С. Ю. Вернов, О. А. Хрусталев, Приближенные дважды периодические решения в $(1+1)$-мерной теории φ^4, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 2, 182–192

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 116, № 2
август, 1998

 С. Ю. Вернов*, О. А. Хрусталев†

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ДВАЖДЫ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В $(1+1)$-МЕРНОЙ ТЕОРИИ φ^4

Рассматриваются дважды периодические решения уравнения Лагранжа–Эйлера $(1+1)$-мерной скалярной теории φ^4. При условии малости нелинейного члена для нахождения асимптотических решений в форме стоячей волны применяется метод Пуанкаре. Доказано, что возникающая в случае нулевой массы проблема главного резонанса решается путем использования в качестве нулевого приближения эллиптической функции Якоби.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Периодические решения нелинейных уравнений. В настоящее время активно изучаются периодические решения нелинейных волновых уравнений вида

$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2}-g(\varphi)=0. \qquad (1)$$

В семидесятые и восьмидесятые годы для широкого класса непрерывных функций $g(\varphi)$ были доказаны теоремы существования подобных решений, удовлетворяющих определенным граничным условиям по x.

В работе [1] доказано, что краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2}-g(\varphi)=0, \quad g(0)=0, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty}\varphi(x,t)=0, \\ \varphi(x,t+T)=\varphi(x,t), \quad x,t,T\in\mathbb{R}, \end{cases} \qquad (2)$$

имеет решение, только если

$$g'(0)>\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

---

*Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: svernov@theory.npi.msu.su

†Институт теоретических проблем микромира Московского государственного университета, Физический факультет Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: khrust@sunny.bog.msu.su

Прямым следствием этой теоремы является отсутствие нетривиальных решений задачи (2) в случае безмассовой теории φ^4, т. е. при $g(\varphi) = \varphi^3$. Данный результат не означает, разумеется, полного отсутствия периодических решений в этой теории.

Изменяя граничные условия по x, получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} - g(\varphi) = 0, \quad g(0) = 0, \\ \varphi(0,t) = \varphi(\pi,t) = 0, \\ \varphi(x,t+T) = \varphi(x,t), \quad x,t,T \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{$2'$}$$

Для непрерывных неубывающих функций $g(\varphi)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|\varphi|\to\infty} \frac{g(\varphi)}{\varphi} = \infty,$$

было доказано, что решение задачи ($2'$) существует, если найдутся такие $\alpha, \beta > 0$, что $\forall\varphi \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}\varphi \cdot g(\varphi) - \int_0^\varphi g(t)\,dt \geqslant \beta|g(\varphi)| - \alpha.$$

Авторы работы [2] доказали данное утверждение, обобщив доказательство [3], сделанное для более узкого класса функций $g(\varphi)$. Упрощенное доказательство для случая $g(\varphi) = |\varphi|^n \cdot \varphi$, где $n > 0$, дано в [4].

В статье [5] рассмотрена следующая краевая задача для уравнения Лагранжа–Эйлера теории φ^4 с массой, зависящей от пространственной координаты x:

$$\begin{cases} L_M\varphi(x,t) - \dfrac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} - \varepsilon\varphi^3(x,t) = 0, \\ \varphi(0,t) = \varphi(\pi,t) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$L_M \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - M^2(x), \qquad M^2(x) \in L^2[0,1].$$

Для собственных значений μ_j оператора L_M в [5] введены дополнительные условия, названные нерезонансными: пусть для всех j собственные числа $\mu_j < 0$, а все $\varpi_j \equiv \sqrt{|\mu_j|}$ и $\overline{\Omega} \equiv (\varpi_1, \ldots, \varpi_N)$ удовлетворяют условиям:

$|n \cdot \overline{\Omega} \pm j| \geqslant G_1(|n| + j)^{-\tau}$, где $n \neq 0,\ n \in \mathbb{Z}^N,\ j \geqslant 0$,

$|n \cdot \overline{\Omega} \pm \varpi_j| \geqslant G_1(|n| + j)^{-\tau}$, где $n \in \mathbb{Z}^N,\ j \geqslant N+1$,

$|n \cdot \overline{\Omega} \pm (\varpi_j \pm \varpi_i)| \geqslant G_2(|n| + |j-i|)^{-\tau}$, где $n \in \mathbb{Z}^N,\ j,i \geqslant N+1$, а G_1, G_2 и τ – положительные числа.

Было доказано, что если $\varepsilon \ll 1$, то выполнение этих условий гарантирует существование периодического (при $N = 1$) или квазипериодического (при $N > 1$) по времени решения задачи (3). При этом отмечалось, что доказательство существования ничего не говорит о явном виде решений и о принадлежности их к известным классам специальных функций.

1.2. Два класса дважды периодических решений. Наше исследование посвящено изучению $(1+1)$-мерной модели скалярной теории φ^4, описываемой лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\varphi_{,t}^2(x,t) - \varphi_{,x}^2(x,t) - M^2\varphi^2(x,t) - \frac{\varepsilon}{2}\varphi^4(x,t)\right).$$

Рассмотрим соответствующее уравнение Лагранжа–Эйлера

$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} - M^2\varphi(x,t) - \varepsilon\varphi^3(x,t) = 0 \tag{1'}$$

с целью найти его решения, периодические как по пространственной координате x, так и по временной t. При этом период по x выберем равным 2π и будем искать период по t.

Существуют два класса дважды периодических решений. Если искать решения в виде бегущих волн

$$\varphi(x,t) = \varphi(x - vt), \tag{4}$$

где v – скорость волны, то уравнение $(1')$ легко сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению Дюффинга [6]. Периодическими решениями этого уравнения являются эллиптические функции Якоби [7]. Подобные поля хорошо изучены как для двумерной [8], так и для четырехмерной [9] скалярной теории φ^4.

Другой класс дважды периодических решений образуют решения в виде стоячей волны:

$$\varphi(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{C}_{nj}\sin\bigl(n(x-x_0)\bigr)\sin\bigl(j\omega(t-t_0)\bigr), \tag{5}$$

где x_0 и t_0 определяются из начальных и граничных условий. В силу трансляционной инвариантности уравнения $(1')$ можно, не ограничивая общности, положить $x_0 = 0$ и $t_0 = 0$. Выбор $x_0 = 0$ соответствует граничным условиям задачи $(2')$.

Нахождение периодических решений в форме стоячей волны – задача более сложная, чем отыскание бегущих волновых полей, поскольку в этом случае уравнение в частных производных не сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Аналитическая форма подобных решений пока не найдена, более того, существование периодических решений в форме стоячей волны при произвольных значениях параметров еще не доказано.

Подстановкой в уравнение $(1')$ функции $\varphi(x,t)$ в форме (5) можно свести данное уравнение к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений на коэффициенты $\mathcal{C}_{nj}$ и частоту ω. Данная система может быть решена численно с помощью метода Галеркина, т. е. посредством обрезания ряда Фурье по обоим индексам, когда полагают $\mathcal{C}_{nj} = 0$ для всех $n, j > N$. Случай $M = 1$ и $\varepsilon = 1$ был исследован при различных значениях N. Как оказалось [10], результаты вычислений практически не отличаются друг от друга, что свидетельствует о самосогласованности подхода. При этом отмечено, что в рамках численного решения остается открытым вопрос о корректности обрезания и сходимости последовательности полученных решений при $N \to \infty$.

В данной работе для решения уравнения $(1')$ в случае нулевой массы также применяется подстановка функции $\varphi(x,t)$ в форме (5). При этом для упрощения системы мы используем не обрезание, а условие малости ε и получаем асимптотическое разложение, содержащее уже в нулевом порядке бесконечное число гармоник.

1.3. Равномерные асимптотические разложения. Будем считать, что ε – малый положительный параметр, и попробуем найти решение уравнения $(1')$ в виде формального степенного ряда. Непосредственные разложения по степеням ε имеют конечные области применимости из-за наличия вековых, т. е. неограниченных, членов. Разложения, содержащие только ограниченные функции и, следовательно, одинаково пригодные в любой точке пространства, называются *равномерными*. Для построения равномерных разложений были разработаны асимптотические методы (см., например, [11, 12]). Обзор таких методов содержится в книге [13].

Простота алгоритма построения равномерного асимптотического ряда зависит от значения массового члена. Даже в случае однородной массы отсутствие резонанса важно не только для доказательства сходимости равномерного асимптотического ряда, но и для самого его построения. Различают два случая.

Обозначим через Ω_j частоты периодических решений уравнения $(1')$ при $\varepsilon = 0$: $\Omega_j = \sqrt{j^2 + M^2}$, где $j \in \mathbb{N}$. Если для любых i и j отношение Ω_i/Ω_j не есть рациональное число, то имеет место нерезонансный случай. В этом случае с помощью стандартных асимптотических методов, например метода Пуанкаре, можно построить асимптотический ряд с любой степенью точности. При этом все вековые члены уничтожаются правильным выбором частоты.

Противоположный случай, когда существуют две частоты Ω_i и Ω_j, отношение которых является рациональным числом, называется резонансным. В резонансном случае, напротив, удается построить равномерное разложение только в конечном числе первых порядков по ε. При этом чем меньше номера i и j резонирующих частот, тем меньше периодических членов асимптотического ряда удается построить. Если же имеется нулевая масса, когда $\Omega_j = j$ и все частоты резонируют, возникает главный резонанс, т. е. резонанс уже в первом порядке по ε.

Мы рассматриваем безмассовую теорию φ^4 и ищем асимптотическое решение в виде стоячей волны. Целью данной работы является построение первых членов равномерного, более того, состоящего исключительно из периодических функций асимптотического разложения решения квазилинейного уравнения Клейна–Гордона в случае главного резонанса. Мы показываем, как с помощью нетривиального выбора нулевого приближения можно получить и первое, и второе приближения в форме стоячей волны.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА В СЛУЧАЕ БЕЗМАССОВОЙ ТЕОРИИ φ^4

2.1. Метод Пуанкаре. Для построения асимптотического решения воспользуемся методом Пуанкаре. Введем новое время $\tilde{t} \equiv \omega t$ и будем искать дважды периодическое решение уравнения $(1')$ с нулевой массой $\varphi(x,\tilde{t}\,)$ и частоту ω в форме разложений по ε:

$$\varphi(x,\tilde{t},\varepsilon)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x,\tilde{t}\,)\varepsilon^n,$$
$$\omega(\varepsilon)\equiv 1+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\varepsilon^n.$$

Разлагая теперь уравнение $(1')$ с $M=0$ в ряд по степеням ε, получаем последовательность уравнений. Выпишем два первых уравнения этой последовательности.

В нулевом порядке по ε уравнение для определения φ_0 имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi_0(x,\tilde{t}\,)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_0(x,\tilde{t}\,)}{\partial\tilde{t}^2}=0. \tag{6}$$

В первом порядке по ε для определения $\varphi_0,\ \varphi_1$ и ω_1 находим уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi_1(x,\tilde{t}\,)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_1(x,\tilde{t}\,)}{\partial\tilde{t}^2}=2\omega_1\frac{\partial^2\varphi_0(x,\tilde{t}\,)}{\partial\tilde{t}^2}+\varphi_0^3(x,\tilde{t}\,). \tag{7}$$

Уравнение (6) не позволяет однозначно определить функцию $\varphi_0(x,\tilde{t}\,)$. Если выбрать в качестве решения этого уравнения $\varphi_0(x,\tilde{t}\,)=\sin(x)\sin(\tilde{t}\,)$, то уравнение (7) не будет иметь периодических решений, так как частота внешней силы $\sin(3x)\sin(3\tilde{t}\,)$ совпадает с частотой собственных колебаний, а это приводит к резонансу. Ясно, что, в отличие от случая ненулевой массы, никаким выбором частотной поправки ω_1 нельзя получить равномерное разложение. Для получения такого разложения необходимо отыскать другое периодическое решение уравнения (6), т. е. другое нулевое приближение функции $\varphi(x,\tilde{t}\,)$.

2.2. Условие существования периодического решения. Рассмотрим уравнения (6) и (7) не по отдельности, а как систему, и попытаемся выделить из множества периодических решений уравнения (6) такую функцию $\varphi_0(x,\tilde{t}\,)$, что уравнение (7) имеет периодическое решение. Таким образом, для нахождения $\varphi_0(x,\tilde{t}\,)$ используется не только уравнение нулевого порядка по ε, т. е. (6), но и уравнение первого порядка по ε, т. е. (7).

Общее решение уравнения (6) в форме стоячей волны (5) есть

$$\varphi_0(x,\tilde{t}\,)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)\sin(n\tilde{t}\,),$$

где a_n – произвольные постоянные.

Мы ищем решение уравнения (7) $\varphi_1(x,t)$ также в форме стоячей волны, т. е.

$$\varphi_1(x,\tilde{t}\,)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{nj}\sin(nx)\sin(j\tilde{t}\,).$$

Для определения коэффициентов Фурье функций $\varphi_0(x,t)$ и $\varphi_1(x,t)$ имеем уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} R_{nj}(\mathbf{a},\mathbf{b})\sin(nx)\sin(j\tilde t\,) = 0,$$

возникающее после подстановки разложений для функций φ_0 и φ_1 в уравнение (7).

Полученное уравнение равносильно следующей системе уравнений:

$$\forall n,j\in\mathbb{N}:\quad R_{nj}(\mathbf{a},\mathbf{b})=0. \tag{7$'$}$$

Эта система содержит подсистему, определяющую коэффициенты Фурье функции $\varphi_0(x,\tilde t\,)$:

$$\forall j\in\mathbb{N}:\quad R_{jj}(\mathbf{a})=0, \tag{8}$$

где

$$R_{jj}\equiv 9a_j^3+3a_j^2a_{3j}+a_j\left(6\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty}(2a_s^2+a_sa_{2j+s})+3\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{2j-1}a_sa_{2j-s}-32j^2\omega_1\right)+$$
$$+3\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{p=1\\ p\neq j}}^{\infty}a_sa_pa_{j+s+p}+3\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{p=1\\ p\neq j\\ p\neq 2j-s}}^{\infty}a_sa_pa_{s+p-j}+\sum_{s=1}^{j-2}\sum_{p=1}^{j-2}a_sa_pa_{j-s-p}.$$

Мы получили необходимое и достаточное условие существования периодического решения уравнения (7): периодическая функция $\varphi_1(x,\tilde t\,)$, удовлетворяющая уравнению (7), существует тогда и только тогда, когда последовательность коэффициентов Фурье функции $\varphi_0(x,\tilde t\,)$ является решением системы (8).

Коэффициент a_1 – параметр, задающий амплитуду колебаний. Действительно, если $a_j=c_ja_1$ и $\omega_1=c_\omega a_1^2$, то все полиномы R_{jj} пропорциональны a_1^3: $R_{jj}(\mathbf{a})=a_1^3R_{jj}(\mathbf{c})$, и, следовательно, коэффициент a_1 может быть выбран произвольно. Поскольку нашей целью является нахождение действительной функции $\varphi_0(x,\tilde t\,)$, то мы ищем $c_j\in\mathbb{R}$.

2.3. Нулевое приближение. Не существует общих методов точного решения систем, подобных (8), поскольку, во-первых, система бесконечна и все $R_{jj}(\mathbf{c})$ суть бесконечные суммы, а, во-вторых, все уравнения нелинейны. Ограничимся поиском частного решения этой системы. Мы ищем функцию $\varphi_0(x,\tilde t\,)$ такую, что коэффициенты ее ряда Фурье удовлетворяют данной системе. Такая функция должна обладать бесконечным рядом Фурье, в то же время все ее четные гармоники могут быть равны нулю. Для упрощения вычислений предположим, что ряд Фурье функции $\varphi_0(x,\tilde t\,)$ содержит только нечетные гармоники.

Задачу можно приближенно решить методом Галеркина, т. е. обрезанием высших диагональных гармоник $\varphi_0(x,\tilde t\,)$ и поиском решения в виде

$$\varphi_0(x,\tilde t\,)=a_1\left\{\sum_{j=1}^{N}c_{2j-1}\sin\bigl((2j-1)x\bigr)\sin\bigl((2j-1)\tilde t\,\bigr)\right\}.$$

Мы получаем конечную систему нелинейных уравнений. Решения этой нелинейной системы могут быть найдены только с помощью ЭВМ. Полученные для $N = 10$ значения c_{2j-1} практически совпали с элементами конечной последовательности

$$\mathbf{d} = \left\{ d_{2j-1} = \frac{f_{2j-1}}{f_1}, \quad \text{где} \quad f_{2j-1} \equiv \frac{q^{j-1/2}}{1+q^{2j-1}}, \quad d_{2j} = 0, \quad 0 < j < 11 \right\}$$

при $q = 0.0142142623201$. Легко проверить, что подстановка $\mathbf{d}$ в систему (8) дает $R_{jj}(\mathbf{d}) < 10^{-12}$. Иными словами, данная конечная последовательность является приближенным решением системы (8).

Для произвольного q определим последовательность $\mathbf{f}$ следующим образом:

$$\mathbf{f} = \left\{ \forall n \in \mathbb{N}\colon f_{2n-1} = \frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}}, f_{2n} = 0 \right\}.$$

Легко заметить, что числам q и $q' \equiv 1/q$ соответствуют одинаковые значения f_j. Чтобы получить однозначно зависящую от q последовательность $\mathbf{f}$, стремящуюся к нулю, но не равную нулю тождественно, ограничим область изменения q интервалом $(0, 1)$.

Члены последовательности $\mathbf{f}$ пропорциональны коэффициентам Фурье функции эллиптического косинуса $\operatorname{cn}(z, k)$ [7]:

$$\operatorname{cn}(z, k) = \frac{\gamma}{k} \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n-1} \cos\left((2n-1) \frac{\gamma z}{4} \right), \tag{9}$$

где $\gamma \equiv 2\pi/K$.

Поясним введенные обозначения и отметим некоторые свойства эллиптического косинуса:

основными периодами двоякопериодической функции $\operatorname{cn}(z, k)$ являются $4K(k)$ и $2K(k) + 2iK'(k)$, где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, $K'(k) \equiv K(k')$, а $k' = \sqrt{1-k^2}$;

параметр q в разложении Фурье (формула (9)) выражается через эллиптические интегралы следующим образом: $q \equiv \exp\{-\pi(K'/K)\}$;

разложение в ряд Фурье функции $\operatorname{cn}(z, k)$ не содержит четных гармоник, это разложение справедливо в полосе комплексной плоскости $-K' < \operatorname{Im} z < K'$, в частности для $z \in \mathbb{R}$;

если $k \in (0, 1)$ и $z \in \mathbb{R}$, то $\operatorname{cn}(z, k) \in \mathbb{R}$;

функция $\operatorname{cn}(z, k)$ является периодическим решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \operatorname{cn}(z, k)}{dz^2} = (2k^2 - 1) \operatorname{cn}(z, k) - 2k^2 \operatorname{cn}^3(z, k). \tag{10}$$

Последнее свойство означает, что последовательность коэффициентов Фурье функции $\operatorname{cn}(z, k)$ есть решение некоторой бесконечной системы кубических уравнений. Найдем эту систему.

С одной стороны, из формулы (9) легко получить разложение в ряд Фурье для функции $\mathrm{cn}^3(z,k)$:

$$\mathrm{cn}^3(z,k) = \frac{\gamma^3}{4k^3}\sum_{j=1}^{\infty} F_j^{(3)}(\mathbf{f})\cos\left(j\,\frac{\gamma z}{4}\right),$$

где $j = 1, 3, 5, \ldots,$

$$F_j^{(3)}(\mathbf{f}) = 3f_j^3 + 3f_j^2 f_{3j} + f_j\left(6\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty}(f_s^2 + f_s f_{2j+s}) + 3\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{2j-1} f_s f_{2j-s}\right) +$$
$$+ 3\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{p=1\\ p\neq j}}^{\infty} f_s f_p f_{j+s+p} + 3\sum_{s\neq j}^{\infty}\ \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j\\ p\neq 2j-s}}^{\infty} f_s f_p f_{s+p-j} + \sum_{s=1}^{j-2}\sum_{p=1}^{j-2} f_s f_p f_{j-s-p}$$

и во всех суммах суммирование идет только по нечетным числам.

С другой стороны, из дифференциального уравнения (10) следует, что $F_j^{(3)}(\mathbf{f})$ пропорционально f_j, причем коэффициент пропорциональности зависит от j:

$$\forall j\colon\quad F_j^{(3)}(\mathbf{f}) = \left(\frac{2(2k^2-1)}{\gamma^2} + \frac{j^2}{8}\right) f_j. \tag{11}$$

Последовательность $\mathbf{f}$ – это ненулевое решение системы (11) при всех значениях $q \in (0,1)$. Следующее утверждение доказывает существование выделенного значения q.

Утверждение. *Существует такое значение параметра* $q \in (0,1)$, *что последовательность* $\mathbf{f}$ *является действительным решением системы* (8), *при этом значение* ω_1 *тоже действительно.*

Доказательство. Подставляя в систему (8) последовательность $\mathbf{f}$: $a_j = f_j$ и используя систему (11), получаем, что

$$R_{jj}(\mathbf{f}) = \left\{F_j^{(3)}(\mathbf{f}) + f_j\left(6\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 - 32j^2\omega_1\right)\right\} =$$
$$= f_j\left\{6\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 + \frac{2(2k^2-1)}{\gamma^2} + j^2\left(\frac{1}{8} - 32\omega_1\right)\right\} = 0.$$

Система (8) имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда

$$\omega_1 = \frac{1}{256} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \frac{(1-2k^2)}{3\gamma^2}.$$

Мы получили значение ω_1. Все величины во втором уравнении системы выражаются через параметр q, при этом получается следующее уравнение:

$$3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}}\right)^2-\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\right)^2+2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}}\right)^2=0. \tag{12}$$

Это уравнение на интервале (0,1) имеет решение $q = 1.42142623201\times10^{-2}\pm1\times10^{-13}$. Утверждение доказано.

Теперь несложно сконструировать требуемое нулевое приближение функции $\varphi(x,\tilde{t}\,)$:

$$\varphi_0(x,\tilde{t}\,)=A\left\{\mathrm{cn}(\alpha(x-\tilde{t}\,),k)-\mathrm{cn}(\alpha(x+\tilde{t}\,),k)\right\}.$$

Функция $\varphi_0(x,\tilde{t}\,)$ при всех $k\in(0,1)$ является действительным решением уравнения (6). Если положить $\alpha=2K/\pi$, то периоды $\varphi_0(x,\tilde{t}\,)$ по x и по $\tilde{t}$ будут равны 2π. Используя теперь разложение Фурье для функции $\mathrm{cn}(z,k)$ (9), получаем следующее разложение для функции $\varphi_0(x,\tilde{t}\,)$:

$$\varphi_0(x,\tilde{t}\,)=2A\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}f_{2n-1}\sin((2n-1)x)\sin((2n-1)\tilde{t}\,).$$

Как было доказано, последовательность $\mathbf{f}$ является действительным решением системы (8) при $q = 1.42142623201\times10^{-2}\pm1\times10^{-13}$. Среднему значению q соответствуют $k=0.45107559881$ и $\alpha=1.0576653982$. Вследствие однородности всех уравнений системы (8) последовательность коэффициентов Фурье функции $\varphi_0(x,\tilde{t}\,)$ при данном значении параметров также будет решением системы (8), при этом

$$\omega_1=\frac{\gamma^2}{64k^2}A^2=1.0983600974A^2.$$

Таким образом, доказано, что функция

$$\varphi_0(x,\tilde{t}\,)=A\left\{\mathrm{cn}(\alpha(x-\tilde{t}\,),k)-\mathrm{cn}(\alpha(x+\tilde{t}\,),k)\right\}$$

при $k=0.45107559881$ и $\alpha=1.0576653982$ является искомой.

2.4. Первое приближение. Теперь осталось решить только линейные уравнения для получения всех недиагональных коэффициентов $\varphi_1(x,\tilde{t}\,)$. Обозначим через D_{nj} коэффициенты Фурье функции $\varphi_0^3(x,\tilde{t}\,)$:

$$\varphi_0^3(x,\tilde{t}\,)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}D_{nj}\sin(nx)\sin(j\tilde{t}\,).$$

Из уравнения (7) следует, что

$$\varphi_1(x,\tilde{t}\,)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{D_{nj}}{j^2-n^2}\sin(nx)\sin(j\tilde{t}\,)+\sum_{n=1}^{\infty}b_{nn}\sin(nx)\sin(n\tilde{t}\,).$$

Отметим, что функция $\varphi_1(x,\tilde{t}\,)$ с произвольными диагональными коэффициентами b_{nn} является решением уравнения (7), при этом все недиагональные коэффициенты $\varphi_1(x,\tilde{t}\,)$ пропорциональны A^3.

2.5. Второе приближение. Рассмотрим уравнение второго порядка по ε:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2}\right] \varphi_2(x,\tilde{t}\,) = 2\omega_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x,\tilde{t}\,)}{d\tilde{t}^2} + (2\omega_2 + \omega_1^2)\frac{\partial^2 \varphi_0(x,\tilde{t}\,)}{\partial \tilde{t}^2} + 3\varphi_1(x,\tilde{t}\,)\varphi_0^2(x,\tilde{t}\,).$$

Пусть все диагональные коэффициенты Фурье функции $\varphi_1(x,t)$ равны нулю: $b_{nn} = 0$. Тогда $\forall n,j$: $b_{nj} = -b_{jn}$, вследствие чего функция $\varphi_1(x,\tilde{t}\,)\varphi_0^2(x,\tilde{t}\,)$ не имеет диагональных гармоник. Положив $\omega_2 = -\omega_1^2/2$, мы получаем периодическое решение уравнения во втором порядке по ε:

$$\varphi_2(x,\tilde{t}\,) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{\infty} \frac{H_{nj}}{j^2 - n^2} \sin(nx)\sin(j\tilde{t}\,) + \sum_{n=1}^{\infty} h_{nn} \sin(nx)\sin(n\tilde{t}\,),$$

где H_{nj} – коэффициенты Фурье функции

$$H(x,\tilde{t}\,) \equiv 2\omega_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x,\tilde{t}\,)}{\partial \tilde{t}^2} - 3\varphi_1(x,\tilde{t}\,)\varphi_0^2(x,\tilde{t}\,) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} H_{nj}\sin(nx)\sin(j\tilde{t}\,).$$

Диагональные коэффициенты h_{nn} могут быть найдены только из уравнения следующего порядка.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере безмассовой теории φ^4 рассмотрено построение равномерного разложения решения квазилинейного уравнения Клейна–Гордона в случае главного резонанса. Показано, что задача решается методом Пуанкаре, при этом необходимо надлежащим образом выбрать нулевое приближение.

Используя в качестве нулевого приближения функцию

$$\varphi_0(x,\tilde{t}\,) = A\left\{\mathrm{cn}\big(\alpha(x-\tilde{t}\,),k\big) - \mathrm{cn}\big(\alpha(x+\tilde{t}\,),k\big)\right\}$$

с $k = 0.45107559881$ и $\alpha = 1.0576653982$, мы построили следующее разложение по функциям в форме стоячей волны решения волнового уравнения безмассовой теории φ^4:

$$\varphi(x,\omega t) = \varphi_0(x,\omega t) + \varepsilon\varphi_1(x,\omega t) + \varepsilon^2\varphi_2(x,\omega t) + O(\varepsilon^3),$$

где (с точностью $O(\varepsilon^3)$)

$$\omega = 1 + \frac{\gamma^2}{64k^2}A^2\varepsilon - \frac{\gamma^4}{8192k^4}A^4\varepsilon^2 = 1 + 1.0983600974A^2\varepsilon - 0.6031974518A^4\varepsilon^2.$$

Таким образом, используя эллиптический косинус вместо тригонометрического, мы построили равномерное разложение и нашли периодическое решение с точностью $O(\varepsilon^3)$. Остается открытым вопрос о возможности построения на основе полученного приближения равномерного асимптотического ряда. Авторы надеются исследовать этот вопрос в дальнейших публикациях.

Авторы выражают благодарность В. Ф. Еднералу и П. К. Силаеву за помощь в использовании методов компьютерной алгебры и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *J. M. Colon.* C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1982. V. 294. P. 127.
[2] *H. Brezis, J. M. Colon, L. Nirenberg.* Commun. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. P. 667.
[3] *P. Rabinovitz.* Commun. Pure Appl. Math. 1977. V. 30. P. 31.
[4] *H. Brezis.* Bull. Amer. Math. Soc. 1983. V. 8. P. 409.
[5] *C. E. Wayne.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 127. P. 479.
[6] *G. Duffing.* Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig: Vieweg, 1918.
[7] *Г. Бейтман, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции (Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье). М.: Наука, 1967.
[8] *S. Aubry.* J. Chem. Phys. 1976. V. 64. P. 3392.
[9] *Д. Ф. Курдгелаидзе.* ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 842.
[10] *П. К. Силаев, О. А. Хрусталев.* ТМФ (в печати).
[11] *А. Пуанкаре.* Новые методы небесной механики. Избранные труды. М.: Наука, 1971–1974.
[12] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
[13] *А. Найфе.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 27.II.1998 г.