Phi} + \Phi r) \delta(y) + \lambda_L (\bar{\Phi} + \Phi r) \delta(y-L) \right\}.$$

Складывая (3.7) и (3.12) получим выражение для эффективного четырехмерного действия радиона в виде

$$S_{eff} = \int \left[ -P(r) g_{(0)}^{\mu\nu} \partial_\mu r \partial_\nu r - U(r) \right] d^4x, \quad (3.13)$$

где  $P(r)$  и  $U(r)$  являются некоторыми неполиномиальными функциями от  $r$  и имеют следующие неявные представления:

$$P(r) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left\{ 2M^3 \frac{3(1-4\chi r)\chi^2}{\sqrt{1+2\chi r}(1-\chi r)} + (1-\chi r)\sqrt{1+2\chi r}\Phi^2 \right\} e^{-2A} dy, \quad (3.14)$$

$$U(r) = \int_{-L}^L \left\{ \frac{6M^3}{\sqrt{1+2\chi r}} \left( e^{-2A}(1-\chi r) \right)^2 + \right. \quad (3.15)$$

$$\left. -e^{-4A}(1-\chi r)^2 \sqrt{1+2\chi r} \left[ \frac{(\varphi + \Phi r)'^2}{2(1+2\chi r)} + V(\varphi + \Phi r) \right] + \right.$$

$$\left. -e^{-4A}(1-\chi r)^2 \left[ \lambda_0 (\varphi + \Phi r) \delta(y) + \lambda_L (\varphi + \Phi r) \delta(y-L) \right] \right\} dy.$$

Так как  $\chi$  и  $\Phi$  представляют собой некоторые сложные функции от пятой координаты, точное аналитическое выражение для  $P(r)$  и  $U(r)$  получить невозможно. Поэтому будем искать разложения для  $P(r)$  и  $U(r)$  в степенные ряды по  $r$ , приведенные к безразмерному виду с помощью некоторых размерных параметров. Для этого в (3.14) и (3.15) разложим в подынтегральных выражениях неполиномиальные функции от  $1+2\chi r$  и  $1-\chi r$  в ряды по  $\chi r$ , полагая  $|2\chi r| < 1$ . Поскольку  $\chi$  принимает максимальное значение при  $y=L$ , а из (3.5) и (1.69) следует

$2\chi(L) = \frac{1}{\sqrt{2M^3}} \Psi_1(L) = \frac{4}{\Lambda}$ , то получаем следующее ограничение для амплитуды поля радиона:

$$|r| < \frac{4}{\Lambda} \quad (3.16)$$

Ниже будет показано, что минимум потенциала радиона реализуется при  $r=0$ , а значит отсутствуют условия для существенного отклонения поля радиона от нулевого значения, поэтому использованное приближение выполняется.

В главе 1 (см. также [36, 37].) было выписано эффективное действие в квадратичном по  $r$  приближении с линейными по  $r$  членами взаимодействия с полями СМ и константой взаимодействия  $\Lambda^{-1}$ . Следующий член взаимодействия с полями СМ, квадратичный по  $r$ , имеет порядок  $\Lambda^{-2}$ . Именно этим порядком мы ограничимся в настоящем исследовании. Слагаемые самодействия четвертой степени по  $r$  в кинетическом члене имеют порядок  $\Lambda^{-2}$ , а в потенциальном  $\tilde{k}^2\Lambda^{-2}$ . Таким образом, обобщая результаты работ [36, 37], мы выпишем эффективное действие для радиона с точностью до четвертой степени по  $r$  для самодействия радиона и второй степени для взаимодействия радиона с полями СМ. С учетом сказанного, функции  $P(r)$  и  $U(r)$  представим в виде

$$P(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2, \quad (3.17)$$

$$U(r) = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \beta_3 r^3 + \beta_4 r^4, \quad (3.18)$$

где коэффициенты  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  определяются следующими выражениями:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \{6M^3\chi^2 + \Phi^2\} e^{-2A} dy, \quad (3.19)$$

$$\alpha_1 = -12M^3 \int_{-L}^L \chi^3 e^{-2A} dy, \quad (3.20)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} \int_{-L}^L \{18M^3\chi^4 - 3\Phi^2\chi^2\} e^{-2A} dy, \quad (3.21)$$

$$\beta_0 = \int_{-L}^L \left\{ 24M^3 A'^2 - \frac{\bar{\Phi}'^2}{2} - V(\bar{\Phi}) - \left( 12M^3 k - \frac{u}{2} \bar{\Phi}^2 \right) Z'' \right\} e^{-4A} dy \quad (3.22)$$

$$\beta_1 = \int_{-L}^L \left\{ \left[ 2 \left( 24kM^3 - u\bar{\Phi}^2 \right) (\delta(y) - \delta(y-L)) + V(\bar{\Phi}) + \frac{3}{2} \bar{\Phi}'^2 - 72M^3 A'^2 \right] \chi + \right. \\ \left. + 24M^3 A' \chi' - \frac{dV(\bar{\Phi})}{d\bar{\Phi}} \Phi - \bar{\Phi}' \Phi' + u\bar{\Phi} \Phi Z'' \right\} e^{-4A} dy. \quad (3.23)$$

$$\beta_2 = - \int_{-L}^L \left\{ 3M^3 \chi^2 + \frac{1}{2} \Phi^2 \right\} \mu^2 e^{-2A} dy, \quad (3.24)$$

$$\beta_3 = \int_{-L}^L \left\{ \frac{9M^3}{u\bar{\Phi}} \left( 2M^3 \frac{\mu^2 e^{2A}}{u\bar{\Phi}} + u\bar{\Phi} \right) \chi^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2u\bar{\Phi}} \left( u\bar{\Phi}^2 - 12M^3 (2k+u) \right) \chi^2 \Phi + 2\chi \Phi^2 \right\} \mu^2 e^{-2A} dy, \quad (3.25)$$

$$\beta_4 = \int_{-L}^L \left\{ \left[ -M^6 \frac{63\mu^4 e^{4A}}{u^2 \bar{\Phi}^2} - 15M^3 \mu^2 e^{2A} + 54M^3 k^2 - \frac{u}{16} \left( 72k + 2u - \frac{3u}{2M^3} \bar{\Phi}^2 \right) \bar{\Phi}^2 \right] \chi^4 + \right. \\ \left. + \left[ M^3 \frac{\mu^2 e^{2A}}{u\bar{\Phi}} \left( 12k + 21u - \frac{u}{2M^3} \bar{\Phi}^2 \right) + \frac{u^2}{2} \bar{\Phi} \right] \chi^3 \Phi + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left[ -6\mu^2 e^{2A} + 2(6k-u)u - \frac{u^2}{2M^3} \bar{\Phi}^2 \right] \chi^2 \Phi^2 + \frac{1}{24M^3} u^2 \Phi^4 \right\} e^{-4A} dy. \quad (3.26)$$

Далее покажем, как выглядит взаимодействие поля радиона с полями СМ с точностью до второго порядка. Взаимодействие первого порядка по флуктуациям метрики было выписано в главе 1 (формула (1.72)); перепишем здесь это выражение только для поля радиона:

$$L_{rCM} = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \chi r \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \delta(y-L) dy = \frac{1}{2} \chi(L) r \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\Lambda} r T_{\mu}^{\mu}, \quad (3.27)$$

откуда следует

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{2} \chi(L), \quad (3.28)$$

что совпадает с общим выражением (1.74) для  $\kappa_m$  при  $n=1$ , выписанным в главе 1.

Следующий порядок взаимодействия поля радиона с полями СМ можно было бы получить, варьируя  $\sqrt{-g}T_\mu^\mu$  по метрике еще раз. Однако, можно поступить проще и разложить исходное выражение для  $\sqrt{-\tilde{g}}L_{SM}$  непосредственно по входящему в него полю  $r$ . Для этого выпишем лагранжианы на бране в точке  $y=L$  для скалярного ( $h$ ), векторного ( $V_\mu$ ) и спинорного ( $\psi$ ) полей для случая метрики  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , индуцированной из (3.1) с  $b_{\mu\nu}^0$ . Для скалярного поля получаем

$$\begin{aligned}\sqrt{-\tilde{g}}L_{h,\tilde{g}} &= \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} h_{,\mu} h_{,\nu} - U(h) \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2A} (1-\chi r) \eta^{\mu\nu} h_{,\mu} h_{,\nu} - e^{-4A} (1-\chi r)^2 U(h) = \\ &= L_{h,\eta} + r\chi \left[ \frac{1}{2} e^{-2A} \eta^{\mu\nu} h_{,\mu} h_{,\nu} + 2e^{-4A} U(h) \right] - \chi^2 r^2 e^{-4A} U(h),\end{aligned}\quad (3.29)$$

где  $L_{h\tilde{g}}$  – лагранжиан с метрикой  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ,  $L_{h\eta}$  – тот же лагранжиан с плоской метрикой  $\eta^{\mu\nu}$ , а  $U(h)$  – скалярный потенциал. Поскольку на бране  $y=L$  функция  $A(L)=0$ , то экспоненты в (3.29) исчезают. Как видим, точное взаимодействие радиона со скалярным полем имеет вид

$$L_{rh} = -\frac{r}{\Lambda} T_\mu^\mu(h) - \frac{4r^2}{\Lambda^2} U(h). \quad (3.30)$$

Аналогичным образом, для векторного поля имеем:

$$\begin{aligned}\sqrt{-\tilde{g}}L_{V,\tilde{g}} &= \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ -\frac{1}{4} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{\mu_V^2}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} V_\mu V_\nu \right\} = \\ &= -\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + e^{-2A} (1-\chi r) \frac{\mu_V^2}{2} \eta^{\mu\nu} V_\mu V_\nu.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Как видим, точное взаимодействие радиона с векторным полем ограничивается одним лишь линейным членом (члены аномального типа, аналогичные тем, что были выписаны в (2.2), здесь не рассматриваем):

$$L_{rV} = -\frac{r}{\Lambda} T_\mu^\mu(V). \quad (3.32)$$

Наконец, для лагранжиана спинорного поля имеет место следующее выражение:

$$\sqrt{-\tilde{g}}L_{\psi,\tilde{g}} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (\nabla_\mu \psi) - \frac{i}{2} (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \mu_\psi \bar{\psi} \psi \right], \quad (3.33)$$

где под  $\nabla_\mu \psi$  подразумевается полная ковариантная производная спинорного поля (включающую как метрическую (реперную), так и калибровочную части). Однако, для метрики, отличающейся от метрики пространства–времени Минковского лишь на некоторый конформный множитель, имеет место равенство

$$\bar{\psi} \gamma^\mu (\nabla_\mu \psi) - (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = \frac{e^A}{\sqrt{1-\chi r}} \bar{\psi} \gamma^\mu (D_\mu \psi) - (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi, \quad (3.34)$$

где  $D_\mu \psi$  – обычная ковариантная производная (без реперной части). В результате получаем:

$$\sqrt{-\tilde{g}}L_{\psi,\tilde{g}} = e^{-3A} (1-\chi r)^{3/2} \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (D_\mu \psi) - \frac{i}{2} (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right) + e^{-4A} (1-\chi r)^2 \mu_\psi \bar{\psi} \psi. \quad (3.35)$$

Как видим, точное выражение для взаимодействия радиона со спинорным полем имеет неполиномиальный вид. Разлагая по  $r$  и удерживая члены до второй степени по  $r$  включительно, получаем

$$L_{r\psi} = -\frac{r}{\Lambda} T_\mu^\mu(\psi) + \frac{r^2}{\Lambda^2} \left[ \frac{3}{4} \left( i \bar{\psi} \gamma^\mu (D_\mu \psi) - i (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right) + 4 \mu_\psi \bar{\psi} \psi \right]. \quad (3.36)$$

Вернемся теперь к выражениям (3.19)-(3.26) для параметров самодействия радиона. Рассмотрим выражение (3.19) для  $\alpha_0$ . Подставив в него выражения (3.5) и (3.6) для  $\chi$  и  $\Phi$ , получим



$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{8} \int_{-L}^L \left\{ 3e^{2A}\Psi^2 + 18M^3 \frac{e^{2A}}{\bar{\phi}^2} \Psi'^2 \right\} dy = \\
&= \frac{1}{8} \int_{-L}^L \left\{ 3e^{2A}\Psi^2 - 18M^3 \Psi \left( \frac{e^{2A}}{\bar{\phi}^2} \Psi' \right)' \right\} dy = \\
&= \frac{9}{4} M^3 \int_{-L}^L \left\{ \frac{e^{4A}}{\bar{\phi}^2} \mu_0^2 \left( 1 - \frac{2}{\beta_1^2 + u} \delta(y) - \frac{2}{\beta_2^2 - u} \delta(y-L) \right) \Psi^2 \right\} dy.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Поскольку  $\alpha_0 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu r \partial_\nu r$  – стандартный кинетический член свободного скалярного поля, то  $\alpha_0$  должно быть равно  $1/2$ , что дает нам условие нормировки для  $\Psi$ :

$$\frac{9M^3\mu^2}{2} \int_{-L}^L \left\{ \frac{e^{4A}}{\bar{\phi}^2} \left( 1 - \frac{2}{\beta_1^2 + u} \delta(y) - \frac{2}{\beta_2^2 - u} \delta(y-L) \right) \Psi^2 \right\} dy = 1. \tag{3.38}$$

Далее, подставив в выражение для  $\beta_0$  формулы (1.48) и (1.49) для  $\phi$  и  $A$  соответственно, можно убедиться в том, что  $\beta_0 = 0$ , то есть эффективная четырехмерная космологическая постоянная в этой модели равна нулю. Аналогичным образом можно убедиться в том, что  $\beta_0 = 1$ , как это и должно быть для лагранжиана флуктуации над фоном, являющимся решением уравнений движения. Наконец, выражение для  $\beta_2$  с точностью до множителя  $-\mu^2$  совпадает с  $\alpha_0$ , поэтому

$$\beta_2 = -\frac{\mu^2}{2}, \tag{3.39}$$

как и должно быть для квадратичной части потенциала скалярного поля массы  $\mu$ .

К сожалению, выражения для  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{\beta}_3$  и  $\bar{\beta}_4$  не имеют аналитических выражений в виде функций от входящих в них многомерных параметров. Поэтому представим их приближенные выражения в виде первых членов разложений в ряды по безразмерным малым комбинациям теории:

$$\xi = \frac{\mu}{\tilde{k}}, \quad \sigma = \frac{u}{\tilde{k}}, \quad \rho = \frac{\phi_0}{2M^3}. \quad (3.40)$$

Поскольку константы  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  размерные, имеет смысл перейти к некоторым безразмерным выражениям, полученным из исходных с помощью подходящего размерного фактора. Такими факторами являются константа взаимодействия радиона с полями СМ  $\Lambda^{-1}$ , а также масса самого радиона  $\mu$ . В результате получим значения безразмерных констант  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{\beta}_3$  и  $\bar{\beta}_4$  в выражении для эффективного лагранжиана радиона, записанного в виде

$$L_r = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{\alpha}_1}{\Lambda} r + \frac{\bar{\alpha}_2}{\Lambda^2} r^2\right) \eta^{\mu\nu} r_{,\mu} r_{,\nu} - \mu^2 \left(\frac{1}{2} r^2 + \frac{\bar{\beta}_3}{\Lambda} r^3 + \frac{\bar{\beta}_4}{\Lambda^2} r^4\right). \quad (3.41)$$

Однако, как будет показано ниже, коэффициент  $\bar{\beta}_4$  имеет порядок  $\tilde{k}^2/\mu^2$ , а значит для  $\beta_4$  более подходящей является нормализация  $\beta_4 = \frac{\tilde{k}^2}{\Lambda^2} \bar{\beta}'_4$ . Поэтому далее будут использовать обозначение со штрихом для констант, нормированных на  $\tilde{k}$ , в отличие от аналогичных обозначений без штриха для констант, нормированной на  $\mu$ .

Выражения для безразмерных констант  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{\beta}_3$  и  $\bar{\beta}_4$  даже в низших порядках по комбинациям (3.40) имеют довольно громоздкий вид. В Приложении А представлены выражения для этих коэффициентов, а также константы  $\Lambda^{-1}$  с точностью до  $O(\sigma^3)$  и  $O(\xi^3)$ . Здесь же представим выражение для эффективного четырехмерного лагранжиана радиона с точностью до нулевого порядка по указанным комбинациям:

$$L_r = -\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\Lambda} r + \frac{1}{\Lambda^2} r^2\right) \eta^{\mu\nu} r_{,\mu} r_{,\nu} - \frac{\mu^2}{2} r^2 - \frac{5\mu^2}{2\Lambda} r^3 - \frac{1}{\Lambda^2} \left(18\tilde{k}^2 - \frac{5}{3}\mu^2\right) r^4. \quad (3.42)$$

Как видно из этой формулы, при учете нелинейных взаимодействий поля радиона его кинетический член имеет нестандартный вид. Существует нелинейное преобразование поля радиона, приводящее кинетический член к каноническому виду. А именно, введем новое скалярное поле  $\hat{r}$ , для которого выполняется условие

$$P(r)\eta^{\mu\nu}r_{,\mu}r_{,\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\hat{r}_{,\mu}\hat{r}_{,\nu}. \quad (3.43)$$

Для  $P(r) = \frac{1}{2} + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2$  имеем

$$\begin{aligned} \hat{r} = \int_0^r \sqrt{\frac{1}{2} + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2} dr = & \frac{(\alpha_1 + 2\alpha_2 r) \sqrt{2(1 + 2\alpha_1 r + 2\alpha_2 r^2)} - \alpha_1 \sqrt{2}}{8\alpha_2} + \\ & - \frac{\alpha_1^2 - 2\alpha_2}{8\alpha_2^{3/2}} \ln \left( \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 r + \sqrt{2\alpha_2(1 + 2\alpha_1 r + 2\alpha_2 r^2)}}{\alpha_1 + \sqrt{2\alpha_2}} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

К сожалению, аналитического выражения  $r$  через  $\hat{r}$  не существует. Поэтому будем использовать приближенное выражение  $r$  через  $\hat{r}$ . С точностью до  $\hat{r}^3$  можно получить следующее разложение:

$$r = \hat{r} - \frac{\alpha_1}{2} \hat{r}^2 + \frac{1}{3} (2\alpha_1^2 - \alpha_2) \hat{r}^3 + \dots \quad (3.45)$$

Третьего порядка в разложении (3.45) достаточно, чтобы получить выражение для потенциала  $U$  с точностью до четвертой степени по  $\hat{r}$ :

$$\begin{aligned} U(r) = \mu^2 \left\{ \frac{1}{2} r^2 + \frac{\bar{\beta}_3}{\Lambda} r^3 + \frac{\bar{\beta}_4}{\Lambda^2} r^4 \right\} = \\ = \frac{\mu^2}{2} \hat{r}^2 + \frac{\mu^2}{\Lambda} \left( \bar{\beta}_3 - \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \right) \hat{r}^3 + \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \left( \bar{\beta}_4 - \frac{3\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_3}{2} + \frac{19\bar{\alpha}_1^2 - 8\bar{\alpha}_2}{24} \right) \hat{r}^4 \end{aligned} \quad (3.46)$$

С точностью до нулевого порядка по комбинациям  $\xi$  и  $\sigma$  можем записать

$$U(\hat{r}) = \left\{ \frac{\mu^2}{2} \hat{r}^2 + \frac{\mu^2}{\Lambda} \left( \frac{5}{2} + e^{2Lu} \right) \hat{r}^3 + \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \left( \frac{47}{12} e^{2Lu} + \frac{19}{4} \right) \hat{r}^4 \right\} + \frac{18\tilde{k}^2}{\Lambda^2} \hat{r}^4. \quad (3.47)$$

Заметим, что фактор  $\tilde{k}^2/\Lambda^2$  при  $\hat{r}^4$  вне фигурных скобок больше аналогичного фактора в фигурных скобках  $\mu^2/\Lambda^2$  на 2-4 порядка (в  $\xi^2$  раз). С учетом соотношения (3.11) между массой Планка и фундаментальным энергетическим масштабом можем получить выражение

$$\frac{18\tilde{k}^2}{\Lambda^2} \approx \frac{18}{\Lambda^2 L^2} \ln^2 \left( \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{M_{Pl}}{\Lambda} \right). \quad (3.48)$$

Например, при  $\Lambda \sim 10$  ТэВ и  $L \sim 10$  ТэВ<sup>-1</sup> получаем оценку

$$\tilde{k} \sim 3.3 \text{ ТэВ} \quad \frac{18\tilde{k}^2}{\Lambda^2} \sim 1.9,$$

А при  $\Lambda \sim 20$  ТэВ и  $L \sim 20$  ТэВ<sup>-1</sup> получаем

$$\tilde{k} \sim 1.6 \text{ ТэВ} \quad \frac{18\tilde{k}^2}{\Lambda^2} \sim 0.11.$$

До настоящего момента предполагалось, что значение параметров  $\tilde{k}$  и  $\Lambda$  находятся в интервале от нескольких единиц до нескольких десятков ТэВ. Если дополнительно предположить, что полученная эффективная теория должна быть пертурбативной, то значение  $\beta_4$  не должно превосходить некоторой максимальной величины  $\beta_{4\max}$ , что дает дополнительное ограничение на соотношение параметров  $\tilde{k}$  и  $\Lambda$ :

$$\tilde{k} < \Lambda \sqrt{\beta_{4\max}/18}. \quad (3.49)$$

Параметр самодействия  $\lambda_3 \equiv (\mu^2/\Lambda)\tilde{\beta}_3$  при кубическом члене  $\hat{r}^3$  имеет размерность массы, а параметр  $\lambda_4 = (\mu^2/\Lambda^2)\tilde{\beta}_4 + (\tilde{k}^2/\Lambda^2)\tilde{\beta}'_4 \approx (\tilde{k}^2/\Lambda^2)\tilde{\beta}'_4$  при члене четвертой степени  $\hat{r}^4$  является безразмерным, поэтому непосредственное сравнение данных величин некорректно. Тем не менее, в определенном смысле значение второго параметра намного больше, чем первого. В амплитудах процессов, описываемых диаграммами с четырьмя внешними радионными линиями, в низкоэнергетическом пределе вклад от древесной диаграммы с двумя треххвостыми вершинами будет пропорционален  $\lambda_3^2/\mu^2$ , а вклад диаграммы с одной четыреххвостой вершиной будет пропорционален  $\lambda_4$ , то есть будет больше в  $(\tilde{k}^2/\mu^2)(\tilde{\beta}'_4/\tilde{\beta}_3^2)$  раз. Большое (по сравнению с  $\lambda_3^2/\mu^2$ ) значение гарантирует также то, что в полученной после редукции эффективной модели радион находится

в истинном минимуме. Действительно, выписанный потенциал четвертой степени помимо минимума, находящегося в нуле, мог бы иметь еще пару минимумов, если бы уравнение

$$\frac{dU}{d\hat{r}} = \left\{ \mu^2 + 3\lambda_3 \hat{r} + 4\lambda_4 \hat{r}^2 \right\} \hat{r} = 0, \quad (3.50)$$

имело больше одного решения. Для этого должен быть положительным дискриминант квадратичного уравнения в фигурных скобках. Однако, это не так:

$$D = 9\lambda_3^2 - 16\lambda_4\mu^2 = 16\mu^2\lambda_4 \left( \frac{9}{16} \frac{\mu^2}{\tilde{k}^2} \frac{\tilde{\beta}_3^2}{\tilde{\beta}_4} - 1 \right) < 0. \quad (3.51)$$

Найденное нелинейное преобразование от  $r$  к  $\hat{r}$  позволяет сформулировать всю полученную после редукции модель в терминах поля  $\hat{r}$  – скалярного поля со стандартным кинетическим членом и полиномиальными потенциалом и членами взаимодействия с полями Стандартной Модели. Однако, в этом нет особой необходимости, так как анализ взаимодействий с полями СМ и полученные результаты о сходстве процессов с участием радиона и бозона Хиггса лучше всего видны при использовании стандартного определения поля радиона, которое применяется во всех работах по этой тематике.

### 3.3 Выводы по главе 3

Полная теория скалярного поля (радиона), возникающего в стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума, включает в себя члены самодействия как в потенциальном, так и в кинетическом членах. Взаимодействие с полями СМ также содержит дополнительные члены, и только взаимодействие с векторными полями ограничивается одним лишь линейным (по радиону) слагаемым. Самодействие радиона имеет неполиномиальный характер, также, как и его взаимодействие со спинорными полями (но не с векторными и скалярными). В настоящей главе был получен приближенный эффективный лагранжиан радиона полиномиального вида четвертой степени по полю (т.е. второго порядка по константе  $\Lambda^{-1}$ ), и в этом же порядке взаимодействие радиона с полями СМ. Этот результат обобщает результаты предыдущих работ по этой тематике.

Поскольку кинетический член радиона имеет неканонический вид, может возникнуть необходимость приведения его к стандартному виду. В настоящей главе найдена такая замена поля  $r \rightarrow \hat{r}$ , которая позволяет избавиться от первых двух слагаемых самодействия в кинетическом члене, т.е. получить кинетический член стандартного вида с точностью до второго порядка по  $\Lambda^{-1}$ .

Показано также, что полученный в указанном приближении потенциал имеет устойчивый минимум в нуле, т.е. дополнительного спонтанного сдвига поля радиона не происходит. Это говорит о корректности полиномиального разложения вблизи нуля радионной функции. Указано ограничение (формула (3.16)) при котором такое разложение возможно.

В главе 2 было показано сходство процессов с участием радиона с аналогичными процессами с участием бозона Хиггса. Наличие членов самодействия, а также дополнительных членов взаимодействия с полями СМ указывает на то, что в процессах более высоких порядков (по  $\Lambda^{-1}$ ) такое сходство нарушается на уровне амплитуд.

#### **Глава 4. Устойчивость стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума относительно квантовых поправок, вызванных эффектом Казимира**

В моделях с двумя бранами квантовые поля, распространяющиеся в пятимерном пространстве-времени между ними, приводят к появлению эффекта Казимира. В фоновом решении как стабилизированной, так и нестабилизированной RS-модели браны параллельны, и для такой геометрии этот эффект в нестабилизированной RS-модели рассматривался для скалярных, спинорных и векторных полей в работах [48-58] и в некоторых случаях с его помощью достигалась стабилизация размера дополнительного измерения и генерация космологической постоянной.

В большинстве работ по этой тематике в качестве физической характеристики квантовых поправок к фоновому состоянию использовалась энергия Казимира, которая вычислялась с использованием различных схем регуляризации. Более детальную информацию о поправках к фоновому состоянию могут давать локальные наблюдаемые, такие как, например, тензор энергии-импульса. Особое значение имеет его вакуумное среднее, поскольку оно также является источником гравитационного поля в уравнениях Эйнштейна с квантовыми поправками. Вакуумное среднее тензора энергии-импульса для скалярных, спинорных и электромагнитного полей в нестабилизированной RS-модели рассматривалось в работах [59-67].

В настоящей главе рассматривается вопрос об устойчивости фонового решения для метрики и скалярного поля Гольдбергера-Вайза относительно вакуумных квантовых поправок, возникающих вследствие эффекта Казимира. Постановка такого вопроса связана с наблюдением, что если эффект Казимира может приводить к стабилизации расстояния между бранами в нестабилизированной RS-модели, то не исключено, что он может существенно влиять и на фоновое решение стабилизированной модели. В этой главе вычисляется квантовая поправка к тензору энергии-импульса (ТЭИ) модели, возникающая за счет вакуумной энергии калуца-клейновской башни скалярного

поля радиона и демонстрируется, что, во-первых, данный вклад мал по сравнению с величиной ТЭИ классического фонового поля, а, во-вторых, что он не меняет форму фонового решения RS-модели, лишь незначительно изменяя некоторые ее параметры. Также показано, что аналогичная поправка от тензорных мод оказывается сравнимой по порядку величины с вкладом скалярных мод и тоже не влияет на вид фонового решения RS-модели (см. также [45]).

#### 4.1 Уравнения стабилизированной RS-модели с квантовыми поправками

Для полей  $g_{AB}(x, y)$  и  $\phi(x, y)$  можно записать разложение на фоновые решения  $\bar{g}_{\mu\nu}(y)$ ,  $\bar{\phi}(y)$  и малые флуктуации  $h_{AB}(x, y)$ ,  $f(x, y)$  над этими фоновыми решениями. В первом приближении по пятимерной гравитационной константе связи это разложение описывается уравнениями (1.53) и (1.54).

В работе [37] было продемонстрировано, что в стабилизированной RS-модели с учетом наложения калибровочных условий физическими степенями свободы для таких малых флуктуаций следует считать скалярное поле  $\phi(x, y)$  и поперечно-бесследовое тензорное поле  $b_{\mu\nu}$ , задаваемые формулами (1.55). Согласно формуле (1.59), пятимерное скалярное поле  $\phi(x, y)$  может быть разложено по базису волновых функций скалярных мод  $\Psi_n$ , подчиняющихся уравнению (1.60)

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \Psi_n(y), \quad (4.1)$$

при этом скалярные моды  $\phi_n$  удовлетворяют четырехмерному уравнению Клейна-Гордона. Аналогичное разложение по базису из волновых функций тензорных мод  $\Omega_n(y)$  можно проделать и для пятимерного тензорного поля  $b_{\mu\nu}$  (см. формулы (1.58) и (1.63)).

Далее будем квантовать малые флуктуации  $h_{AB}(x, y)$  и  $f(x, y)$  над классическим фоном. Усредняя разложения полей (1.53) и (1.54) по вакууму и учитывая, что в силу свойств операторов рождения и уничтожения вакуумные



средние для малых флуктуаций равны нулю, то есть  $\langle h_{AB} \rangle = 0$  и  $\langle f \rangle = 0$ , получим, что  $\langle g_{AB} \rangle = \bar{g}_{AB}$  и  $\langle \phi \rangle = \bar{\phi}$ .

При усреднении по вакууму уравнений движения получаем

$$\langle G_{AB} \rangle + \kappa^2 \langle T_{AB} \rangle = 0, \quad (4.2)$$

где  $G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2} R g_{AB}$ , есть пятимерный тензор Эйнштейна, а  $T_{AB}$  – тензор энергии-импульса скалярного поля, определяемый следующим образом:

$$T_{AB} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{AB}} = \partial_A \phi \partial_B \phi - g_{AB} \left( \frac{1}{2} g^{PQ} \partial_P \phi \partial_Q \phi - V(\phi) \right) + [\lambda_0(\phi) \delta(y) + \lambda_L(\phi) \delta(y-L)] g_{\mu\nu} \delta_A^\mu \delta_B^\nu. \quad (4.3)$$

Это уравнение можно переписать в виде суммы классической части и квантовой поправки к ней, учитывая разложение полей в форме (1.53) и (1.54), рассматривая малые флуктуации  $h_{AB}(x, y)$  и  $f(x, y)$  как квантовые поля, являющиеся операторами:

$$\bar{G}_{AB} + \kappa^2 \bar{T}_{AB} = -\langle \hat{G}_{AB} \rangle - \kappa^2 \langle \hat{T}_{AB} \rangle, \quad (4.4)$$

где тензоры  $\bar{G}_{AB}$  и  $\bar{T}_{AB}$  имеют тот же самый вид, что и в формулах (4.2) и (4.3), только при этом в выражении (4.4) полевые функции  $g_{AB}(x, y)$  и  $\phi(x, y)$  заменены их вакуумными средними  $\langle g_{AB} \rangle = \bar{g}_{AB}$  и  $\langle \phi \rangle = \bar{\phi}$ . А операторные выражения  $\hat{G}_{AB}$  и  $\hat{T}_{AB}$  могут быть построены из мод  $\varphi_n(x)$  и  $b^n_{\mu\nu}(x)$ , на которые разлагаются физические степени свободы малых флуктуаций  $h_{AB}(x, y)$  и  $f(x, y)$ , над классическим фоном  $\bar{g}_{AB}(y)$  и  $\bar{\phi}(y)$ . Отличие от классической теории состоит в том, что амплитуды указанных мод теперь являются операторами. Кроме того, в отличие от классических уравнений Эйнштейна, правая часть выражения (4.4) может быть не равной нулю. Последнее обстоятельство приводит фактически к тому, что теперь следует решать самосогласованную задачу, так как фоновые

значения теперь следует вычислять с учетом квантовых поправок, которые зависят от спектра квантовых мод, возникающих на данном фоне.

Еще одна особенность уравнения (4.4) состоит в том, что из физических степеней свободы в нем присутствуют как четырехмерные тензорные моды  $b_{\mu\nu}^n$  так и четырехмерные скалярные моды  $\varphi_n$ . Отметим, что физических векторных мод в рассматриваемой теории нет [37]. Скалярные моды присутствуют как в разложении по модам поля  $f(x, y)$ , так и в разложении поля  $h_{AB}(x, y)$ , поэтому даже в низшем приближении первое слагаемое  $\langle \hat{G}_{AB} \rangle$  в правой части уравнения также зависит от скалярных мод  $\varphi_n$ . Заметим, что тензорные моды  $b_{\mu\nu}^n$  также присутствуют в  $\hat{T}_{AB}$ , но поскольку в низшем приближении они входят линейно, то  $\langle \hat{T}_{AB} \rangle$  в этом приближении от них не зависит. Таким образом, разложение правой части уравнения (4.4) на два слагаемых носит чисто формальный характер, а с учетом того, что обе величины являются расходящимися, а регуляризации и перенормировке в общем случае подвергается весь комплекс  $-\langle \hat{G}_{AB} \rangle - \kappa^2 \langle \hat{T}_{AB} \rangle$ , в который входят перенормируемые моды, то корректнее было бы записать правую часть уравнения (4.4) в виде:

$$\mathfrak{Z}(b_{\mu\nu}, \varphi) \equiv \langle \hat{G}(b_{\mu\nu}, \varphi) + \kappa^2 \hat{T}(b_{\mu\nu}, \varphi) \rangle. \quad (4.5)$$

Кроме того, в низшем приближении в правой части уравнения (4.4) присутствуют только слагаемые, билинейные по операторам рождения и уничтожения каждой моды (что соответствует замкнутым петлям, не содержащим вершин взаимодействий мод друг с другом), поэтому в низшем приближении можем записать:

$$\mathfrak{Z}(b_{\mu\nu}, \varphi)^{low} = \mathfrak{Z}(b_{\mu\nu}, 0)^{low} + \mathfrak{Z}(0, \varphi)^{low}, \quad (4.6)$$

где

$$\mathfrak{Z}(b_{\mu\nu}, 0)^{low} = \langle \hat{G}(b_{\mu\nu}, 0) + \kappa^2 \hat{T}(b_{\mu\nu}, 0) \rangle, \quad (4.7)$$

$$\mathfrak{T}(0, \varphi)^{low} = \langle \hat{G}(0, \varphi) + \kappa^2 \hat{T}(0, \varphi) \rangle, \quad (4.8)$$

и где в правой части выражения (4.7) содержатся только квадратичные по тензорным модам слагаемые, а в правой части формулы (4.8) оставлены только квадратичные по скалярным модам члены.

Следует ожидать, что величины обоих слагаемых в выражении (4.6) должны быть одного порядка, но при этом различаться видом зависимости от пятой координаты. В настоящей главе будет получено выражение для вклада  $\mathfrak{T}(0, \varphi)^{low}$  скалярных мод в вакуумные квантовые поправки к тензору энергии-импульса, которое возникает при учете эффекта Казимира для двух бран, и произведено его сравнение с классической частью тензора-энергии импульса  $\bar{T}_{AB}$ . Также будут получены аналитическое и численное выражения для плотности вакуумной энергии, что позволит оценить величину соответствующего давления, действующего на браны. Оценки этих величин будут сделаны также для тензорных мод.

## 4.2 Тензор энергии-импульса скалярного поля и плотность энергии четырехмерных скалярных мод

В соответствии с процедурой канонического квантования, теперь следует считать четырехмерные моды  $b_{\alpha\beta}^n$  и  $\varphi_n$  операторами, записав для них разложение по плоским волнам:

$$\hat{\varphi}_n(x) = \int \left[ \hat{a}_n(\mathbf{p}) e^{-i\omega_{n\mathbf{p}}t + i\mathbf{p}\mathbf{x}} + \hat{a}_n^\dagger(\mathbf{p}) e^{i\omega_{n\mathbf{p}}t - i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right] d\mathbf{p}, \quad \omega_{n\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mu_n^2 + \mathbf{p}^2}, \quad (4.9)$$

$$\hat{b}_{n\alpha\beta}(x) = \sum_s \int \left[ \hat{b}_{ns\alpha\beta}(\mathbf{p}) e^{-i\bar{\omega}_{n\mathbf{p}}t + i\mathbf{p}\mathbf{x}} + \hat{b}_{ns\alpha\beta}^\dagger(\mathbf{p}) e^{i\bar{\omega}_{n\mathbf{p}}t - i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right] d\mathbf{p}, \quad \bar{\omega}_{n\mathbf{p}} \equiv \sqrt{m_n^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (4.10)$$

Операторы  $\hat{a}_n(\mathbf{p})$  и  $\hat{a}_n^\dagger(\mathbf{p})$  подчиняются стандартным коммутационным соотношениям для скалярного поля [68]

$$\left[ \hat{a}_n(\mathbf{p}), \hat{a}_{n'}^\dagger(\mathbf{p}') \right] = \delta_{nn'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (4.11)$$

Здесь не приводятся соответствующие коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения тензорных полей  $\hat{b}_{n\alpha\beta}$ , которые нетрудно найти, используя стандартные результаты по квантованию гравитационного поля в линейном приближении [69], потому что ниже мы подробно рассмотрим только вычисление вакуумного вклада в тензор энергии-импульса от скалярных мод, а затем кратко обсудим вакуумный вклад тензорных мод, который вычисляется совершенно аналогичным образом.

Поскольку набор функций  $\Psi_n$  можно выбрать ортонормированным относительно скалярного произведения вида (1.61), то для квадратичной по скалярным модам части действия  $S^{(2)}$  получаем выражение

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_{-L}^L \left\{ \frac{3}{4} \Psi_n \Psi_m - \frac{9}{4\kappa^2(\bar{\phi}')^2} \bar{g}^{44} (\partial_4 \Psi_n) (\partial_4 \Psi_m) \right\} e^{2A} dy \times \\ \times \int \left[ \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_n \partial_\nu \varphi_m - \frac{1}{2} (\mu_n^2 + \mu_m^2) \varphi_n \varphi_m \right] d^4x. \quad (4.12)$$

Варьируя действие (4.12) по  $\bar{g}_{AB}$  и усредняя полученное выражение по вакууму, получаем низшую квантовую вакуумную поправку от скалярного поля в тензор энергии импульса  $\mathfrak{T}(0, \varphi)^{low}$ :

$$\mathfrak{T}(0, \varphi)_{\alpha\beta}^{low} = \left\langle \frac{\delta S^{(2)}}{\delta \bar{g}^{\alpha\beta}} \right\rangle = e^{-2A} \left\langle \frac{\delta S^{(2)}}{\delta \eta^{\alpha\beta}} \right\rangle = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n^+(y) \int \frac{1}{2\omega_n} \left[ p_{n\alpha} p_{n\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (p_n^2 - \mu_n^2) \right] d\mathbf{p}_n, \quad (4.13)$$

$$\mathfrak{T}(0, \varphi)_{44}^{low} = \left\langle \frac{\delta S^{(2)}}{\delta \bar{g}^{44}} \right\rangle = \frac{e^{2A}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n^-(y) \int \frac{1}{2\omega_n} (p_n^2 - \mu_n^2) d\mathbf{p}_n \equiv 0, \quad (4.14)$$

где

$$F_n^\pm(y) \equiv \frac{3}{4} \Psi_n^2 \pm \frac{9}{4\kappa^2(\bar{\phi}')^2} (\partial_4 \Psi_n)^2. \quad (4.15)$$

Заметим теперь, что вследствие равенства нулю квантовой поправки  $\mathfrak{T}(0, \varphi)_{44}^{low}$  уравнение (1.46), вытекающее из уравнения (1.41) при  $A=B=4$  не меняется при учете квантовых поправок. Можно также показать, что квантовые поправки не меняют и уравнение (1.45), не считая изменения потенциалов на границах. В рамках подхода работы [37] это означает, что вид решения для функций  $A(y), \bar{\Phi}(y)$  не меняется, а могут измениться только входящие в них параметры модели. Такие изменения можно оценить, вычислив вклад от квантовых поправок для интегральных характеристик модели, таких как, например, плотность энергии. В настоящей главе вычисляется плотность энергии Казимира – низшая квантовая вакуумная поправка, которую дают скалярные моды в плотность энергии, определяемая как нулевая компонента эффективного четырехмерного вектора вида

$$P^\alpha \equiv 2 \int_0^L \mathfrak{T}(0, \varphi)_{low}^{\alpha 0} \sqrt{g} dy = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{\omega_{np}} \left[ p_n^\alpha p_n^0 - \frac{1}{2} \eta^{\alpha 0} (p_n^2 - \mu_n^2) \right] d\mathbf{p}_n, \quad (4.16)$$

Очевидно, что его пространственные компоненты равны нулю, а временная компонента есть просто плотность энергии нулевых колебаний скалярных мод:

$$P^0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \omega_{np} d\mathbf{p}. \quad (4.17)$$

Это является стандартным результатом в теории эффекта Казимира: плотность энергии Казимира есть сумма плотности энергий нулевых колебаний [68]. Отметим также, что выражение (4.16) действительно является вектором, поскольку группа симметрии RS-модели есть группа движений четырехмерного пространства Минковского, а компоненты тензоров  $G_{\alpha\beta}$  и  $T_{\alpha\beta}$  входящих в (4.18) по отношению к преобразованиям пятой координаты преобразуются как скаляры, что позволяет нам провести интегрирование по пятой координате в формуле (4.16), построив объект, который будет преобразовываться как четырехвектор по отношению к преобразованиям остальных координат.

### 4.3 Перенормировка вакуумной плотности энергии скалярного поля

Выражение (4.17), полученное для плотности энергии нулевых колебаний скалярного поля (плотности энергии Казимира), очевидно расходится при размерности пространства-времени равной четырем, поскольку в этом случае расходящимся является каждое его слагаемое. Для того чтобы регуляризовать это выражение и выделить из него конечную часть, зависящую от расстояния между бранами, воспользуемся методом размерной регуляризации. Подробные расчеты этой величины приведены в Приложении С, и с точностью до нулевого порядка по  $\varepsilon = 4 - D$  результат имеет вид:

$$P^0 = I_D \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D = -\frac{\pi}{2} X \varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8} (3 - 2\gamma - 2 \ln \pi) X - \frac{\pi}{2} Y + O(\varepsilon). \quad (4.19)$$

При получении этого выражения было использовано аналитическое продолжение по размерности пространства для расходящихся интегралов, что соответствует отбрасыванию аналогичного вклада от скалярного поля в пятимерном пространстве Минковского, и что, в свою очередь, означает перенормировку с помощью нормального упорядочения операторов поля [70]. Тем не менее, получившееся выражение все еще является расходящимся. Дополнительная расходимость возникает из-за того, что пространство-время RS-модели имеет границы в виде двух бран. Отметим, что в пространствах с границами возникновение поверхностных расходимостей в тензоре энергии-импульса является типичным явлением [70-72], и для того чтобы их устранить, требуется некоторое уточнение процедуры перенормировки ТЭИ.

При проведении перенормировки помимо отбрасывания бесконечной части может изменяться и конечная часть перенормируемого выражения. Для того, чтобы указанная процедура была однозначной, получающееся в результате процедуры перенормировки выражение должно удовлетворять ряду условий [68, 73-75]. Не вдаваясь в детали, отметим, что если перенормированный ТЭИ какого-либо поля удовлетворяет этим условиям, то после вычитания из него вклада от поля с таким же спином, но другими параметрами потенциала (массой, самодействием),

перенормированный таким способом ТЭИ также будет удовлетворять этим условиям, что и обеспечит однозначность процедуры перенормировки. Заметим, что такое вычитание фактически соответствует перенормировке констант взаимодействия и массы поля. В рассматриваемой задаче для проведения процедуры перенормировки подобным методом технически оказывается удобным сначала записать выражение для плотности энергии Казимира скалярного поля в виде

$$I_D \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D = I_D \left[ \mu_r^D - \nu^D (1+\theta)^D + \nu^D \sum_{n=1}^{\infty} (n+\theta)^D \right], \quad (4.20)$$

где, согласно [37, 45] масса радиона есть  $\mu_1 \equiv \mu_r \approx u\phi_0 M^{-3} \sqrt{(\beta_L^2 - u) / 6(\beta_L^2 + 4\tilde{k})}$ , а массы остальных мод  $\mu_n = \nu(n+\theta)$ . Тем самым из вклада калуца-клейновской башни фактически выделены вклад наилегчайшей моды – радиона (первое слагаемое в (4.20)) и вклад некоторой фиктивной моды, входящей в выражение для плотности энергии Казимира с «неправильным» знаком (второе слагаемое в формуле (4.20)). Затем можно провести перенормировку путем вычитания из выражения (4.20) вкладов только от двух мод: вклада  $I_D \mu_r^D$  от радиона с массой  $\mu_r$  и вклада  $(-I_D \mu_\Phi^D)$  от фиктивной моды с массой  $\mu_\Phi$ , где

$$\begin{aligned} I_D \mu_r^D &= -\frac{\pi}{2} \mu_r^4 \varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8} (3 - 2\gamma - 2 \ln \pi - \ln \mu_r) \mu_r^4, \\ I_D \mu_\Phi^D &= -\frac{\pi}{2} \mu_\Phi^4 \varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8} (3 - 2\gamma - 2 \ln \pi - \ln \mu_\Phi) \mu_\Phi^4. \end{aligned} \quad (4.21)$$

В результате для вклада скалярных мод в энергию Казимира получим *конечное* перенормированное выражение:

$$P_{ren}^0 = \lim_{D \rightarrow 4} \left( I_D \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D - I_D \mu_r^D - (-I_D \mu_\Phi^D) \right) = \frac{\pi^5}{2} \tilde{k}^4 F(\theta), \quad (4.22)$$

где

$$F(\theta) = -(\mu_\Phi^4 / \nu^4) \ln(\mu_\Phi^4 / \nu^4) - \left[ \frac{\theta^5}{25} (1 - 5 \ln \theta) - (1 + \theta)^4 \ln(1 + \theta) \right] + \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi\theta) \nu^4 \ln \nu + \frac{\pi}{2} \cos(2\pi\theta) - \frac{\pi}{2} e^{-2\pi\nu} \nu^4}{\operatorname{ch}(2\pi\nu) - \cos(2\pi\theta)} d\nu. \quad (4.23)$$

Подчеркнем, что, как это обычно делается при перенормировке энергии Казимира, мы вычитали расходящиеся вклады именно такого вида, который дают четырехмерные скалярные моды с массами  $\mu_r$  и  $\mu_\Phi$  в пространстве Минковского, что соответствует процедуре нормального упорядочения операторов в гамильтониане эффективной четырехмерной модели.

Из приведенного в Приложении С определения для параметра  $\theta$  (см. формулу(С.6)) следует, что он должен находиться в пределах  $0 \leq \theta < 1$  и близок к  $1/4$ . Например, при  $M=5$  ТэВ,  $\tilde{k}L=35$ ,  $\beta_2^2 = \tilde{k} = 53$  ТэВ и  $\mu_r = 1$  ТэВ имеем  $\theta = 0.2518$ . В диапазоне  $0.1 < \theta < 0.9$  функция  $F(\theta)$  монотонно убывает от 0.3 до -33.0, например при  $\theta = 1/4$  имеем  $F(1/4) = -2.19$ . Отсюда можно заключить, что перенормированная плотность энергии нулевых колебаний скалярного поля  $P_{ren}^0$  отличается от величины  $\tilde{k}^4$  не более чем на три порядка. Численные расчеты при выбранных выше значениях параметров модели дают для плотности энергии Казимира следующую величину:

$$P_{ren}^0 \sim -1.98 \times 10^9 \text{ ТэВ}^4. \quad (4.24)$$

Расчеты для других значений параметров модели подтверждают эту оценку и показывают, что перенормированная плотность энергии Казимира  $P_{ren}^0$  отрицательна. Таким образом, в данном случае эффект Казимира приводит к притяжению бран, что в рассматриваемой стабилизированной модели должно приводить к уменьшению физического расстояния между ними.

#### 4.4 Сила Казимира

Производную величины  $P_{ren}^0$  по физическому расстоянию между бранами естественно трактовать как силу, действующую на единицу объема браны



перпендикулярно к ней, то есть как давление, оказываемое на браны вследствие квантовых флуктуаций вакуума. Поскольку в рассматриваемой модели фоновая метрика не имеет нетривиальных компонент  $\bar{g}_{\alpha 4}$ , и при этом  $\bar{g}_{44} = -1$ , то физическое расстояние между бранами совпадает с  $L$ . Из формулы (4.22) следует, что величина  $P_{ren}^0$  зависит от параметров  $\tilde{k}$  и  $\theta$ , а, следовательно, их необходимо выразить через параметры RS-модели: расстояние между бранами  $L$ , фундаментальный пятимерный масштаб  $M$  (константу  $\kappa$ ) и параметры потенциалов  $V(\phi)$ ,  $\lambda_0(\phi)$  и  $\lambda_L(\phi)$ . Параметры  $k$  и  $u$ , входящие в  $\tilde{k}$  и  $\theta$  (см. Приложение С формула (С.6)) фактически однозначно связаны с параметрами потенциала [37]:

$$V(\phi) = -\frac{6k^2}{\kappa^2} + \frac{(4k+u)u}{2}\phi^2 - \frac{\kappa^2 u^2}{6}\phi^4. \quad (4.25)$$

и, следовательно, от  $L$  в рассматриваемом приближении не зависят. Оставшийся параметр  $\phi_0$  входит в потенциалы  $\lambda_0(\phi)$  и  $\lambda_L(\phi)$ :

$$\lambda_0(\phi) = \left[ -\frac{12k}{\kappa^2} + (\beta_0^2 - u)\phi_0^2 \right] + 2(u - \beta_0^2)\phi_0\phi + \beta_0^2\phi^2, \quad (4.26)$$

$$\lambda_L(\phi) = \left[ \frac{12k}{\kappa^2} - (\beta_L^2 - u)\phi_0^2 e^{-2uL} \right] + 2(u - \beta_L^2)\phi_0 e^{-uL}\phi + \beta_L^2\phi^2. \quad (4.27)$$

Может показаться, что из формулы (4.26) следует, что поскольку  $k$  и  $u$  не зависят от  $L$ , то и  $\phi_0$  не должно зависеть  $L$ . Однако такой вывод не учитывает то обстоятельство, что параметры потенциалов  $\lambda_0(\phi)$  и  $\lambda_L(\phi)$  подобраны таким образом, чтобы определяемое ими фоновое решение имело заданный вид, то есть представляло собой статические плоские браны на расстоянии  $L$  друг от друга. При других значениях параметров однородное относительно сдвигов по четырем координатам  $x^\alpha$  решение имело бы более сложный вид: браны обладали бы ненулевой постоянной кривизной, а самое общее решение, по-видимому, не являлось бы однородным и/или изотропным. Тот факт, что только при определенных соотношениях между параметрами потенциалов получается

решение заданного вида, означает, что неизменными должны быть не параметры потенциалов, а определенные соотношения между ними. Число таких соотношений должно быть таким, чтобы остался только один свободный параметр помимо  $\beta_0^2$  и  $\beta_L^2$  (последние могут быть произвольными, поскольку фоновое решение фактически от них не зависит), который можно менять и тем самым регулировать расстояние между бранами и значение фонового скалярного поля на бранах. Допустим, что в качестве такого параметра выбирается величина  $\lambda_{21} \equiv 2(u - \beta_L^2)\phi_0 e^{-uL}$ . Тогда

$$\phi_0 = \frac{\lambda_{21}}{2(u - \beta_L^2)} e^{uL}, \quad \delta\phi_0 = u\phi_0 \delta L. \quad (4.28)$$

Подставив (4.28) в определения для  $\tilde{k}$  и  $\theta$  и далее в формулу для перенормированной энергии Казимира (4.22), получим после дифференцирования по  $L$  явное выражение для силы Казимира:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{ren}^0}{dL} &= \frac{\pi^5}{2} \left\{ 4\tilde{k}^3 \frac{d\tilde{k}}{d\phi_0} F(\theta) + \tilde{k}^4 \frac{dF(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{d\phi_0} \right\} \frac{d\phi_0}{dL} = \\ &= \frac{\pi^5}{3} \left\{ F(\theta) - \frac{u(9\tilde{k} + u\kappa^2\phi_0^2)}{24\tilde{k}^2} \frac{dF(\theta)}{d\theta} \right\} \kappa^2 u^2 \tilde{k}^3 \phi_0^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Здесь не проводится численная оценка этой величины, потому что, как уже было отмечено выше, в стабилизированной модели сила Казимира не имеет особого смысла сама по себе, а важно лишь изменение расстояния между бранами, которое она вызывает.

#### 4.5 Изменение параметров модели вследствие эффекта Казимира

Для того чтобы оценить уменьшение расстояния между бранами за счет квантовых эффектов, следует сравнить плотность энергии Казимира  $P_{ren}^0$  скалярных мод с аналогичной классической величиной, полученной из тензора

энергии-импульса классического фонового скалярного поля, определяемой следующим интегралом:

$$P_{cl}^0 \equiv \int_0^L T^{00} \sqrt{g} dy. \quad (4.30)$$

Подставив в (4.30) выражение (1.43) для ТЭИ поля Гольдбергера-Вайза и используя формулы (1.44)-(1.49) для уравнений движения и фоновых решений стабилизированной RS-модели, получим

$$\begin{aligned} P_{cl}^0 &= \int_0^L \left( \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) + \lambda_0(\phi) \delta(y) + \lambda_L(\phi) \delta(y-L) \right) e^{-2A} dy = \\ &= \frac{6}{\kappa^2} \int_0^L \left( k - \frac{\kappa^2 u}{6} \phi_0^2 e^{2uy} \right)^2 e^{-2A} dy + \frac{1}{2} \lambda_0(\phi_0) e^{-2A(0)} + \frac{1}{2} \lambda_L(\phi_L) e^{-2A(L)} = \\ &= \left( \frac{3k^2}{\kappa^2 \tilde{k}} \left[ 1 - e^{-2\tilde{k}L} \right] - \frac{ku}{u + \tilde{k}} \left[ 1 - e^{-2uL - 2\tilde{k}L} \right] \phi_0^2 + \frac{\kappa^2 u^2}{12(2u + \tilde{k})} \left[ 1 - e^{-4uL - 2\tilde{k}L} \right] \phi_0^4 \right) e^{2\tilde{k}L} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{6k}{\kappa^2} - u \phi_0^2 \right) e^{-2\tilde{k}L} + \frac{1}{2} \left( -\frac{6k}{\kappa^2} + u \phi_0^2 e^{-2uL} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

В соответствии с современными экспериментальными ограничениями на модели с дополнительными измерениями пространства-времени [76] выберем фундаментальный пятимерный энергетический масштаб  $M$  равным 5 ТэВ и будем считать, что масса радиона имеет величину порядка одного ТэВ. При этом должно удовлетворяться условие  $uL \sim 0.1$ ,  $k \approx \tilde{k}$  и выполняться ограничение (С.7) из Приложения С. Эти условия оказываются согласованными, если  $\tilde{k}L \sim 35$ , и  $\tilde{k} \sim 53$  ТэВ. Тогда можно записать приближенное выражение для  $P_{ren}^0$  в следующей форме:

$$P_{cl}^0 \approx \left( \frac{3\tilde{k}}{\kappa^2} - \frac{u}{2} \phi_0^2 + \frac{3\kappa^2 u^2}{16\tilde{k}} \phi_0^4 \right) e^{2\tilde{k}L}. \quad (4.32)$$

Численное значение классической плотности энергии при таком выборе параметров стабилизированной RS-модели оказывается следующим:

$$P_{cl}^0 \sim 4.15 \times 10^{34} \text{ТэВ}^4. \quad (4.33)$$

Для сравнения классической плотности энергии (4.33) с квантовой поправкой возникающей в силу эффекта Казимира для последней следует учесть вклад тензорных мод. Как уже было отмечено выше, вычисление этого вклада проводится совершенно аналогично вычислению вклада в плотность энергии Казимира скалярных мод и приводит к результату того же порядка для каждой из пяти поляризаций тензорного поля. И поэтому, с учетом (4.24) общий вклад тензорных и скалярных мод в плотность энергии Казимира может быть оценен как

$$P_{ren}^0 \sim -1.2 \times 10^{10} \text{ТэВ}^4. \quad (4.34)$$

Используя формулу (4.32) для  $P_{cl}^0$  можно приближенно оценить величину  $\delta P_{cl}^0$ , с учетом формулы (4.28) для вариации  $\delta\varphi_0$  и малости отношения  $u/\tilde{k}$ :

$$\begin{aligned} \delta P_{cl}^0 &\approx \left( -\frac{u}{2} 2\varphi_0 + \frac{3\kappa^2 u^2}{16\tilde{k}} 4\varphi_0^3 \right) e^{2\tilde{k}L} \delta\varphi_0 + \left( \frac{3\tilde{k}}{\kappa^2} - \frac{u}{2} \varphi_0^2 + \frac{3\kappa^2 u^2}{16\tilde{k}} \varphi_0^4 \right) e^{2\tilde{k}L} 2\tilde{k} \delta L = \\ &= \left\{ \left( -\frac{u}{2} 2\varphi_0^2 + \frac{3\kappa^2 u^2}{16\tilde{k}} 4\varphi_0^3 \right) e^{2\tilde{k}L} u + \left( \frac{3\tilde{k}}{\kappa^2} - \frac{u}{2} \varphi_0^2 + \frac{3\kappa^2 u^2}{16\tilde{k}} \varphi_0^4 \right) e^{2\tilde{k}L} 2\tilde{k} \right\} \delta L \approx 2\tilde{k} P_{cl}^0 \delta L, \end{aligned} \quad (4.35)$$

Исходя из того, что  $P_{ren}^0 \sim \delta P_{cl}^0$ , получаем следующую оценку для относительного изменения расстояния между бранами  $\delta L/L$ :

$$\frac{P_{ren}^0}{P_{cl}^0} \approx 2\tilde{k}L \frac{\delta L}{L}, \quad (4.36)$$

Учитывая, численные оценки (4.33) и (4.34), а также, что  $2\tilde{k}L \approx 70$ , из формулы (4.36) можно легко оценить относительное уменьшение расстояния между бранами, которое оказывается порядка  $\delta L/L \sim 10^{-26}$ , то есть пренебрежимо малым.

Совершенно аналогично можно оценить изменение параметра фонового поля  $\delta\varphi_0$  вследствие эффекта Казимира. С учетом формул (4.28) и (4.36) получим

$$\delta\varphi_0 = u\varphi_0 \delta L \approx \frac{u\varphi_0}{2\tilde{k}} \frac{\delta P_{cl}^0}{P_{cl}^0}. \quad (4.37)$$

И тогда для относительного изменения параметра фонового поля  $\phi_0$  из-за эффекта Казимира опять получаем пренебрежимо малую величину:

$$\delta\phi_0 / \phi_0 \approx \frac{u}{2\tilde{k}} \frac{\delta P_{cl}^0}{P_{cl}^0} \approx \frac{1}{700} \frac{\delta P_{cl}^0}{P_{cl}^0} \sim 1.5 \cdot 10^{-27}. \quad (4.38)$$

Остальные параметры модели либо не меняются при учете эффекта Казимира, поскольку входят в уравнения (1.45) и (1.46), неизменные относительно низших квантовых поправок, либо не являются независимыми и выражаются через параметры  $\phi_0$  и  $L$ . Действительно как уже было отмечено выше, параметры потенциалов RS-модели подобраны таким образом, чтобы определяемое ими фоновое решение представляло собой статические плоские браны на расстоянии  $L$  друг от друга, то есть на параметры модели наложены определенные связи. При произвольных же значениях параметров фоновое решение модели в общем случае не являлось бы однородным и изотропным, а браны обладали бы ненулевой постоянной кривизной.

#### 4.6 Выводы по главе 4

В настоящей главе проведено исследование влияния квантовых поправок, приводящих к эффекту Казимира, на поведение фонового решения в модели Рэндалл-Сундрума, стабилизированной с помощью поля Гольдбергера-Вайза [37] и показано, что это влияние пренебрежимо мало. А именно: найден тензор энергии-импульса скалярного поля с учетом низших квантовых вакуумных поправок, затем расходящееся выражение для плотности энергии Казимира скалярных мод регуляризовано методом размерной регуляризации и с помощью формулы Абеля-Плана выделена его конечная часть, зависящая от расстояния между бранами (см. Приложение С).

Также найдено, что рассмотренные квантовые поправки не меняют вид фонового решения модели, а изменение ее параметров фактически сводится к пренебрежимо малому изменению физического расстояния между бранами и такого же незначительного изменения параметра фонового поля  $\phi_0$ . Тем самым

показано, что стабилизированная модель Рэндалл-Сундрума устойчива относительно квантовых поправок, приводящих к эффекту Казимира.

Следует отметить, что полученный результат хорошо согласуется с выводами классических работ Гольдбергера с соавторами [33, 49] о невозможности стабилизировать RS-модель только с помощью квантовых поправок и, наоборот, противоречит выводам работ [48, 50, 52], в которых допускалась возможность стабилизации расстояния между бранами за счет эффекта Казимира в нестабилизированной модели Рэндалл-Сундрума. Действительно, в рассматриваемом приближении для конформного фактора (1.49) метрика стабилизированной RS-модели имеет тот же вид, что и метрика обычно обсуждаемой нестабилизированной модели. Поэтому энергия Казимира скалярных и тензорных полей для обеих моделей должна иметь примерно одинаковый порядок величины и тот же самый аналитический вид. То же самое можно сказать и о силе Казимира, приводящей к притяжению бран. Но, в отличие от стабилизированной RS-модели, в нестабилизированной модели нет какой-либо силы, которая могла бы зафиксировать браны на определенном расстоянии друг от друга. Поэтому в такой модели для стабилизации расстояния между бранами обязательно нужно дополнительно рассматривать нелинейные взаимодействия скалярных полей, как это сделано, например, в работе [44] и квантовые поправки к описывающим эти взаимодействия потенциалам. Возможно, в таком случае эффект Казимира мог бы привести к стабилизации расстояния между бранами.

## Заключение

В диссертации были изучены взаимодействия поля радиона, возникающего в стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума, с полями Стандартной модели. В работе получены следующие результаты:

- Показано, что на уровне амплитуд имеет место сокращение вкладов от членов взаимодействия радиона с полями СМ неюкавского типа. В результате процессы с участием одиночного радиона в сопровождении произвольного количества калибровочных бозонов оказываются идентичными аналогичным процессам с участием одиночного бозона Хиггса. Данное сокращение имеет место как на древесном уровне, так и в случае наличия фермионных петель. Все выражения для амплитуд и сечений имеют такой же вид, как и для бозона Хиггса, если в последних заменить массу бозона Хиггса массой радиона, а также вакуумное среднее Хиггсовского поля обратной константой взаимодействия радиона  $\Lambda$ .
- Также показано, что аналогичное сокращение имеет место и для ассоциативного рождения радиона с бозонами Хиггса в сопровождении произвольного количества калибровочных бозонов. Как и в случае рождения одиночного радиона, данный результат справедлив как на древесном уровне, так и при наличии фермионных петель. Все получающиеся выражения можно получить из выражений для аналогичных процессов с участием одних только бозонов Хиггса с помощью замены массы бозона Хиггса массой радиона, вакуумного среднего хиггсовского поля обратной константой взаимодействия радиона  $\Lambda$ , а также перешкалированием константы самодействия третьей степени бозона Хиггса. Такое подобие процессов с участием радиона и бозона Хиггса не связано с многомерным происхождением радиона, а определяется только взаимодействия – линейным взаимодействием со следом ТЭИ полей Стандартной модели.

Следовательно, оно имеет место для любых скалярных полей с подобным типом взаимодействия.

- Получено выражение для эффективного лагранжиана радиона четвертой степени по полю (второго порядка по обратной константе  $\Lambda$ ). В этом же порядке выписаны взаимодействия радиона с полями СМ. Получены преобразования поля радиона, приводящие кинетический член к стандартному виду.
- Продемонстрировано, что на классическом уровне отсутствуют условия для возникновения ненулевого вакуумного среднего у поля радиона, то есть, в вычисленном приближении истинный минимум потенциала находится в нуле.
- Для скалярного поля в стабилизированной модели Рэндалл-Сундрума с двумя бранами вычислена аналитически и численно плотность энергии Казимира и получена оценка для плотности энергии Казимира тензорных мод стабилизированной RS-модели. Показано, что эффект Казимира, вызванный наличием распространяющихся в балке между бранами гравитационного поля и поля радиона, не оказывает влияния на форму фонового решения системы уравнений Эйнштейна и уравнений движения для поля Гольдбергера-Вайза, приводя лишь к незначительному изменению некоторых параметров модели, то есть стабилизированная модель Рэндалл-Сундрума устойчива по отношению к квантовым вакуумным поправкам, приводящим к эффекту Казимира.



## Благодарности

Автор выражает искреннюю и глубокую признательность научным руководителям работы члену-корреспонденту РАН, профессору, доктору физико-математических наук Эдуарду Эрнстовичу Боосу и доктору физико-математических наук Игорю Павловичу Волобуеву за постановку задач, обсуждение и поддержку. Также хотелось бы выразить благодарность соавторам Эдуарду Рустямовичу Рахметову и Ксении Сергеевне Свириной за помощь в получении результатов и участие в публикациях. И конечно же, автор благодарен сотрудникам отделов экспериментальной и теоретической физики НИИЯФ МГУ за благоприятную атмосферу в процессе исследований и работы над диссертацией.

## Приложение А. Вычисление коэффициентов в полиномиальном разложении эффективного четырехмерного действия радиона

Рассмотрим безразмерные величины  $\xi = \mu / \tilde{k}$ ,  $\sigma = u / \tilde{k}$ ,  $\rho = \phi_0 / 2M^3$ , введенные в главе 3 (см. формулу (3.40)). Поскольку предполагается, что величина  $\tilde{k}$  может находиться в диапазоне от 1 до 10 ТэВ, то при массе радиона порядка сотен ГэВ величина  $\xi \sim 0.1 \div 0.01$  может рассматриваться как малый параметр. Поскольку при вычислении четырехмерной массы Планка предполагалось, что  $uL \ll 1$ , то с учетом часто используемой [29,36,77-79] оценки  $kL \sim 35$ , величина  $\sigma$  также представляет собой малый параметр.

Из введенного в главе 1 определения переменной  $z = \mu e^{-\tilde{k}(L-y)} / \tilde{k}$  и вида фонового решения (1.48)-(1.49) следует, что для функций  $A(y)$ ,  $\bar{\Phi}(y)$  выполняются соотношения

$$e^A = \frac{z}{\xi}, \quad (\text{A.1})$$

$$\varphi = e^{-uL} \xi^\sigma \bar{\Phi} z^{-\sigma}. \quad (\text{A.2})$$

Перепишем также с использованием введенных выше безразмерных параметров функции  $\chi$  и  $\Phi$  (см. формулы (3.5) и (3.6)), получим

$$\chi = \frac{B}{\sqrt{8M^3 \xi^2}} z^{1-\sigma} J_\alpha(z), \quad (\text{A.3})$$

$$\Phi = B \frac{3e^{uL}}{2\sqrt{\rho\sigma} \xi^{2+\sigma}} z \left[ (\alpha+1+\sigma) J_\alpha(z) - z J_{\alpha-1}(z) \right]. \quad (\text{A.4})$$

Интеграл от произвольной интегрируемой в нуле функции  $f$  может быть представлен приближенно следующим образом:

$$\int_0^L f e^{-2A} dy = \frac{\xi^2}{\tilde{k}} \int_{\xi e^{-\tilde{k}L}}^{\xi} f z^{-3} dz \approx \frac{\xi^2}{\tilde{k}} \int_0^{\xi} f z^{-3} dz. \quad (\text{A.5})$$

Нормировочный множитель  $B$  вычислим исходя из того факта, что должно быть  $\alpha_0 = 1/2$ . Подставив в (3.19) выражения (A.3) и (A.4) получим<sup>^</sup>

$$\alpha_0 = B^2 \frac{9e^{2Lu}\xi^{2(\alpha-1-\sigma)}}{8\tilde{k}\rho\sigma^2} f, \quad (\text{A.6})$$

где

$$\begin{aligned} f \equiv & \frac{1}{4^\alpha \alpha^3 \Gamma(\alpha)^2} \left\{ \frac{\alpha\rho\sigma^2 e^{-2Lu}}{3(\alpha-\sigma)} {}_2F_3\left(\alpha+\frac{1}{2}, \alpha-\sigma; \alpha+1, 2\alpha+1, \alpha-\sigma+1; -\xi^2\right) + \right. \\ & + (\alpha+\sigma+1)^2 {}_2F_3\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}; \alpha+1, \alpha+1, 2\alpha+1; -\xi^2\right) + \\ & \left. - 4\alpha(\alpha+\sigma+1) {}_2F_3\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}; 2\alpha, \alpha+1, \alpha+1; -\xi^2\right) \right\} + \\ & + \left[ (4\alpha+\xi^2)J_\alpha(\xi)^2 - 2(\alpha+1)\xi J_\alpha(\xi)J_{\alpha+1}(\xi) + \xi^2 J_{\alpha+1}(\xi)^2 \right] \xi^{-2\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

В итоге, для  $B$  получается выражение

$$B = \frac{2\sqrt{\rho\tilde{k}\sigma}e^{-uL}}{3\xi^{\alpha-1-\sigma}\sqrt{f}}. \quad (\text{A.8})$$

С точностью до  $\xi^2$  для функции  $f$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} = & \frac{2^\alpha \sqrt{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{(\alpha-1-\sigma)^2 + \frac{\alpha\rho\sigma^2 e^{-2uL}}{3(\alpha-\sigma)}}} \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{\alpha\left(3(\alpha-1-\sigma)(\alpha+1-\sigma)^2 + (\alpha+1)e^{-2uL}\rho\sigma^2\right)}{12(\alpha+1)^2(\alpha+1-\sigma)\left((\alpha-1-\sigma)^2 + \frac{\alpha\rho\sigma^2 e^{-2uL}}{3(\alpha-\sigma)}\right)} \xi^2 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

а для нормировочного множителя  $B$  получаем

$$B = \frac{2^{\alpha+1}\xi^{-(\alpha-1-\sigma)}\sqrt{\tilde{k}}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha-\sigma + \frac{9(\alpha-1-\sigma)^2 e^{2uL}}{\alpha\rho\sigma^2}}} \left\{ 1 + \frac{\xi^2}{4(\alpha+1)} \frac{\frac{1}{\alpha+1-\sigma} + \frac{3(\alpha-1-\sigma)(\alpha+1-\sigma)e^{2uL}}{(\alpha+1)\rho\sigma^2}}{\frac{1}{\alpha-\sigma} + \frac{3(\alpha-1-\sigma)^2 e^{2uL}}{\alpha\rho\sigma^2}} \right\}. \quad (\text{A.10})$$

Для обратной константы взаимодействия радиона с полями СМ из (3.24) следует выражение

$$\Lambda = \frac{1}{\alpha+1} \sqrt{\frac{3M^3}{2\tilde{k}} \left( \frac{1}{\alpha-\sigma} + \frac{3(\alpha-1-\sigma)^2 e^{2uL}}{\alpha\rho\sigma^2} \right)} \times \left\{ 1 + \frac{3(\alpha-1-\sigma)(\alpha+1-\sigma)^2 e^{2uL} + (\alpha+1)\rho\sigma^2}{(\alpha+1)(\alpha+1-\sigma) \left( \frac{1}{\alpha-\sigma} + \frac{3(\alpha-1-\sigma)^2 e^{2uL}}{\alpha\rho\sigma^2} \right) \rho\sigma^2} \xi^2 \right\}. \quad (\text{A.11})$$

Так как с точностью до  $\sigma^2$

$$\alpha \approx 1 + \sigma + \frac{1}{6}\rho\sigma^2 \quad (\text{A.12})$$

то получаем

$$\Lambda = \sqrt{\frac{3M^3}{8\tilde{k}}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{24} \left[ 6 - (4 - e^{2uL})\rho \right] \sigma^2 + \right. \\ \left. - \frac{1}{16} (e^{2uL} - 1) \xi^2 + \frac{1}{32} (3e^{2uL} - 2) \sigma \xi^2 + \right. \\ \left. - \frac{1}{384} \left[ 18(2e^{2uL} - 1) + (8 - 5e^{2uL} - e^{4uL})\rho \right] \sigma^2 \xi^2 \right\}. \quad (\text{A.13})$$

При вычислении коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_3$  и  $\beta_4$  подынтегральные выражения раскладываются в ряд по  $z$ . Члены каждого из получаемых рядов пропорциональны множителям вида  $\xi^p z^q$ . Мы отбрасываем все члены, для которых  $p+q+1 > 2$ , чтобы после интегрирования остались только слагаемые пропорциональные  $\xi^{p+q+1}$  не старше второго порядка. Затем полученные выражения раскладываются в ряд по  $\sigma$  до второго порядка включительно и делается нормировка на  $\Lambda$  (для коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\beta_3$ ) и на  $\Lambda^2$  (для коэффициентов  $\alpha_2$  и  $\beta_4$ ). В итоге, с точностью до  $O(\sigma^3)$  и  $O(\xi^3)$  получаем для нормированных коэффициентов выражения

$$\bar{\alpha}_1 = -2 + \frac{1}{12} (2e^{2uL} - 1) \rho \sigma^2 - \frac{1}{4} \left( 1 - \sigma + \frac{3}{4} \left[ 1 - \frac{1}{18} (4e^{2Lu} - 1) \rho \right] \sigma^2 \right) e^{2uL} \xi^2, \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_2 = & \left(1 - \frac{1}{18}(3e^{2uL} - 1)\rho\sigma^2\right) + \\ & + \left(\frac{5}{16} - \frac{17}{64}\sigma + \frac{45}{256}\left[1 - \frac{4}{405}(27e^{2Lu} - 4)\rho\right]\sigma^2\right)e^{2uL}\xi^2, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_3 = & \frac{3}{2} + e^{2uL} + \frac{1}{12}(e^{2Lu} - 1)\rho\sigma + \frac{1}{48}(3 + 2e^{2Lu} - 4e^{4Lu})\rho\sigma^2 + \\ & + \left\{-\frac{e^{2Lu} - 1}{12\sigma} + \frac{1}{144}(-6 + e^{2Lu} + 18e^{4Lu}) + \right. \\ & - \frac{1}{864}\left(2(-9 + 28e^{2Lu} + 54e^{4Lu}) - 15(e^{2Lu} - 1)e^{2Lu}\rho\right)\sigma + \\ & \left. + \frac{1}{10368}\left(2(-54 + 355e^{2Lu} + 486e^{4Lu}) + 3(12 + 67e^{2Lu} - 44e^{4Lu} - 72e^{6Lu})\rho\right)\sigma^2\right\}\xi^2, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_4 = & \left\{18 + 3(1 - e^{-2Lu})\rho\sigma - \frac{1}{24}\left[36e^{2Lu} + 38e^{-2Lu} - (3 - 6e^{-2Lu} + 3e^{-4Lu})\rho\right]\rho\sigma^2\right\}\frac{1}{\xi^2} + \\ & + \frac{1}{12}(-31 + 11e^{2Lu}) + \left[-\frac{185}{36}e^{2Lu} - \frac{5}{24} + \left(\frac{19}{72}e^{2Lu} - \frac{5}{36} - \frac{1}{8}e^{-2Lu}\right)\rho\right]\sigma + \\ & + \left[\frac{1433}{432}e^{2Lu} + \frac{5}{48} - \frac{1}{72}\left(19e^{4Lu} + \frac{193}{6}e^{2Lu} + \frac{169}{12} + \frac{49}{4}e^{-2Lu}\right)\rho + \right. \\ & \left. + \frac{1}{192}(3e^{2Lu} - 5 + e^{-2Lu} + e^{-4Lu})\rho^2\right]\sigma^2 + \\ & + \left\{\frac{15e^{2Lu}}{4\rho\sigma^2} + \frac{77760e^{2Lu}}{27648\rho\sigma} + \frac{3456e^{2Lu}}{27648\sigma} - \frac{630e^{2Lu}}{384\rho} + \frac{-382e^{2Lu} + 29e^{4Lu} - 939}{384} + \right. \\ & + \left[\frac{225e^{2Lu}}{256\rho} + \frac{-692e^{4Lu} + 372e^{2Lu} + 2169}{1152} + \frac{459e^{-2Lu} + 41e^{2Lu} - 83e^{4Lu} - 345}{2304}\rho\right]\sigma \\ & + \left[-\frac{465e^{2Lu}}{1024\rho} + \frac{13100e^{4Lu} + 3165e^{2Lu} - 17577}{13824} + \right. \\ & \left. + \frac{534e^{6Lu} + 3688e^{4Lu} + 1817e^{2Lu} + 6954 - 4329e^{-2Lu}}{27648}\rho - \right. \\ & \left. - \frac{(e^{2Lu} - 1)^2(3 + 2e^{-2Lu} + 51e^{-4Lu})}{6144}\rho^2\right]\sigma^2\right\}\xi^2. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Отметим, что в выписанных здесь выражениях мы не разлагаем в ряд экспоненты вида  $\exp(nLu)$  с  $n = -4, -2, \dots, 6$  по той причине, что хотя и предполагается, что  $Lu$  – малая величина, но уже при  $Lu = 0.05$  значение функции  $\exp(6Lu)$  отклоняется от линейного приближения  $1 + 6Lu$  на величину порядка  $Lu$ .

Разложение же до второго порядка увеличивает громоздкость получаемых выражений, но не добавляет им информативности.

Отметим также, что для коэффициента  $\bar{\beta}_4$  ведущее слагаемое в разложении по  $\xi$  является положительным и близко к  $18/\xi^2$ , а следовательно коэффициент  $\beta_4$  в главном порядке равен  $\frac{18\tilde{k}^2}{\Lambda^2}$ .

**Приложение В. Вершины взаимодействий радиона и полей Стандартной модели**

Радион и два фермиона:

$$r(k_r)\bar{f}(p_{\bar{f}})f(p_f) \quad \frac{i}{\Lambda} \left\{ \frac{3}{2} [\not{p}_{\bar{f}} - \not{p}_f] + 4m_f \right\}$$

Радион, два фермиона и фотон:

$$r(k_r)\gamma(k_\gamma)\bar{f}(p_{\bar{f}})f(p_f) \quad -\frac{i}{\Lambda} 3eq_f \gamma^\mu$$

Радион, два фермиона и Z-бозон:

$$r(k_r)Z(k_Z)\bar{f}(p_{\bar{f}})f(p_f) \quad -\frac{i}{\Lambda} \frac{3m_Z}{2v} \gamma^\mu [a_f + b_f \gamma^5]$$

Радион, два фермиона и W-бозон:

Радион, два кварка и W-бозон:

$$r(k_r)W(k_W)\bar{u}(p_{\bar{u}})d(p_d) \quad -\frac{i}{\Lambda} \frac{3m_W}{\sqrt{2}v} \gamma^\mu V_{jk}^{CKM} \gamma^\mu [1 - \gamma^5]$$

Радион, два лептона и W-бозон:

$$r(k_r)W(k_W)\bar{\nu}(p_{\bar{\nu}})e(p_e) \quad -\frac{i}{\Lambda} \frac{3m_W}{\sqrt{2}v} \gamma^\mu U_{jk}^{PMNS} \gamma^\mu [1 - \gamma^5]$$

Радион, два фермиона и бозон Хиггса:

$$r(k_r)h(k_h)\bar{f}(p_{\bar{f}})f(p_f) \quad \frac{i}{\Lambda} \frac{4m_f}{v}$$

Радион и два бозона Хиггса:

$$r(k_r)h(p_1)h(p_2) \quad \frac{i}{\Lambda} [p_{1\mu}p_2^\mu - m_h^2]$$

Радион и три бозона Хиггса:

$$r(k_r)h(p_1)h(p_2)h(p_3) \quad -\frac{i}{\Lambda} \frac{12m_h^2}{v}.$$

Радион и четыре бозона Хиггса:

$$r(k_r)h(p_1)h(p_2)h(p_3)h(p_4) \quad -\frac{i}{\Lambda} \frac{12m_h^2}{v^2}.$$

Радион и два Z-бозона:

$$r(k_r)Z_\mu(p_1)Z_\nu(p_2) \quad -\frac{i}{\Lambda} 2m_Z^2 g^{\mu\nu}.$$

Радион, два Z-бозона и бозон Хиггса:

$$r(k_r)Z_\mu(p_1)Z_\nu(p_2)h(p_3) \quad -\frac{i}{\Lambda} \frac{4m_Z^2}{v} g^{\mu\nu}.$$

Радион, два Z-бозона и два бозона Хиггса:

$$r(k_r)Z_\mu(p_1)Z_\nu(p_2)h(p_3)h(p_4) \quad -\frac{i}{\Lambda} \frac{4m_Z^2}{v^2} g^{\mu\nu}.$$

Радион и два W-бозона:

$$r(k_r)W_\mu(p_1)W_\nu(p_2) \quad -\frac{i}{\Lambda} \frac{2m_W^2}{v^2} g^{\mu\nu}.$$

Радион, два W-бозона и бозон Хиггса:

$$r(k_r)W_\mu(p_1)W_\nu(p_2)h(p_3) \quad -\frac{i}{\Lambda} \frac{4m_W^2}{v^2} g^{\mu\nu}.$$

Радион, два W-бозона и два бозона Хиггса:

$$r(k_r)W_\mu(p_1)W_\nu(p_2)h(p_3)h(p_4) \quad -\frac{i}{\Lambda} \frac{4m_W^2}{v^2} g^{\mu\nu}.$$

Радион, два фермиона и глюон:

$$r(k_r)g_\mu^a(k_g)\bar{f}(p_{\bar{f}})f(p_f) \quad -\frac{i}{\Lambda} 3g_c\gamma^\mu t_a.$$



Вершины взаимодействия радиона с аномальными членами тензора энергии-импульса Стандартной модели.

Радион и два фотона:

$$r(k)A_\mu(p_1)A_\nu(p_2) \quad \frac{i}{\Lambda} \frac{2\beta(e)}{e} [p_1^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu} p_{1\alpha} p_2^\alpha].$$

Радион и два глюона:

$$r(k)g_\alpha^a(p_1)g_\beta^b(p_2) \quad \frac{i}{\Lambda} \frac{2\beta(g_c)}{g_c} \delta_{ab} [p_1^\alpha p_2^\beta - g^{\alpha\beta} p_{1\mu} p_2^\mu].$$

Радион и три глюона:

$$r(k)g_\alpha^a(p_1)g_\beta^b(p_2)g_\gamma^c(p_3) \\ - \frac{2\beta(g_c)}{\Lambda} [f_{bca} g^{\alpha[\beta} p_1^{\gamma]} + f_{cab} g^{\beta[\gamma} p_2^{\alpha]} + f_{abc} g^{\gamma[\alpha} p_3^{\beta]}].$$

Радион и четыре глюона:

$$r(k)g_\alpha^a(p_1)g_\beta^b(p_2)g_\gamma^c(p_3)g_\delta^d(p_4) \\ - \frac{i}{\Lambda} 2\beta(g_c) g_c [f_{a(c}{}^l f_{d)bl} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + f_{a(d}{}^l f_{b)cl} g^{\alpha\gamma} g^{\delta\beta} + f_{a(b}{}^l f_{c)dl} g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}].$$

Тензорные индексы в круглых и квадратных скобках означают соответственно симметризацию и антисимметризацию выражения по этим индексам.

### Приложение С. Регуляризация и выделение конечной части выражения для энергии Казимира скалярных мод

Выражение (4.17) для энергии Казимира скалярных мод обобщается на случай  $D$  измерений пространства-времени следующим образом:

$$\begin{aligned} P^0 &= \lim_{D \rightarrow 4} S_{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu_n^2} |\mathbf{p}|^{D-2} d|\mathbf{p}| = \\ &= \lim_{D \rightarrow 4} S_{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D \int_0^{\infty} \sqrt{q^2 + 1} q^{D-2} dq = \lim_{D \rightarrow 4} I_D \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

где сделана замена переменной  $q \equiv |\mathbf{p}|/\mu_n$  и введено обозначение

$$I_D \equiv S_{D-2} \int_0^{\infty} \sqrt{q^2 + 1} q^{D-2} dq, \quad (\text{C.2})$$

и где  $S_n$  есть объем  $n$ -мерной сферы (то есть поверхности  $(n+1)$ -мерного шара):

$$S_n = \frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}. \quad (\text{C.3})$$

Очевидно, что оба сомножителя  $I_D$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D$  в последнем равенстве в формуле (C.1) являются расходящимися при  $D \rightarrow 4$ . Для того чтобы это явно продемонстрировать, выделим в каждом из них расходящиеся части.

Сначала вычислим  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D$  – сумму масс скалярных мод в степени  $D$ , стоящую в правой части регуляризованного выражения для плотности энергии (C.1). Согласно [37] масса самой первой скалярной моды – радиона – дается выражением

$$\mu_1 = \mu_r \approx \sqrt{\frac{2(\beta_L^2 - u)}{3\beta_L^2 + 4\tilde{k}}} u \kappa \Phi_0. \quad (\text{C.4})$$

Ниже (после формулы (C.25)) показано, что при определенном выборе параметров модели, согласованном с экспериментальными ограничениями на модели с дополнительными измерениями пространства-времени [76], массы остальных мод оказываются порядка пятимерного фундаментального масштаба  $M$ :

$$\mu_n \approx \nu(n+\theta), \quad (\text{C.5})$$

где

$$\nu \equiv \pi \tilde{k}, \quad \theta \equiv \frac{1}{4} + \frac{u}{2\tilde{k}} + \frac{\kappa^2 \phi_0^2 u^2}{12 \tilde{k}^2}, \quad (\text{C.6})$$

и при этом должно выполняться условие

$$n \gg \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{4} + \frac{(\beta_L^2 - u)}{\tilde{k}} - \alpha^2 \right) - \frac{1}{2} - \frac{2\alpha + 1}{4}, \quad (\text{C.7})$$

а параметр  $\alpha$  задается выражением (1.66). Таким образом, ряд в регуляризованном выражении (С.1) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D = \mu_r^D - \nu^D (1+\theta)^D + \nu^D \sum_{n=1}^{\infty} (n+\theta)^D, \quad (\text{C.8})$$

где из суммы  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D$  специально выделено слагаемое  $-\nu^D (1+\theta)^D$ , чтобы ниже при использовании формулы Абеля-Плана получить более удобные для дальнейших вычислений интегралы.

Для вычисления ряда в правой части (С.8) воспользуемся формулой Абеля-Плана, позволяющей заменить сумму интегралом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n+\theta) = \int_0^{\infty} f(\nu) d\nu + i \int_0^{\infty} \left\{ \frac{f(i\nu)}{e^{-i2\pi\theta} e^{2\pi\nu} - 1} - \frac{f(-i\nu)}{e^{i2\pi\theta} e^{2\pi\nu} - 1} \right\} d\nu. \quad (\text{C.9})$$

Тогда для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+\theta)^D$  получим следующее выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+\theta)^D = \int_0^{\infty} (\nu+\theta)^D d\nu + i \int_0^{\infty} \left\{ \frac{i^D}{e^{-i2\pi\theta} e^{2\pi\nu} - 1} - \frac{(-i)^D}{e^{i2\pi\theta} e^{2\pi\nu} - 1} \right\} \nu^D d\nu. \quad (\text{C.10})$$

Первый интеграл в правой части (С.10) расходится при  $D > -1$ . Перепишем его в более удобном для последующей перенормировки виде, сдвинув переменную интегрирования:

$$\int_0^{\infty} (v+\theta)^D dv = \int_0^{\infty} v^D dv - \frac{\theta^{D+1}}{D+1}. \quad (\text{C.11})$$

Второй интеграл в правой части (C.10) является конечным при всех  $D$ . В окрестности  $D=4$  (т.е. при малых  $\varepsilon \equiv 4-D$ ) получим

$$\begin{aligned} & i \int_0^{\infty} \left\{ \frac{i^D}{e^{-i2\pi\theta} e^{2\pi v} - 1} - \frac{(-i)^D}{e^{i2\pi\theta} e^{2\pi v} - 1} \right\} v^D dv = \\ & = - \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\theta) v^4 dv}{\text{ch}(2\pi v) - \cos(2\pi\theta)} - \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\theta) v^4 \ln v + \frac{\pi}{2} \cos(2\pi\theta) - \frac{\pi}{2} e^{-2\pi v} v^4}{\text{ch}(2\pi v) - \cos(2\pi\theta)} dv. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Таким образом, выражение (C.8) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D &= v^D \int_0^{\infty} v^D dv + \\ &+ \mu_r^D - v^D (1+\theta)^D - v^D \frac{\theta^{D+1}}{D+1} - v^D \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\theta) v^4 dv}{\text{ch}(2\pi v) - \cos(2\pi\theta)} + \\ &- \varepsilon v^D \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\theta) v^4 \ln v + \frac{\pi}{2} \cos(2\pi\theta) - \frac{\pi}{2} e^{-2\pi v} v^4}{\text{ch}(2\pi v) - \cos(2\pi\theta)} dv. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Поскольку слагаемое в третьей строке выражения (C.13) порядка  $\varepsilon$ , то размерность пространства-времени  $D$  в нем можно положить равным 4. Слагаемое во второй строке формулы (C.13) с точностью до  $\varepsilon$  равно

$$\begin{aligned} & \mu_r^D - v^D (1+\theta)^D - v^D \frac{\theta^{D+1}}{D+1} - v^D \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\theta) v^4 dv}{\text{ch}(2\pi v) - \cos(2\pi\theta)} = \\ & = v^4 \left[ (\mu_r/v)^4 - (1+\theta)^4 - \frac{\theta^5}{5} - \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\theta) v^4 dv}{\text{ch}(2\pi v) - \cos(2\pi\theta)} \right] + \\ & + \varepsilon \left\{ \mu_r^4 \ln(\mu_r) - v^4 \ln v \left[ (1+\theta)^4 + \frac{\theta^5}{5} + \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\theta) v^4 dv}{\text{ch}(2\pi v) - \cos(2\pi\theta)} \right] + \right. \\ & \left. + v^4 \left[ -(1+\theta)^4 \ln(1+\theta) + \frac{\theta^5}{25} (1-5 \ln \theta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Таким образом, для суммы масс скалярных мод в степени  $D$  окончательно имеем следующее выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D = \nu^D \int_0^{\infty} \nu^D d\nu + X + \varepsilon Y, \quad (\text{C.15})$$

где

$$X = \mu_r^4 - \nu^4 \left[ (1+\theta)^4 + \frac{\theta^5}{5} + \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\theta) \nu^4 d\nu}{\text{ch}(2\pi\nu) - \cos(2\pi\theta)} \right] \quad (\text{C.16})$$

и

$$\begin{aligned} Y = & \mu_r^4 \ln \mu_r - \nu^4 \ln \nu \left[ (1+\theta)^4 + \frac{\theta^5}{5} + \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\theta) \nu^4 d\nu}{\text{ch}(2\pi\nu) - \cos(2\pi\theta)} \right] + \\ & + \nu^4 \left[ \frac{\theta^5}{25} (1 - 5 \ln \theta) - (1+\theta)^4 \ln(1+\theta) \right] + \\ & - \nu^4 \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\theta) \nu^4 \ln \nu + \frac{\pi}{2} \cos(2\pi\theta) - \frac{\pi}{2} e^{-2\pi\nu} \nu^4}{\text{ch}(2\pi\nu) - \cos(2\pi\theta)} d\nu. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Интеграл по импульсу в формуле (C.2) при  $D < 0$  сходится на верхнем пределе и расходится на нижнем. Поэтому регуляризуем его следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \sqrt{q^2 + 1} q^{D-2} dq = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{\infty} \sqrt{q^2 + 1} q^{D-2} dq = \frac{-1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{D}{2}\right) - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^{D-1}}{D-1}. \quad (\text{C.18})$$

Будем использовать правую часть (C.18) до перехода к пределу в качестве аналитического продолжения выражения для этого интеграла при  $D > 0$ . В таком случае второе слагаемое в правой части (C.18) исчезает. При нечетных  $D > 0$  получаем для (C.18) конечное выражение. При четных  $D > 0$  выражение расходится, в итоге в окрестности  $D = 4$  для (C.18), получаем выражение

$$\begin{aligned} I_D = & -\frac{\pi}{2} \varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8} (3 - 2\gamma - 2 \ln \pi) + \\ & - \frac{\pi}{96} \left[ 21 + \pi^2 + 6\gamma^2 + 6(\ln \pi - 3) \ln \pi + 6\gamma(2 \ln \pi - 3) \right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Особо отметим, что полученное выражение (С.19) не зависит от каких-либо параметров RS-модели.

Получив регуляризованные выражения (С.19) и (С.15) для сомножителей  $I_D$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D$ , следует вернуться к формуле (С.1) для плотности энергии Казимира скалярных мод  $P^0$ . Перемножив (С.19) и (С.15), получим:

$$P^0 = I_D \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D = \upsilon^D I_D \int_0^{\infty} v^D dv + I_D X + \varepsilon I_D Y. \quad (\text{С.20})$$

Преобразуем в выражении (С.20) первое слагаемое следующим образом

$$\begin{aligned} I_D \int_0^{\infty} v^D dv &= S_{D-2} \int_0^{\infty} \sqrt{q^2 + 1} q^{D-2} dq \int_0^{\infty} v^D dv = \\ &= S_{D-2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{(vq)^2 + v^2} (vq)^{D-2} v dq dv = \\ &= S_{D-2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{\xi^2 + v^2} \xi^{D-2} d\xi dv = S_{D-1} \int_0^{\infty} \chi^{D-1} d\chi, \end{aligned} \quad (\text{С.21})$$

где в последнем равенстве перешли к полярным координатам и проинтегрировали по угловой переменной. При  $D < 0$  интеграл (С.21) расходится на нижнем пределе интегрирования. Поэтому будем рассматривать его как предел вида

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{\infty} q^{D-1} dq = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^D}{D} = 0. \quad (\text{С.22})$$

Используем это выражение для аналитического продолжения рассматриваемого интеграла  $I_D \int_0^{\infty} v^D dv$  в выражении (С.20) на область  $D > 0$ , полагая его равным нулю и при  $D > 0$ .

В результате, для плотности энергии  $P^0$  получаем с точностью до нулевого порядка по  $\varepsilon$ :

$$P^0 = I_D \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D = -\frac{\pi}{2} X \varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8} (3 - 2\gamma - 2 \ln \pi) X - \frac{\pi}{2} Y + O(\varepsilon). \quad (\text{С.23})$$

Заметим, что расходящаяся часть в полученном выражении в точности совпадает с расходящейся частью вклада, который бы дали в плотность энергии два четырехмерных скалярных поля: радион с массой  $\mu_r$  и некоторое нефизическое поле  $\Phi$  с массой  $\mu_\Phi$ , где

$$\mu_\Phi \equiv \nu \left[ (1+\theta)^4 + \frac{\theta^5}{5} + \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi\theta)v^4 dv}{\text{ch}(2\pi v) - \cos(2\pi\theta)} \right]^{1/4}. \quad (\text{C.24})$$

Поле с массой  $\mu_\Phi$  считается нефизическим, потому что его вклад в плотность энергии имеет «неправильный» знак.

Полученный результат становится отчасти понятным, если вернуться к выражению (C.8), в котором мы добавили и вычли член вида  $\nu^D(1+\theta)^D$ , фактически заменив в первоначальной сумме первый член с массой  $\mu_r$  слагаемым с массой  $\nu(1+\theta)$ . Таким образом, еще до проведения процедуры перенормировки вакуумная плотность энергии пятимерного физического поля была представлена в виде вклада башни эквидистантных четырехмерных мод, массы которых подчиняются уравнению (C.5), а также вклада четырехмерной моды с массой  $\mu_r$  (радион) и вклада одной фиктивной четырехмерной моды, входящей в полученное выражение для вакуумной плотности энергии с противоположным знаком.

Далее рассмотрим вопрос о спектре масс четырехмерных мод скалярного поля. Согласно [37] спектр масс тяжелых скалярных мод определяется уравнением

$$\left( 1 + \alpha + \frac{u}{\tilde{k}} + \frac{\tilde{k}}{\beta_L^2 - u} z^2 \right) J_\alpha(z) - z J_{\alpha-1}(z) = 0, \quad (\text{C.25})$$

где  $z = \mu/\tilde{k}$ . Для того чтобы найти корни этого уравнения при больших  $z$ , воспользуемся асимптотическим разложением функций Бесселя [80].

$$\begin{aligned}
J_\alpha(z) = & \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(\frac{4z-2\alpha\pi-\pi}{4}\right) \times \right. \\
& \times \left[ \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+2j+1/2)}{(2j)!\Gamma(\alpha-2j+1/2)} (2z)^{-2j} + O(z^{-2N}) \right] - \\
& - \sin\left(\frac{4z-2\alpha\pi-\pi}{4}\right) \times \\
& \times \left. \left[ \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+2j+3/2)}{(2j+1)!\Gamma(\alpha-2j-1/2)} (2z)^{-2j-1} + O(z^{-2N-1}) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{C.26}$$

представив его в следующей форме:

$$\begin{aligned}
J_\alpha(z) = & \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2\alpha-1}{4}\pi\right) P_{\alpha,N}(z^{-2}) + \\
& - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{2\alpha+1}{4}\pi\right) \frac{1}{z} Q_{\alpha,N}(z^{-2}) + O(z^{-2N}),
\end{aligned} \tag{C.27}$$

где

$$P_{\alpha,N}(z^{-2}) \equiv \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+2j+1/2)}{(2j)!\Gamma(\alpha-2j+1/2)} (2z)^{-2j}, \tag{C.28}$$

$$Q_{\alpha,N}(z^{-2}) \equiv \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+2j+3/2)}{(2j+1)!\Gamma(\alpha-2j-1/2)} (2z)^{-2j}. \tag{C.29}$$

Используя асимптотическое разложение (C.27)-(C.29) при больших  $z$ , для уравнения (C.25) запишем

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( 1 + \alpha + \frac{u}{\tilde{k}} + \frac{\tilde{k}}{\beta_L^2 - u} z^2 \right) P_{\alpha,N}(z^{-2}) + Q_{\alpha-1,N}(z^{-2}) \right] \cos\left(z - \frac{2\alpha+1}{4}\pi\right) + \\
& + \left\{ z P_{\alpha-1,N}(z^{-2}) - \left( 1 + \alpha + \frac{u}{\tilde{k}} + \frac{\tilde{k}}{\beta_L^2 - u} z^2 \right) \frac{1}{z} Q_{\alpha,N}(z^{-2}) \right\} \sin\left(z - \frac{2\alpha+1}{4}\pi\right) = \\
& = O(z^{-2N+2}).
\end{aligned} \tag{C.30}$$

В формуле (C.30) слагаемое в квадратных скобках имеет старший член порядка  $z^2$ , а выражение в фигурных скобках – порядка  $z$ . Чтобы эти два слагаемых



компенсировали друг друга с точностью до  $O(z^{-2N+2})$ , следует наложить на переменную  $z$  условие  $\cos\left(z - \frac{2\alpha+1}{4}\pi\right) \approx 0$ , то есть  $z = z_n$ , где  $z_n$  есть корень уравнения

$$z - \frac{2\alpha+1}{4}\pi = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) + \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0. \quad (\text{C.31})$$

С учетом последнего условия для уравнения (C.25) имеем

$$\begin{aligned} & -\left[\frac{\tilde{k}}{\beta_L^2 - u} z^2 P_{\alpha, N}(z^{-2}) + \left(1 + \alpha + \frac{u}{\tilde{k}}\right) P_{\alpha, N}(z^{-2}) + Q_{\alpha-1, N}(z^{-2})\right] \left\{1 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \dots\right\} \varepsilon + \\ & \left\{z \left[P_{\alpha-1, N}(z^{-2}) - \frac{\tilde{k}}{\beta_L^2 - u} Q_{\alpha, N}(z^{-2})\right] - \left(1 + \alpha + \frac{u}{\tilde{k}}\right) \frac{1}{z} Q_{\alpha, N}(z^{-2})\right\} = O(z^{-2N+2}). \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Оставляя в этом выражении только линейные по  $\varepsilon$  и старшие по  $z$  члены, получим

$$\frac{\tilde{k}}{\beta_L^2 - u} z \varepsilon \approx 1 - \frac{\tilde{k}}{\beta_L^2 - u} (\alpha^2 - 1/4). \quad (\text{C.33})$$

Таким образом, для  $\varepsilon$  и  $z$  имеем систему из двух линейных уравнений с дополнительным условием  $\varepsilon \approx 0$ :

$$\begin{cases} z - \frac{2\alpha+1}{4}\pi = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) + \varepsilon \\ \frac{\tilde{k}}{\beta_L^2 - u} z \varepsilon = 1 - \frac{\tilde{k}}{\beta_L^2 - u} (\alpha^2 - 1/4), \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

решая которую, получаем для  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon \approx \left[\frac{\beta_L^2 - u}{\tilde{k}} - (\alpha^2 - 1/4)\right] \frac{1}{\pi\left(n + \frac{1}{2} + \frac{2\alpha+1}{4}\right)}, \quad (\text{C.35})$$

и, соответственно, для  $z_n$ :

$$z_n \approx \pi\left(n + \frac{1}{2} + \frac{2\alpha+1}{4}\right) + 2 \left[\frac{\beta_L^2 - u}{\tilde{k}} - (\alpha^2 - 1/4)\right] \frac{1}{\pi\left(n + \frac{1}{2} + \frac{2\alpha+1}{4}\right)}. \quad (\text{C.36})$$

Поскольку  $z = \mu/\tilde{k}$ , то для спектра масс имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mu_n &\approx \pi \left( n + \frac{1}{2} + \frac{2\alpha+1}{4} \right) \tilde{k} + \frac{2(\beta_L^2 - u) - (\alpha^2 - 1/4)\tilde{k}}{\pi \left( n + \frac{1}{2} + \frac{2\alpha+1}{4} \right)} \tilde{k} \approx \\ &\approx \pi \left( n + \frac{5}{4} + \frac{u}{2\tilde{k}} + \frac{\kappa^2 \varphi_0^2 u^2}{12\tilde{k}^2} \right) \tilde{k}. \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Заметим, что нельзя в общем случае утверждать, что фигурирующее в последней формуле число  $n$  является порядковым номером моды, таким, что масса моды возрастает с ростом номера  $n$ . Использование этой формулы возможно, когда  $\varepsilon \approx 0$ , то есть в том случае, когда выполняется условие

$$n \gg \frac{2}{\pi} \left( \frac{\beta_L^2 - u}{\tilde{k}} - (\alpha^2 - 1/4) \right) - \frac{1}{2} - \frac{2\alpha+1}{4}. \quad (\text{C.38})$$

Поэтому если  $\beta_L^2$  достаточно велико по сравнению с  $\tilde{k}$ , то формулу можно использовать только при достаточно больших  $n$ , а само число мод, которые не подчиняются этому условию (а также то, как распределены массы в промежуточном диапазоне квантового числа  $n$ ) можно оценить только численно. С другой стороны, если  $\beta_L^2 = \tilde{k} = 53$  ТэВ и  $\kappa^2 \varphi_0^2$  выбрано таким, чтобы масса радиона была равной 1 ТэВ, (а также  $\tilde{k}L \sim 35$  и  $uL \sim 0.1$ ), это условие удовлетворяется для всех положительных  $n$ . Радиону при этом соответствует  $n=0$ , и при этом других решений уравнения (С.25) между  $n=0$  и  $n=1$  нет, в чем можно убедиться численными методами.

**Литература**

- [1] Kaluza T., «Zum Unitätsproblem der Physik», Sitzungsberichte Preußische Akademie der Wissenschaften, 966, (1921).
- [2] Klein C.Z., «The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law», Nature 118, (1926), 516.
- [3] M.J. Duff, B.E.W. Nilsson, C.N. Pope, «Kaluza-Klein Supergravity», Phys. Rep., 130:1-2, (1986), P. 1-142.
- [4] B.S. DeWitt, «Relativity, Groups and Topology», под редакцией C. and B.S. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 1964.
- [5] Cremmer E., Scherk J., «Spontaneous Compactification of Extra Space Dimensions», Nucl. Phys., B118, (1977), 61.
- [6] Luciani J. F. Nucl. Phys., «Space-Time Geometry and Symmetry Breaking», B135, (1978), 111.
- [7] Д.В. Волков, В.И. Ткач, «Спонтанная компактификация подпространств», ТМФ, 51, 2, (1982), P. 171–177.
- [8] P. Candelas, S. Weinberg, «Calculation of Gauge Couplings and Compact Circumferences from Selfconsistent Dimensional Reduction», Nucl. Phys. B 237, 3, (1984), P. 397-441.
- [9] K. Kikkawa, T.Kubota, S.Sawada, M.Yamasaki, «Spontaneous Compactification in Generalized Candelas-Weinberg Models», Nucl. Phys. B, V 260, 2, (1985), P. 429-455.
- [10] I.P. Volobuev, G. Rudolph, «Geometrical approach to the dimensional reduction of symmetric gauge fields», Theor. Math. Phys., 62:3 (1985), P. 261-268.
- [11] I.P. Volobuev, Yu.A. Koubychine, «Higgs potentials as inheritance from higher space-time dimensions. 1. Dimensional reduction and scalar fields», Theor. Math. Phys., 68:2 (1986), P. 788-796.

- [12] A. Rogers, «A global theory of supermanifolds», *J. Math. Phys.*, 21, 1352, (1980).
- [13] V.S. Vladimirov, I.V. Volovich, «Differential calculus», *Theor. Math. Phys.* 59, (1984), P. 317–335.
- [14] V.A. Rubakov, M.E. Shaposhnikov, «Do we live inside a domain wall?», *Phys. Lett. B*, 1983, V. 125, P. 136-138.
- [15] V.A. Rubakov, M.E. Shaposhnikov, «Extra space-time dimensions: Towards a solution to the cosmological constant problem», *Phys. Lett. B*, 1983, V. 125, P. 139-143.
- [16] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, «The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter», *Phys. Lett. B*, V. 429, (1998), P. 263-272.
- [17] J. Polchinski, «TASI lectures on D-branes», arXiv:hep-th/9611050, 1996.
- [18] C.P. Bachas, «Lectures on D-branes», arXiv:hep-th/9806199, 1998.
- [19] T. Appelquist, H.-C. Cheng, B.A. Dobrescu, «Bounds on universal extra dimensions», *Phys. Rev. D*, 64, (2001), 035002.
- [20] E.E. Boos, V.E. Bunichev, M.A. Perfilov, M.N. Smolyakov, I.P. Volobuev, «The specificity of searches for  $W'$ ,  $Z'$  and  $\gamma'$  coming from extra dimensions», *J. of High En. Phys.*, V. 06, P. 160, (2014).
- [21] Tumasyan A. et al., [CMS Collaboration], «Search for a  $W'$  boson decaying to a vector-like quark and a top or bottom quark in the all-jets final state at  $\sqrt{s}=13$  TeV», *JHEP*, 09, (2022), 088.
- [22] Avnish, K. Ghosh, T. Jha, S. Niyogi, «Minimal and nonminimal universal extra dimension models in the light of LHC data at 13 TeV», *Phys. Rev. D*, 103, 115011, (2021).
- [23] CMS Collaboration, «Search for high-mass resonances in final states with a lepton and missing transverse momentum at  $\sqrt{s}=13$  TeV» *JHEP*, 06, (2018), 128.

[24] ATLAS Collaboration, «Search for a heavy charged boson in events with a charged lepton and missing transverse momentum from  $pp$  collisions at  $\sqrt{s}=13$  TeV with the ATLAS detector», *Phys. Rev. D*, 100, (2019), 052013.

[25] CMS Collaboration, «Search for a heavy resonance decaying to a pair of vector bosons in the lepton plus merged jet final state at  $\sqrt{s}=13$  TeV», *JHEP*, 05, (2018), 088.

[26] ATLAS Collaboration, «Search for  $W W/W Z$  resonance production in  $\ell\nu qq$  final states in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s}=13$  TeV with the ATLAS detector», *JHEP*, 03, (2018), 042.

[27] CMS Collaboration, «Searches for  $W'$  bosons decaying to a top quark and a bottom quark in proton-proton collisions at 13 TeV», *JHEP*, 08, (2017), 029.

[28] ATLAS Collaboration, «Search for  $W' \rightarrow tb$  decays in the hadronic final state using  $pp$  collisions at  $\sqrt{s}=13$  TeV with the ATLAS detector», *Phys. Lett. B*, V. 781, (2018), P. 327-348.

[29] L. Randall, R. Sundrum, «Large mass hierarchy from a small extra dimension», *Phys. Rev. Lett.*, V. 83, (1999), P. 3370–3373.

[30] C. Charmousis, R. Gregory, V.A. Rubakov., «Wave function of the radion in a brane world», *Phys. Rev. D*, 62 (2000), 067505.

[31] E.E. Boos, Y.A. Kubyshin, M.N. Smolyakov, I.P. Volobuev., «Effective Lagrangians for physical degrees of freedom in the Randall-Sundrum model», *Class. Quant. Grav.*, 19, (2002), P. 4591–4605.

[32] E.E. Boos, I.P. Volobuev, Yu.A. Kubyshin, M.N. Smolyakov, «Effective Lagrangians of the Randall-Sundrum model», *Theor. and Math. Phys.*, V. 131, (2002), P. 629–640.

[33] W.D. Goldberger, M.B. Wise, «Modulus stabilization with bulk fields», *Phys. Rev. Lett.*, 83, 4922, (1999).

[34] V.O. Egorov, I.P. Volobuev, «Stabilization of the extra dimension size in RS model by bulk Higgs field», 2017, *J. Phys.: Conf. Ser.* 798, 012085.

[35] D.S. Gorbunov, S.M. Sibiryakov, «Ultra-large distance modification of gravity from Lorentz symmetry breaking at the Planck scale», JHEP, 09, (2005), 085.

[36] E.E. Boos, I.P. Volobuev, Yu.S. Mikhailov, M.N. Smolyakov, «Linearized gravity in the Randall-Sundrum model with stabilized distance between branes», Theor. Math. Phys., V. 149, 3, (2006), P. 1591–1603.

[37] E.E. Boos, Yu.S. Mikhailov, M.N. Smolyakov, I.P. Volobuev, «Physical degrees of freedom in stabilized brane world models», Mod. Phys. Lett. A, 2006, v. 21, P. 1431–1449.

[38] I.P. Volobuev, Yu.S. Mikhailov, M.N. Smolyakov, «Newtonian limit in the stabilized Randall-Sundrum model», Theor. Math. Phys., 156 (2008), P. 1159-1168.

[39] E. Boos, S. Keizerov, E. Rakhmetov, K. Svirina, «Higgs boson-radion similarity in production processes involving off-shell fermions», Phys. Rev. D, 90, (2014), 095026.

[40] Боос Э.Э., Кейзеров С.И., Рахметов Э.Р., Свирина К.С., «Сходство и некоторые различия процессов рождения и распада радиона и бозона Хиггса с участием фермионов вне массовой поверхности», Ядерная Физика и Инжиниринг, т. 5, № 9-10, (2014).

[41] E. Boos, S. Keizerov, E. Rakhmetov, K. Svirina, «Similarity and differences between the radion and Higgs boson production and decay processes involving off-shell fermions», Phys. of Atom. Nucl. V. 78: 13, (2015).

[42] E. Boos, S. Keizerov, E. Rakhmetov, K. Svirina, «Comparison of associated Higgs boson-radion and Higgs boson pair production processes», Phys. Rev. D, 94, 024047 (2016).

[43] E.E. Boos, S.I. Keizerov, E.R. Rakhmetov, K.S. Svirina, «Comparison of the Processes of Higgs Boson Pair Production and Associated Production of a Radion and a Higgs Boson», Physics of Particles and Nuclei, V. 48 (05), (2017), P. 745–747.

[44] I.P. Volobuev, S.I. Keizerov, E.R. Rakhmetov, «Nonlinear radion interactions», *Theor. Math. Phys.*, V. 205, (2020), P. 1318–1332.

[45] И.П. Волобуев, С.И. Кейзеров, Э.Р. Рахметов, «Устойчивость стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума относительно квантовых поправок», *Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия.* 79 (2), 2420103, (2024).

[46] Kisselev A.V., «Virtual gravitons and brane field scattering in the Randall-Sundrum model with a small curvature», *Phys. Rev. D*, (2006), 73, 024007.

[47] Kisselev A.V., «Randall-Sundrum scenario with a small curvature and Drell-Yan process at the LHC», *Phys. Rev. D*, (2013), 88, 095012.

[48] Toms D.J., «Quantised bulk fields in the Randall–Sundrum compactification model», *Phys. Lett. B*, (2000), 484, P. 149-153.

[49] Goldberger W.D., Rothstein I.Z., «Quantum stabilization of compactified AdS5», *Phys. Lett. B*, (2000), 491, P. 339-344.

[50] Garriga J., Pujolas O., Tanaka T., «Radion effective potential in the brane world», *Nucl. Phys. B*, (2001), 605, P. 192-214.

[51] Flachi A., Pujolas O., «Quantum self-consistency of AdS $\times$ Sigma brane models», *Phys. Rev. D*, (2003), 68, 025023.

[52] Flachi A., Toms D.J., «Quantized bulk scalar fields in the Randall-Sundrum brane-model», *Nucl. Phys. B*, (2001), 610, P. 144.

[53] Flachi A., Moss I.G., Toms D.J., «Fermion vacuum energies in brane world models», *Phys. Lett. B*, (2001), 518, P. 153.

[54] Flachi A., Moss I.G., Toms D.J., «Quantized bulk fermions in the Randall-Sundrum brane model», *Phys. Rev. D*, (2001), 64, 105029.

[55] Uzawa K., «Dilaton Stabilization in (A)dS Spacetime with Compactified Dimensions», *Prog. Theor. Phys.*, (2003), V. 110, P. 457-498.

[56] Nojiri S., Obregon O., Odintsov S., «(Non)-singular brane-world cosmology induced by quantum effects in five-dimensional dilatonic gravity», *Phys. Rev. D*, (2000), 62, 104003.

[57] Garriga J., Pomarol A., «A stable hierarchy from Casimir forces and the holographic interpretation», *Phys. Lett. B*, (2003), 560, P. 91-97.

[58] Teo L.P., «Casimir effect of electromagnetic field in Randall-Sundrum spacetime», *J. High Energy Phys.*, V. 2010 (10), 19.

[59] Saharian A.A., Setare M.R., «The Casimir effect on background of conformally flat brane-world geometries», *Phys. Lett. B*, (2003), 552, P. 119-126.

[60] Toms D.J., Knapman A., «Stress-energy tensor for a quantized bulk scalar field in the Randall-Sundrum brane model», *Phys. Rev. D*, (2004), 69, 044023.

[61] Saharian A.A., «Wightman function and vacuum fluctuations in higher dimensional brane models», *Phys. Rev. D*, (2006), 73, 044012.

[62] Saharian A.A., «Bulk Casimir densities and vacuum interaction forces in higher dimensional brane models», *Phys. Rev. D*, (2006), 73, 064019.

[63] Shao S., Chen P., Gu J., «Stress-energy tensor induced by a bulk Dirac spinor in the Randall-Sundrum model», *Phys. Rev. D*, (2010), 81, 084036.

[64] Elizalde E., Odintsov S.D., Saharian A.A., «Fermionic Casimir densities in anti-de Sitter spacetime», *Phys. Rev. D*, (2013), 87, 084003.

[65] Kotanjyan A.S., Saharian A.A., Sargsyan H.G., «Electromagnetic field correlators and the Casimir effect for planar boundaries in AdS spacetime with application in braneworlds», *Phys. Rev. D*, (2020), 102, 105014.

[66] Saharian A.A., «Wightman function and Casimir densities on AdS bulk with application to the Randall–Sundrum braneworld», *Nucl. Phys. B*, (2005), 712, P. 196-228.



[67] Mkhitarian A.L., Saharian A.A., «Wightman function and vacuum densities for a  $Z_2$ -symmetric thick brane in AdS spacetime», J. High Energy Phys., V. 2007 (08), 63 (2007).

[68] Биррел Н., Девис П., «Квантованные поля в искривленном пространстве-времени», М.: Мир, 1984.

[69] Иваненко Д.Д., «Квантовая гравитация и топология», Т. 2. М., 1973.

[70] Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М., «Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях», М.: Энергоатомиздат, 1988.

[71] Мостепаненко В.М., Трунов Н.Н., «Эффект Казимира и его приложения», Успехи физ. наук, 1988, 156, №. 3. С. 385–426.

[72] Грац Ю. В., «Энергия Казимира в моделях контактных взаимодействий», Ядерная физика, 2018, Т. 81, №. 2. С. 242–246.

[73] Wald R.M., «The back reaction effect in particle creation in curved spacetime», Commun. Math. Phys., 1977, 54, P. 1-19.

[74] Wald R.M., «Trace anomaly of a conformally invariant quantum field in curved spacetime», Phys. Rev. D, 1978, 17, P. 1477-1484.

[75] Wald R.M., «Axiomatic renormalization of the stress tensor of a conformally invariant field in conformally flat spacetimes», Annals Phys., 1978, 110, P. 472-486.

[76] Sirunyan A.M., Tumasyan A., Adam W. et al. [CMS Collaboration], «Search for contact interactions and large extra dimensions in the dilepton mass spectra from proton-proton collisions at  $\sqrt{s}=13$  TeV», JHEP, 2019, 04. 144.

[77] Randal L., Sundrum R., «An Alternative to Compactification», Phys. Rev. Lett., (1999), V. 83, P. 4690.

[78] Davoudias H., Hewett J.H., Rizzo T.G., «Phenomenology of the Randall-Sundrum Gauge Hierarchy Model», Phys. Rev. Lett., (2000), V. 84, P. 2080.

[79] Davoudias H., Hewett J.H., Rizzo T.G., «Experimental probes of localized gravity: On and off the wall», Phys. Rev. D, (2001), V. 63, 075004.

[80] Бейтмен Г., Эрдейи А., «Высшие трансцендентные функции», Т. 2. М.: Наука, 1966.