

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

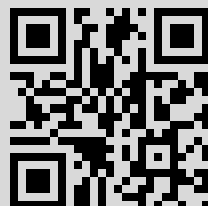
И. Я. Арефьева, С. Ю. Вернов, А. С. Кошелев, Точное решение в струнной космологической модели, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 1, 23–41

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 91.229.59.100

28 октября 2014 г., 00:19:48



© 2006 г. И. Я. Арефьева*, С. Ю. Вернов[†], А. С. Кошелев*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ В СТРУННОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Построено точное решение уравнений Фридмана с фантомным скалярным полем материи, происходящим из полевой теории струн, и явно показано отсутствие сингулярности типа “большой разрыв”. Особенности рассматриваемой модели являются духовый знак кинетического члена и специальная полиномиальная форма эффективного тахионного потенциала. Предложенное решение устойчиво относительно малых изменений начальных условий и специальных изменений формы потенциала.

Ключевые слова: струны, полевая теория струн, космология, браны, тахион, фантом, темная энергия, большой разрыв.

1. ВВЕДЕНИЕ

Комбинированный анализ данных, полученных при изучении сверхновых типа Ia, галактических кластеров, а также данных эксперимента WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), убедительно показывает ускоренное расширение Вселенной [1]–[3]. Космологическое ускорение указывает на то, что в настоящее время во Вселенной доминирует равномерно распределенная медленно изменяющаяся космическая жидкость с отрицательным давлением, называемая *темной энергией* [4], [5] (об альтернативных подходах см., например, [6]).

Для спецификации различных типов космической жидкости обычно используется феноменологическое соотношение $p = w\rho$ между плотностями давления p и энергии ρ каждой из компонент жидкости, где w – параметр уравнения состояния, или, для краткости, параметр состояния. Компонента с отрицательным w соответствует темной энергии. Современные эксперименты, в том числе WMAP, свидетельствуют о том, что в настоящее время параметр состояния темной энергии близок к -1 (см. работы [3], [7], [8]). В частности, из существующих оценок [2], полученных по

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: arefeva@mi.ras.ru, koshelev@mi.ras.ru

[†]Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru

результатам наблюдений, вытекает, что с вероятностью 0.95 значение w лежит в интервале

$$-1.46 < w < -0.78.$$

С теоретической точки зрения указанная выше область w охватывает три существенно различных случая: $w > -1$, $w = -1$ и $w < -1$.

- Случай $w > -1$ реализуется в моделях квинтэссенции [9]–[11], которые являются космологическими моделями со скалярным полем. Такие типы моделей вполне приемлемы, однако возникает вопрос о происхождении этого скалярного поля. Для согласия с астрономическими экспериментальными данными скалярное поле должно быть очень легким и, следовательно, не принадлежащим к набору полей Стандартной Модели [12].

- Случай $w = -1$ описывается с помощью космологической константы. Этот сценарий допустим с общей точки зрения, однако существует проблема, связанная с порядком величины космологической константы, которая оказывается в 10^{120} раз меньше естественного теоретического предсказания [5].

- Случай $w < -1$ называется *фантомным* [13] и может быть реализован с помощью скалярного поля с духовым (фантомным) кинетическим членом. В этом случае все энергетические условия нарушаются, и возникают проблемы неустойчивости на классическом и квантовом уровнях [13]–[20]. Поскольку нет экспериментального подтверждения того, что случай $w < -1$ невозможен, и, более того, предложена прямая стратегия экспериментальной проверки неравенства $w < -1$ [21], интересно найти непротиворечивую модель, в которой условие $w < -1$ выполняется¹⁾.

Отметим, что в моделях κ -эссенции [10] можно встретить как значения $w < -1$, так и значения $w \geq -1$. При этом динамический переход из области $w \geq -1$ в область $w < -1$ и обратно запрещен при достаточно общих предположениях [23] и возможен только при специальных условиях [24].

Напомним, что в моделях с постоянным значением $w < -1$ и пространственно плоской метрикой Фридмана происходит обращение в бесконечность масштабного множителя и, следовательно, гибель Вселенной в конечный момент времени. Эта проблема известна как проблема “большого разрыва” [15], см. также [16]. Наиболее простой путь обхода этой проблемы в моделях с $w < -1$ – это введение скалярного поля ϕ с отрицательной временной компонентой кинетического члена [8], [17]. Появление таких слагаемых возможно за счет квантовых эффектов [18], [25]. Однако во всех предлагаемых моделях возникает проблема неустойчивости.

Возможный способ избежать проблемы неустойчивости в моделях с $w < -1$ состоит в рассмотрении фантомной модели как эффективной модели, возникающей из более фундаментальной теории, которая не имеет отрицательного кинетического члена. В частности, если рассмотреть модель с высшими производными типа $\phi e^{-\square\phi}$, то в простейшем приближении $\phi e^{-\square\phi} \simeq \phi^2 - \phi\square\phi$ такая модель приводит к кинетическому слагаемому с неправильным (духовым) знаком. Оказывается, что именно возможность такого типа и реализуется в полевой теории струн [20]. При

¹⁾ Отметим модель, приведенную в работе [22], в которой значение $w < -1$ является результатом введения аксиона.

этом все вопросы, связанные с нестабильностью теории с высшими производными, снимаются, поскольку рассматриваемая модель является приближением к теории струн.

Целью настоящей статьи является построение точного решения в полиномиальной модели, которая в некотором приближении близка к модели, возникающей в теории струн, а именно, в теории фермионной NSR-струны с учетом (GSO-)сектора. В качестве скалярного поля ϕ выступает тахион открытой струны, описывающий согласно гипотезе А. Сена [11] распад браны, при котором происходит медленный переход в стабильный вакуум, соответствующий состояниям замкнутой струны. Другие модели темной энергии, рассматривающие Вселенную как брану, представлены в работах [26].

Особенностями предлагаемой модели являются духовый знак кинетического члена и специальная форма потенциала:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 + \frac{1}{12m_p^2}\phi^2(3 - \phi^2)^2. \quad (1)$$

В первом приближении из полевой теории открытых струн в плоской метрике (что соответствует $m_p = \infty$) может быть получено лишь первое слагаемое в правой части (1) [27]. Второе слагаемое позволяет сохранить вид интерполирующего решения, полученного в плоской метрике, в случае Вселенной Фридмана, то есть при произвольном m_p . Отметим, что появление высших степеней ϕ возможно, если мы будем учитывать более тяжелые струнные возбуждения [28], однако нет основания ожидать, что из теории струн получатся точные значения коэффициентов потенциала (1). Анализ стабильности решения, проводимый в этой статье, указывает на то, что построенное решение является притягивающим, и не происходит существенного изменения в поведении решений при некотором изменении параметров потенциала. Это дает основания предполагать, что качественное поведение физических параметров H , w , q в модели с потенциалом (1) при определенных условиях окажется близким к поведению соответствующих величин в модели с потенциалом, взятым из теории струн.

Построенное решение не имеет сингулярностей и на больших временах становится де-ситтеровским. Это не противоречит общим теоремам теории относительности, поскольку в рассматриваемой модели нарушены энергетические условия (обсуждение этого вопроса см. в работе [29]).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы описываем космологическую модель, являющуюся приближением для модели, возникающей в полевой теории струн, и строим решения уравнений Фридмана для специального полиномиального потенциала. В разделе 3 мы в деталях рассматриваем динамику фантома и устанавливаем, что наше решение описывает ускоряющуюся Вселенную. В разделе 4 мы изучаем стабильность решения относительно изменений начальных условий и специальных изменений формы потенциала. В разделе 5 мы суммируем результаты и отмечаем пути обобщения предложенной модели.

2. ГРАВИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

2.1. Уравнения движения. Рассмотрим гравитационную модель с фантомным скалярным полем и пространственно плоской метрикой Фридмана. Так как происхождение фантомного поля, рассматриваемого в этой работе, связано с теорией струн, в действие следует включить характерную массу струны M_s и безразмерную константу взаимодействия открытых струн g_o . Действие имеет вид

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_p^2}{2M_s^2} R + \frac{1}{g_o^2} \left(+\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \right), \quad (2)$$

где M_p – масса Планка, а $g_{\mu\nu}$ – пространственно плоская метрика Фридмана,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2),$$

$a(t)$ есть масштабный фактор. Координаты (t, x_i) и поле ϕ являются безразмерными. Введем безразмерный параметр $m_p^2 = g_o^2 M_p^2 / M_s^2$.

Независимые уравнения движения имеют вид

$$3H^2 = \frac{1}{m_p^2} \varrho, \quad 3H^2 + 2\dot{H} = -\frac{1}{m_p^2} p. \quad (3)$$

Здесь H – параметр Хаббла, $H \equiv \dot{a}(t)/a(t)$, а точка обозначает производную по времени. Пусть скалярное поле зависит только от времени, т.е. $\phi = \phi(t)$, тогда

$$\varrho = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4)$$

Перепишем систему (3) в следующем виде:

$$\dot{H} = \frac{1}{2m_p^2} \dot{\phi}^2, \quad 3H^2 = \frac{1}{m_p^2} \left(V(\phi) - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right). \quad (5)$$

Помимо уравнений (5) из действия (2) получается уравнение движения для поля ϕ :

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V'_\phi = 0, \quad V'_\phi \equiv \frac{dV}{d\phi}. \quad (6)$$

Данное уравнение фактически является следствием системы (3). Выразив H через ϕ и $\dot{\phi}$, получаем

$$\ddot{\phi} + \text{sign}(H) \frac{\sqrt{3}}{m_p} \dot{\phi} \sqrt{-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) - V'_\phi} = 0. \quad (7)$$

Множитель $\text{sign}(H)$ определяет надлежащую ветвь функции квадратного корня. Расширению Вселенной соответствует $H > 0$.

2.2. Связь с теорией струн. В настоящее время один из возможных сценариев развития Вселенной связан с представлением ее как D3-браны (три пространственных и одна временная переменная), вложенной в многомерное пространство-время. D-браны естественным образом возникают в теории открытых струн. Мы будем рассматривать неэкстремальную брану. Эта D-брана нестабильна и эволюционирует в

стабильное состояние. Этот процесс описывается динамикой открытой фермионной струны, концы которой закреплены на бране, и которая содержит как (GSO+)-, так и (GSO-)-секторы (см. работы [28] и приведенные в этих обзорах соответствующие ссылки). Если ограничиться только низшим возбуждением (таххионом), то динамика D-браны будет описываться действием тахиона открытой струны. Имеется два общепринятых способа описания поведения тахиона: в рамках приближения Дирака–Борна–Инфельда или на основании ковариантной полевой теории струн с использованием метода обрезания по уровням [30]. Метод обрезания по уровням оправдал себя при проверке гипотезы Сена, поэтому его естественно использовать для анализа динамики D-бран, см. [31]–[33]. Действие тахиона, получающееся из полевой теории фермионной струны в приближении медленно изменяющегося вспомогательного поля [32], имеет вид

$$S_{\text{flat}} = \frac{1}{g_0^2} \int dx \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 - \frac{81}{256} \tilde{\varphi}^4 \right),$$

где φ есть безразмерное поле тахиона, координаты и константа g_0 также безразмерны. Тильда означает действие нелокального оператора $\exp(-\ln(\frac{4}{3\sqrt{3}}) \partial_\mu \partial^\mu)$ на поле φ , а индекс flat здесь и далее указывает на то, что мы имеем дело с плоской фоновой метрикой. Отметим, что в случае бозонной струны будет иметь место кубическое взаимодействие. В случае пространственно однородных конфигураций остается только зависимость от времени τ , и действие принимает вид

$$S_{\text{flat}}^{(\tau)} = \frac{1}{g_0^2} \int d\tau \left(+\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{4} \varphi^2 - \frac{81}{256} \left(e^{\ln(\frac{4}{3\sqrt{3}}) \frac{d^2}{d\tau^2}} \varphi \right)^4 \right).$$

Вводя обозначение $\phi = \frac{9}{4\sqrt{2}} \exp(\ln(\frac{4}{3\sqrt{3}}) \frac{d^2}{d\tau^2}) \varphi$ и переходя к переменной $t = \tau/2$, запишем уравнение движения, вытекающие из последнего выражения для действия, в виде

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + 2 \right) e^{\tilde{a} \frac{d^2}{dt^2}} \phi = 2\phi^3,$$

где $\tilde{a} = -\ln(\frac{4}{3\sqrt{3}})/4 > 0$. По существу это уравнение является интегральным, поскольку для полей определенного класса экспонента, содержащая бесконечное число производных, может быть заменена интегральным оператором [31], что приводит нас к уравнению

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + 2 \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{a}}} \int e^{\frac{(t-t')^2}{4\tilde{a}}} \phi(t') dt' = 2\phi^3(t). \quad (8)$$

Отметим, что если в уравнении (8) пренебречь первым слагаемым, то получится уравнение для p -адической струны (в нашем случае $p = 3$) [34]. В этом случае доказано существование решения, интерполирующего между двумя вакуумами [35]. Численно это решение было ранее построено в [36].

Уравнение (8) исследовалось в работах [32], [33] и было численно показано существование роллингового решения, т.е. решения, интерполирующего между двумя вакуумами потенциала

$$V_{\text{flat}}(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2. \quad (9)$$

Интересно, что поведение роллингового решения при больших временах может быть эффективно описано лагранжианом с духовым знаком кинетического члена и таким же, как и раньше, потенциалом. Соответствующее действие имеет вид

$$S_{\text{eff,flat}}^{(t)} = \int dt \left(-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2 \right). \quad (10)$$

Как известно, уравнение движения, вытекающее из действия (10),

$$\ddot{\phi} + 2\phi(1 - \phi^2) = 0, \quad (11)$$

имеет интерполирующее решение – кинк

$$\phi(t) = \text{th}(t). \quad (12)$$

2.3. Построение решения. Система уравнений (5) с произвольным полиномиальным потенциалом $V(\phi)$ неинтегрируема. Численный анализ уравнений Фридмана для потенциала (9) был проведен в статье [20]. Известно, см., например [19], [37], что всегда можно найти потенциал $V(\phi)$, если $\phi(t)$ или $H(t)$ заданы явно. Это легко сделать, предположив, что $H(t)$ является функцией от $\phi(t)$, называемой суперпотенциалом, т.е. $H(t) = W(\phi(t))$. Используя равенство $\dot{H} = W'_\phi \dot{\phi}$, из системы (5) получаем

$$\dot{\phi} = 2m_p^2 W'_\phi, \quad (13)$$

$$V = 2m_p^4 W'^2_\phi + 3m_p^2 W^2. \quad (14)$$

Найдем потенциал, который соответствует полю ϕ вида (12). Функция ϕ удовлетворяет условию

$$\dot{\phi} = 1 - \phi^2, \quad (15)$$

следовательно, из (13) вытекает, что

$$W = \frac{1}{2m_p^2} \left(\phi - \frac{1}{3} \phi^3 \right) + C,$$

где C – константа интегрирования. Зная $W(\phi)$, из (14) получаем потенциал $V(\phi)$. Различные значения C соответствуют различным значениям $V(\phi)$. Требование четности полинома $V(\phi)$ равносильно условию $C = 0$. В этом случае

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2 + \frac{1}{12m_p^2} \phi^2 (3 - \phi^2)^2. \quad (16)$$

Легко проверить, что если $\phi(t)$ – решение системы (13), (14) с некоторым потенциалом $V(\phi)$, то и $\phi(-t)$ будет являться решением с тем же потенциалом. Например, $\phi_2(t) = \text{th}(-t) = -\text{th}(t)$ – решение уравнений (13), (14) с потенциалом (16). Отметим, что решения $\phi = \pm \text{th}(t)$ соответствуют одной и той же функции $H(t)$, но двум разным функциям $W(\phi)$.

Мы построили потенциал V , используя явный вид решения системы (13), (14). Теперь рассмотрим более общую задачу и будем искать решение, исходя из следующих двух требований: $\phi(t)$ является гладкой функцией с ненулевыми асимптотиками $\phi(\pm\infty) = \pm A$, суперпотенциал $W(\phi)$ является полиномом по ϕ не выше третьей степени. В первом требовании без ограничения общности можно выбрать $A = 1$. Второе требование гарантирует, что потенциал $V(\phi)$ будет полиномом по ϕ не выше шестой степени. Сформулированные условия позволяют переписать уравнение (13) в следующем виде:

$$\dot{\phi} = \alpha + \beta\phi + \gamma\phi^2. \quad (17)$$

Из асимптотических условий следует, что

$$\gamma = -\alpha, \quad \beta = 0. \quad (18)$$

Решая уравнение (17) с учетом (18), получаем

$$\phi(t) = \text{th}(\alpha(t - t_0)).$$

Решение $\phi(t) = \text{cth}(\alpha(t - t_0))$ нами не рассматривается, поскольку оно не является гладкой функцией. Таким образом, с точностью до изменения масштаба и сдвига времени получаем решение (12). Очевидно, что потенциал, получаемый из уравнения (14), с точностью до общего множителя совпадает с выражением (16). Интересно, что в рамках приведенных условий на решение и суперпотенциал, потенциал в виде полинома шестой степени является минимально возможным для существования интерполирующего решения. Также можно показать, что любое решение уравнений движения в плоском пространстве с потенциалом четвертой степени будет решением уравнений Фридмана либо с полиномиальным потенциалом шестой степени, либо с неполиномиальным потенциалом [38].

Интересно отметить, что мы построили точное решение без какого-либо приближения. Одним из стандартных подходов к анализу космологических решений в присутствии скалярного поля ϕ является так называемое приближение медленного скатывания, которое технически означает пренебрежение членами $\ddot{\phi}$ в уравнении (6) и $\dot{\phi}^2$ в выражении для энергии (4). Однако, как это следует из (15), для нашего решения имеют место соотношения

$$\ddot{\phi} = -2\phi(1 - \phi^2), \quad \dot{\phi}^2 = (1 - \phi^2)^2.$$

Очевидно, что приближение медленного скатывания в этом случае выполняется, только когда ϕ близко к 1. Указанное приближение описывает наше решение при очень больших временах и неприменимо в начальные (близкие к нулю) моменты времени.

Параметр Хаббла для построенного решения имеет вид

$$H = \frac{1}{2m_p^2} \phi \left(1 - \frac{1}{3} \phi^2 \right) = \frac{1}{2m_p^2} \text{th}(t) \left(1 - \frac{1}{3} \text{th}^2(t) \right).$$

Этот параметр стремится к $1/(3m_p^2)$ при $t \rightarrow \infty$, при этом $\phi \rightarrow 1$. Зная $H(t)$, легко получить явное выражение для масштабного множителя:

$$a = a_0 \frac{e^{\phi^2/(12m_p^2)}}{(1 - \phi^2)^{1/(6m_p^2)}} = a_0 (\text{ch}(t))^{1/3m_p^2} \exp \left(\frac{\text{ch}^2(t) - 1}{12m_p^2 \text{ch}^2(t)} \right), \quad (19)$$

где a_0 – произвольная константа.

3. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

3.1. Ускорение. Функция $a(t)$ обладает следующим асимптотическим поведением при $t \rightarrow \infty$:

$$a(t) \sim e^{t/(3m_p^2)}. \quad (20)$$

Как следует из формул (19) и (20), Вселенная ускоренно расширяется. Параметр замедления отрицателен и равен

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{2}{\text{sh}^2(t)} - \frac{5 + \text{ch}(4t)}{2(2 + \text{ch}(2t))^2}.$$

Соответствующие графики представлены на рис. 1. Здесь и далее все графики, для которых параметр m_p не указан явно, построены при $m_p = 1$.

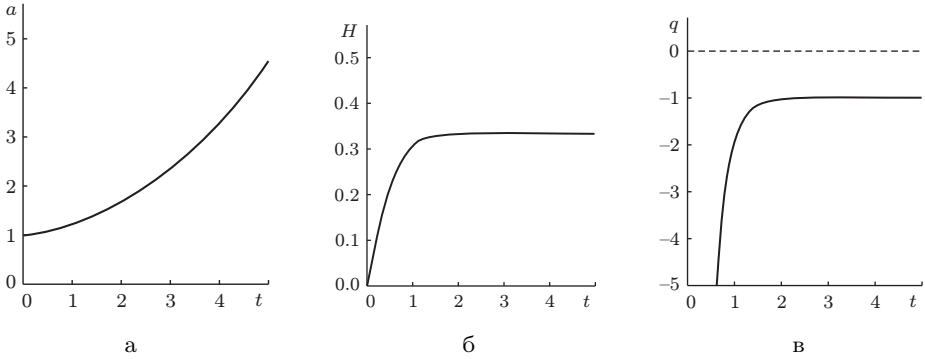


Рис. 1. Масштабный фактор $a(t)$ (а), $a_0 = 1$; параметр Хаббла $H(t)$ (б) и параметр замедления $q(t)$ (в).

На рис. 2 представлены “jerk”-параметр $j = \dot{\ddot{a}}a^2/\dot{a}^3$ и “kerrk”-параметр $k = -\ddot{\ddot{a}}a^3/\dot{a}^4$.

Подставляя полученное решение (12) и потенциал (16) в выражения для плотности давления и энергии, получаем

$$p(\phi) = -(1 - \phi^2)^2 - \frac{1}{12m_p^2} \phi^2 (3 - \phi^2)^2, \quad \varrho(\phi) = \frac{1}{12m_p^2} \phi^2 (3 - \phi^2)^2.$$

Следовательно, параметр состояния w имеет вид

$$w \equiv \frac{p}{\varrho} = -1 - 12m_p^2 \frac{(1 - \phi^2)^2}{\phi^2 (3 - \phi^2)^2} = -1 - 12m_p^2 \frac{\text{ch}^2(t)}{\text{sh}^2(t)(1 + 2 \text{ch}^2(t))^2}.$$

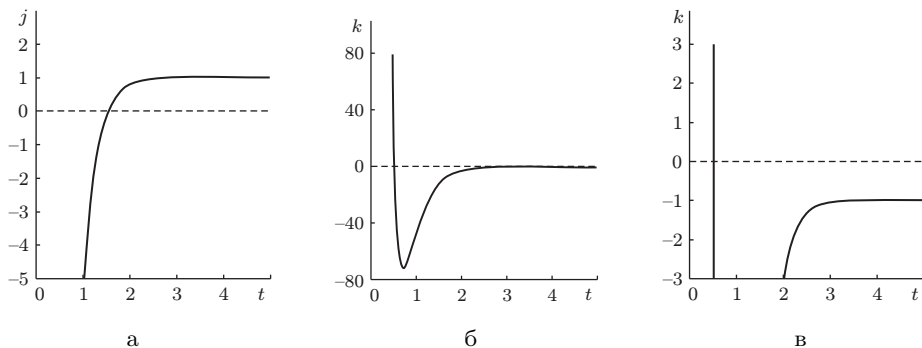


Рис. 2. “jerk”-Параметр (а), “kerk”-параметр (б) и его тонкая структура в окрестности $k = 0$ (в).

Отметим, что функция $w(\phi)$ меньше -1 при $|\phi| \neq 1$ и равна -1 при $|\phi| = 1$. Точка $\phi = 1$ соответствует бесконечно удаленному будущему. Графики давления $p(t)$ и плотностей энергии $\varrho(t)$, а также параметра состояния $w(t)$ представлены на рис. 3.

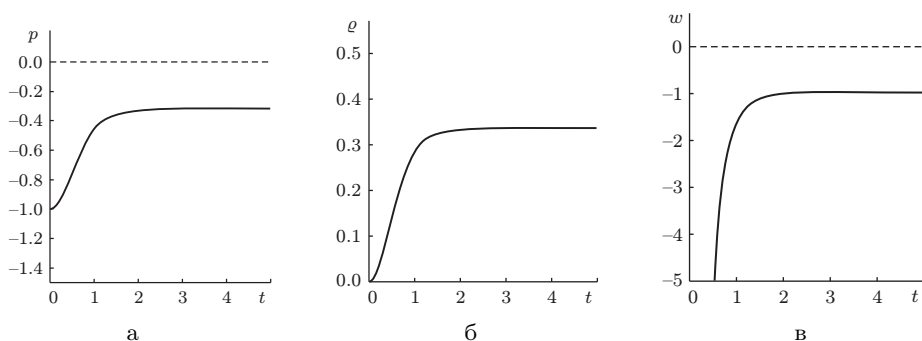


Рис. 3. Давление $p(t)$ (а), плотность энергии $\varrho(t)$ (б) и параметр состояния $w(t)$ (в).

Таким образом, в рассмотренной модели ускоренно расширяющейся Вселенной фантомное скалярное поле описывает темную энергию с параметром $w < -1$.

3.2. Эволюция точного решения уравнения (7). Решение (12) уравнения (7) есть функция, описывающая интерполяцию поля ϕ между точками -1 и 1 (но не наоборот). Это поле имеет конечную скорость $\dot{\phi}(t)$, удовлетворяющую нулевому начальному условию; потенциал задается формулой (16), а “трение” пропорционально $\text{sign}(H)\sqrt{-\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)}$ и зависит от координаты ϕ и скорости $\dot{\phi}$. Множитель $\text{sign}(H)$ делает “трение” отрицательным для отрицательных ϕ , т.е. частица ускоряется за счет него. В самом деле, выражение для коэффициента “трения” на решении равно $\phi(3 - \phi^2)/(2\sqrt{3}m_p)$ как для положительных, так и для отрицательных ϕ .

Обсудим эволюцию явно построенного решения. Эволюция фантомного поля эквивалентна эволюции нормального поля в перевернутом потенциале. Форма потенциала V существенно зависит от значения m_p , см. рис. 4, где перевернутый потенциал $-V$ нарисован при разных значениях m_p .

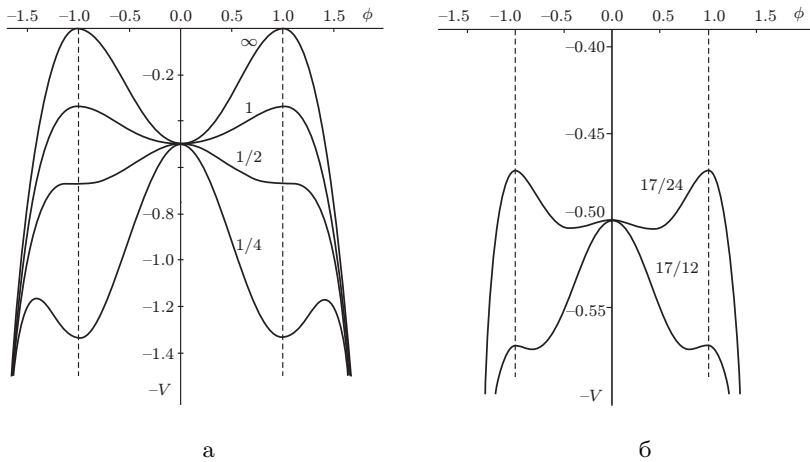


Рис. 4. Потенциал $-V$ при различных значениях m_p . На рис. 4а кривым (в порядке сверху вниз) соответствуют следующие значения m_p^2 : $m_p^2 = \infty$, $m_p^2 = 1$, $m_p^2 = 1/2$ и $m_p^2 = 1/4$, на рис. 4б – значения $m_p^2 = 17/24$ и $m_p^2 = 7/12$. Две вертикальные линии $\phi = \pm 1$ проведены для наглядности.

Для анализа экстремума потенциала приведем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} V(0) &= \frac{1}{2}, & V(\pm 1) &= \frac{1}{3m_p^2}, & V'_\phi &= \frac{1}{2m_p^2} \phi(1 - \phi^2)((3 - 4m_p^2) - \phi^2), \\ V''_\phi(0) &= \frac{3 - 4m_p^2}{2m_p^2}, & V''_\phi(\pm 1) &= \frac{2(2m_p^2 - 1)}{m_p^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Очевидно, что экстремумы в точках $\phi = \pm 1$ и $\phi = 0$ не зависят от m_p , в то время как два других экстремума есть функции m_p . Более того, от конкретного значения m_p зависит, является ли данный экстремум максимумом или минимумом. Возможные значения m_p можно разделить на следующие области, определяющие структуру экстремумов перевернутого потенциала $-V$.

- При $m_p = \infty$ потенциал $V(\phi)$ является хорошо известным хиггсовским потенциалом.
- При $3/4 \leq m_p^2 < \infty$ перевернутый потенциал $-V$, являясь потенциалом шестой степени, имеет качественное сходство с перевернутым хиггсовским потенциалом: обладает локальным минимумом в точке $\phi = 0$ и максимумами в точках $\phi = \pm 1$.
- При $1/2 < m_p^2 < 3/4$ в перевернутом потенциале точка $\phi = 0$ становится локальным максимумом, и возникают два дополнительных минимума на интервале $(-1, 1)$,

создавая две ямы и один холм на пути нашего поля ϕ в ходе интерполяции между точками -1 и 1 , см. рис. 46. Более детальный анализ этого случая показывает следующее.

1. При $2/3 \leq m_p^2 < 3/4$ точки $\phi = \pm 1$ находятся не ниже, чем $\phi = 0$ в перевернутом потенциале.

2. При $1/2 < m_p^2 < 2/3$ точки $\phi = \pm 1$ находятся ниже, чем $\phi = 0$ в перевернутом потенциале. Это означает, что наше поле ϕ стартует из точки $\phi = -1$ с нулевой начальной скоростью, катится вниз, в яму, и затем поднимается к точке, которая выше его начального положения. Это противоречит интуиции до тех пор, пока не принимается во внимание фактор $\text{sign}(H)$ в коэффициенте “трения”, наличие которого влечет, что “трение” отрицательно при отрицательных ϕ . Казалось бы, можно опровергнуть последнее утверждение, естественно обратив время и рассмотрев обратное движение. Это противоречие легко разрешимо, так как в случае обращенного времени функция H будет иметь обратный знак.

- При $m_p^2 = 1/2$ перевернутый потенциал имеет только один экстремум (максимум в точке $\phi = 0$), а точки $\phi = \pm 1$ являются точками перегиба.

- При $m_p^2 < 1/2$ два минимума, возникающие из последнего множителя в выражении для V' в (21), выходят за интервал $-1 < \phi < 1$ и становятся максимумами, а точки $\phi = \pm 1$ становятся минимумами перевернутого потенциала. Точка $\phi = 0$ остается максимумом. В этом случае поле ϕ , стартуя из $\phi = -1$, с самого начала поднимается на холм, а затем скатывается вниз и останавливается в точке $\phi = 1$. Такое поведение кажется невероятным, однако оказывается возможным благодаря отрицательному “трению” для отрицательных ϕ .

При изучении космологической эволюции фантомного поля мы используем только одну часть решения (12), начинающуюся в момент времени $t = t_{\text{in}} > 0$. В этот момент поле находится в точке $\phi_{\text{in}} = \phi(t_{\text{in}}) = \text{th}(t_{\text{in}})$, и ему необходимо сообщить начальную скорость $\dot{\phi}(t_{\text{in}}) = 1 - \phi_{\text{in}}^2 = \text{ch}^{-2}(t_{\text{in}})$. Для больших m_p^2 (при слабом взаимодействии с гравитацией) фантомное поле использует начальную кинетическую энергию, чтобы взобраться на холм при $\phi = 1$. Увеличивая взаимодействие с гравитацией, т.е. уменьшая m_p^2 , мы уменьшаем высоту холма в точке $\phi = 1$ перевернутого потенциала. При $m_p^2 = 2/3$ разность высот холмов в точках $\phi = 0$ и $\phi = 1$ становится равной нулю, и вся начальная кинетическая энергия уходит на работу против “трения”. Для $m_p^2 < 2/3$ “трение” становится сильнее, и частица имеет достаточно кинетической энергии, чтобы достичь холма при $\phi = 1$, который теперь ниже, чем холм в точке $\phi = 0$.

4. СТАБИЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ

4.1. Изменение начальных данных. Рассмотрим поведение решений системы уравнений (5) в окрестности точного решения

$$\phi_0(t) = \text{th}(t), \quad H_0(t) = \frac{1}{2m_p^2} \text{th}(t) \left(1 - \frac{1}{3} \text{th}^2(t) \right)$$

с целью изучения его стабильности. Подставляя

$$\phi(t) = \phi_0(t) + \varepsilon \phi_1(t), \quad H(t) = H_0(t) + \varepsilon H_1(t)$$

в систему (5), мы получаем в первом порядке по ε следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= \frac{1}{m_p^2} (1 - \operatorname{th}^2(t)) \dot{\phi}_1, \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{(18 - 24m_p^2 + 24(m_p^2 - 1) \operatorname{th}^2(t) + 6 \operatorname{th}^4(t)) \operatorname{th}(t)}{12m_p^2(1 - \operatorname{th}^2(t))} \phi_1 - \\ &\quad - \frac{(3 - \operatorname{th}^2(t)) \operatorname{th}(t)}{1 - \operatorname{th}^2(t)} H_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Система (22) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= 2m_p^2 C_1 (1 - \operatorname{th}^2(t)) + \\ &\quad + 2m_p^2 C_2 \frac{2J(t) + (\operatorname{ch}(2t) - 1)(\operatorname{ch}(t))^{2-1/m_p^2} \exp\left(\frac{1}{2m_p^2(\operatorname{ch}(2t)+1)}\right)}{\operatorname{ch}(2t) + 1}, \\ H_1(t) &= C_1(1 - \operatorname{th}^2(t))^2 - \frac{4m_p^2 C_2 J(t)}{(\operatorname{ch}(2t) + 1)^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$J(t) = \int_0^t \operatorname{sh}(\tau) (\operatorname{ch}(\tau))^{1-1/m_p^2} (2(2m_p^2 - 1) \operatorname{ch}^2(\tau) - 1) \exp\left\{\frac{1}{4m_p^2 \operatorname{ch}^2(\tau)}\right\} d\tau.$$

Если $C_2 = 0$, то $H_1(t)$ и $\phi_1(t)$ являются ограниченными функциями на всей временной оси $t \in (-\infty, \infty)$ и для всех значений m_p и могут быть представлены в следующем виде:

$$\phi(t) = \phi_0((1 + \varepsilon C_1)t) + O(\varepsilon^2), \quad H(t) = H_0((1 + \varepsilon C_1)t) + O(\varepsilon^2).$$

Рассмотрим случай $C_2 \neq 0$. Легко заметить, что если $m_p^2 > 1/2$, то $\phi_1(t)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, следовательно, наши решения нестабильны. При $m_p^2 = 1/2$ из (23) следует, что

$$\begin{aligned} H_1(t) &= (\operatorname{th}^2(t) - 1)^2 (C_1 - C_2 J_2), \\ \phi_1(t) &= -(\operatorname{th}^2(t) - 1)(C_1 - C_2 J_2) - \frac{1}{2} C_2 e^{-\operatorname{th}^2(t)/2}, \end{aligned}$$

где $J_2 = \int_0^t e^{-\operatorname{th}^2(\tau)/2} \operatorname{th}(\tau) d\tau$. Таким образом, функции H_1 и ϕ_1 являются ограниченными. При $m_p^2 < 1/2$ функции $\phi_1(t)$ и $H_1(t)$ также являются ограниченными. Таким образом, при $m_p^2 \leq 1/2$ наши решения стабильны, первые поправки – ограниченные функции. Напомним, что при $m_p^2 < 1/2$ точки $\phi = \pm 1$ являются минимумами, а при $m_p^2 = 1/2$ – точками перегиба потенциала.

Для изучения поведения решений с начальными условиями, существенно отличающимися от начальных условий точного решения, и для ответа на вопрос, являются

ли траектории точного решения притягивающими или отталкивающими, построим фазовые портреты при различных значениях m_p^2 .

Подчеркнем, что требование того, что $H(t)$ – действительная функция, влечет ограничение на максимальное значение $\dot{\phi}(t)^2$, а именно, для всех ϕ должно выполняться неравенство $\dot{\phi}^2 \leq 2V(\phi)$. Например, если $\phi(0) = 0$, то физический смысл имеют только решения с $\dot{\phi}(0) \leq 1$, иными словами, точное решение стартует из этой точки с максимально возможной скоростью.

Мы не можем найти точные решения системы (5) при условиях $\phi(0) = 0$ и $\dot{\phi} < 1$, поэтому приведем результаты численных вычислений.

На рис. 5 представлены фазовые портреты для $m_p^2 > 1/2$, т.е. в области неустойчивости нашего решения. Как видно из графиков, эволюция решений заканчивается в точках минимума перевернутого потенциала $-V$: в нуле при $m_p^2 = 100$ и $m_p^2 = 1$ и в точке $\phi = \sqrt{2/3} \approx 0.816$ при $m_p^2 = 7/12$ (см. рис. 4).

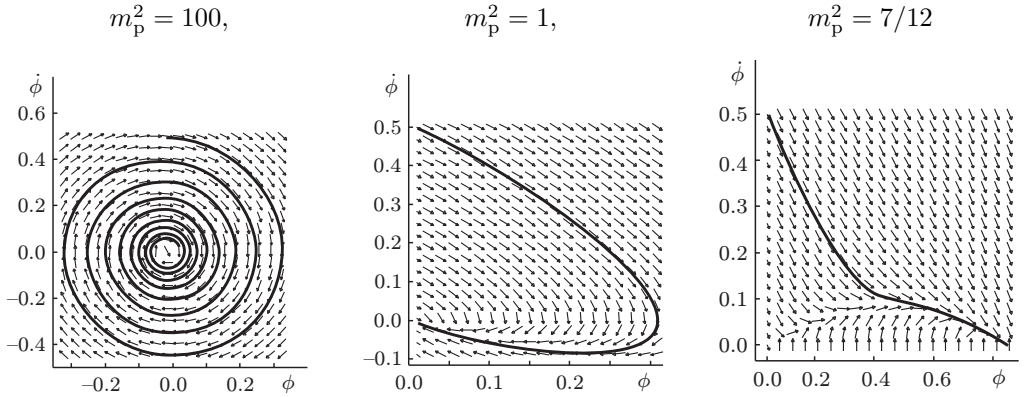


Рис. 5. Фазовые портреты для различных значений $m_p^2 > 1/2$. Жирные линии изображают решения с начальным условием $\dot{\phi}(0) = 1/2$.

Рассмотрим фазовые портреты при $m_p^2 \leq 1/2$, представленные на рис. 6. В случае $m_p^2 = 1/2$, когда $\phi = \pm 1$ являются точками перегиба, решение с начальной скоростью $\dot{\phi}(0) = 1/2$, как и точное решение, стремится к точке $\phi = 1$, однако совпадает с ним только в этой точке. При $m_p^2 = 1/4$ и $m_p^2 = 1/100$ численные решения близки к точному решению и при $\phi < 1$, причем чем меньше m_p^2 , тем меньше значение ϕ , при котором решения с начальными скоростями $\dot{\phi}(0) = 1/2$ и $\dot{\phi}(0) = 1$ обретают почти равные скорости. Таким образом, поведение первых поправок и фазовые портреты указывают на стабильность полученного точного решения при $m_p^2 \leq 1/2$.

4.2. Изменение формы потенциала. В этом пункте мы исследуем влияние изменения коэффициентов во втором члене потенциала (16) на поведение решений системы (5). Рассмотрим динамику системы (5) с потенциалом

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 + \frac{y}{12m_p^2}\phi^2(3 - \phi^2)^2.$$

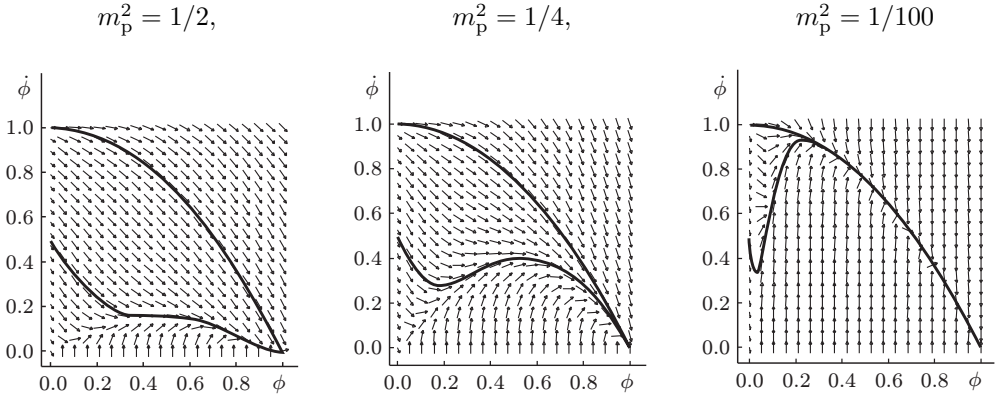


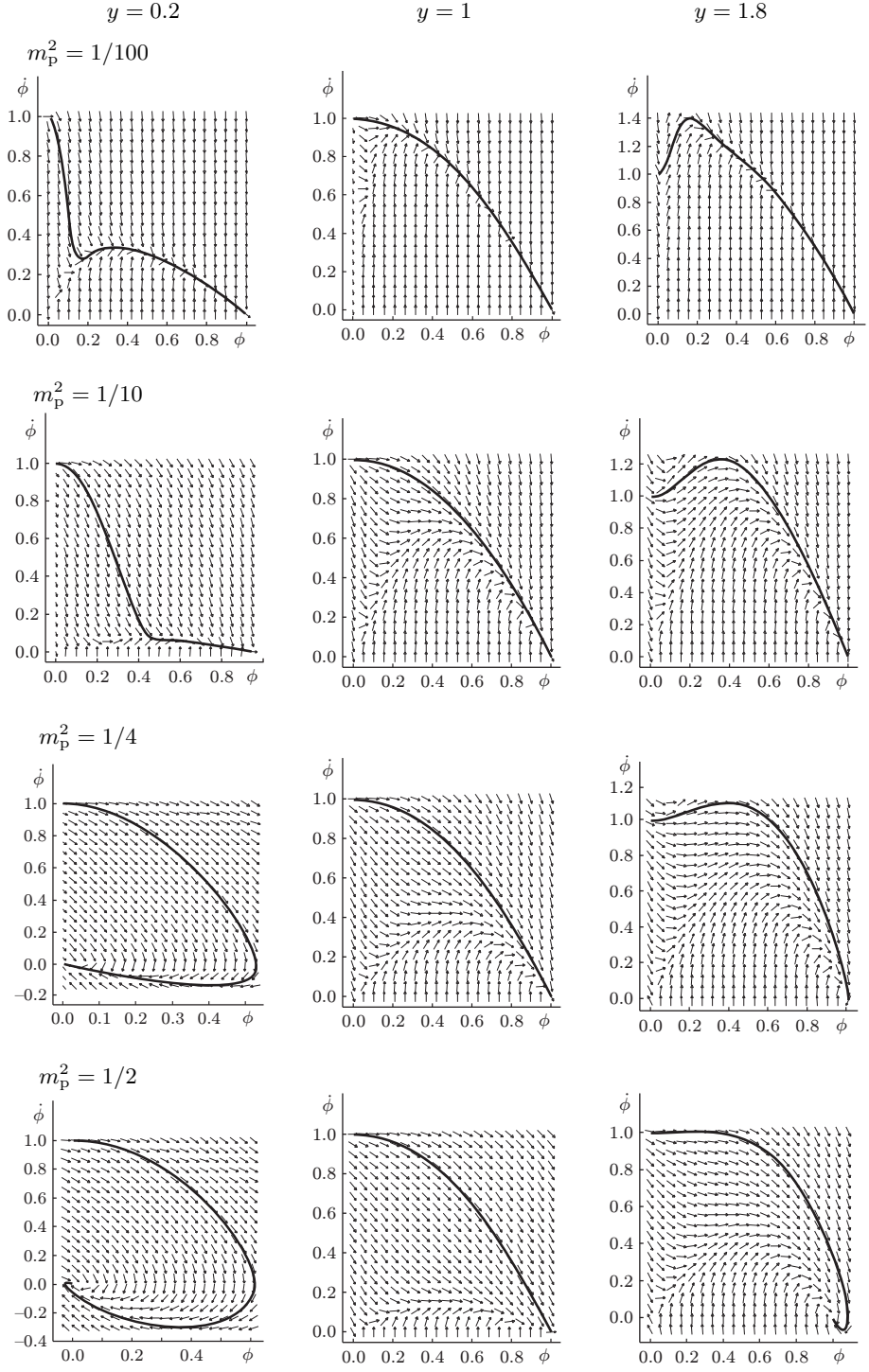
Рис. 6. Фазовые портреты при $m_p^2 \leq 1/2$. Жирные линии изображают решения с начальными условиями $\dot{\phi}(0) = 1/2$ и $\phi(0) = 1$.

Параметр y введен так, что точки $\phi = \pm 1$ остаются экстремумами потенциала. Отметим, что с точностью до сдвига на константу и умножения на общий множитель, это единственно возможная модификация четного потенциала (16), оставляющая $\phi = \pm 1$ экстремальными точками. Уравнение (7) отличается от уравнения движения кинка (11) наличием слагаемого типа “трения” и дополнительным членом в потенциале, пропорциональным $1/m_p^2$. Введение параметра y позволяет разделить эффекты “трения” и дополнительного слагаемого в потенциале и ответить на вопрос, какой из них обеспечивает стабильность решения.

Для анализа стабильности удобно построить фазовые портреты при различных параметрах m_p и y и расположить их в виде таблицы, как это сделано на рис. 7 и 8. Опираясь на приведенные фазовые портреты и анализ, выполненный в разделах 3 и 4, мы заключаем, что стабилизация решения возникает благодаря дополнительному слагаемому в потенциале. А именно, полученное решение является притягивающим при $m_p^2/y \leq 1/2$ вне зависимости от численного фактора в коэффициенте “трения”.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проанализировали точно решаемую модель ускоренно расширяющейся Вселенной с доминирующей темной энергией. Параметр состояния в рассмотренной модели всегда меньше -1 и стремится к -1 при $t \rightarrow \infty$. Такое поведение параметра состояния приводит к отсутствию в нашей модели сингулярности типа “большой разрыв”, которая имеет место в моделях с постоянным $w < -1$. Отметим, что данные свойства параметра состояния сохраняются и при включении в нашу модель взаимодействия с холодной темной материей [39]. Также показано, что решение стабильно относительно малых изменений начальных данных при $m_p^2 \leq 1/2$ и малых изменений параметров потенциала. Простейший способ получить точно решаемую

Рис. 7. Фазовые портреты при $m_p^2 \leq 1/2$ и различных значениях y .

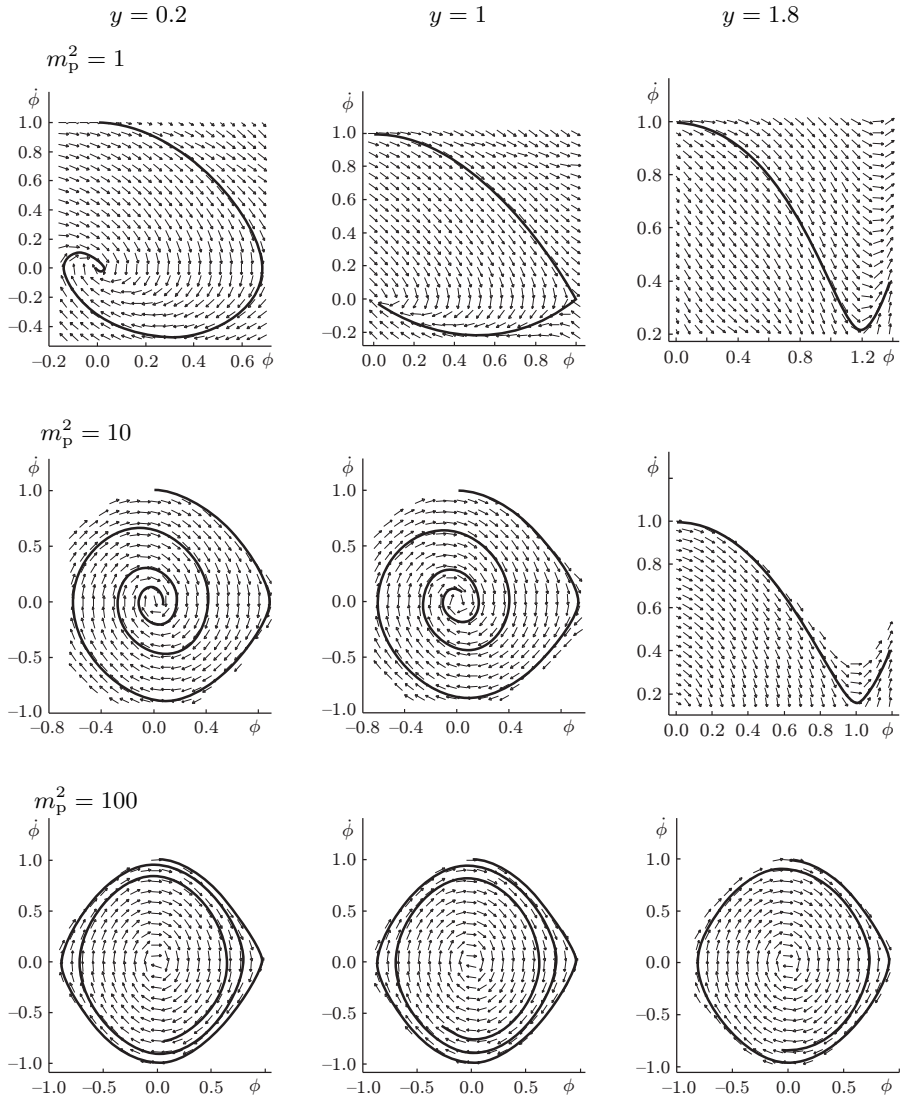


Рис. 8. Фазовые портреты при $m_p^2 > 1/2$ и различных значениях y .

модель, в которой w пересекает барьер космологической постоянной $w = -1$, состоит в введении дополнительного скалярного поля [40].

Благодарности. Авторы благодарны И. В. Воловичу и А. Е. Пухову за полезные обсуждения. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 05-01-00758), работа И. Я. Арефьевой и А. С. Кошелева частично поддержана INTAS (грант № 03-51-

6346) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2052.2003.1), работа С.Ю. Вернова частично финансировалась за счет Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1685.2003.2 (НШ-8122.2006.2)) и Программы “Университеты России” (грант № 02.02.503). Работа А. С. Кошелева также частично поддержана европейским грантом MRTN-СТ-2004-512194 и стипендией Марии Кюри MIF1-СТ-2005-021982. И. Я. Арефьева посвящает эту статью 80-летию Ю. В. Ножкиловой.

Список литературы

- [1] S. J. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber et al., *Astrophys. J.*, **517** (1999), 565; [astro-ph/9812133](#); A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis et al., *Astron. J.*, **116** (1998), 1009; [astro-ph/9805201](#).
- [2] A. G. Riess, L.-G. Strolger, J. Tonry et al., *Astrophys. J.*, **607** (2004), 665; [astro-ph/0402512](#).
- [3] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris et al., *Astrophys. J. Suppl.*, **148** (2003), 175; [astro-ph/0302209](#).
- [4] V. Sahni, A. A. Starobinsky, *Int. J. Mod. Phys. D*, **9**:4 (2000), 373; [astro-ph/9904398](#); V. Sahni, “Dark matter and dark energy”, *The Physics of the Early Universe*, Lect. Notes. Phys., **653**, ed. E. Papantonopoulos, Springer, Berlin, 2005, 141; [astro-ph/0403324](#); P. H. Frampton, *Dark energy – a pedagogic review*, [astro-ph/0409166](#); T. Padmanabhan, *Phys. Rep.*, **380** (2003), 235; [hep-th/0212290](#).
- [5] R. R. Caldwell, *Physics World*, **17**:5 (2004), 37.
- [6] R. Bean, S. Carroll, M. Trodden, *Insights into dark energy: interplay between theory and observation*, [astro-ph/0510059](#); T. Padmanabhan, *Darker side of the universe*, [astro-ph/0510492](#).
- [7] R. A. Knop, G. Aldering, R. Amanullah et al., *Astrophys. J.*, **598** (2003), 102; [astro-ph/0309368](#); M. Tegmark, M. Strauss, M. Blanton et al., *Phys. Rev. D*, **69** (2004), 103501; [astro-ph/0310723](#); S. Hannestad, E. Mörtsell, *Phys. Rev. D*, **66** (2002), 063508; [astro-ph/0205096](#); *JCAP*, **0409** (2004), 001; [astro-ph/0407259](#); J. L. Tonry, B. P. Schmidt, B. Barris et al., *Astrophys. J.*, **594** (2003), 1; [astro-ph/0305008](#).
- [8] A. Melchiorri, L. Mersini, C. J. Odman, M. Trodden, *Phys. Rev. D*, **68** (2003), 043509; [astro-ph/0211522](#).
- [9] C. Wetterich, *Nucl. Phys. B*, **302**:4 (1988), 668; P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Astrophys. J.*, **325** (1988), L17; R. R. Caldwell, R. Dave, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998), 1582; [astro-ph/9708069](#); L. Wang, R. R. Caldwell, J. P. Ostriker, P. J. Steinhardt, *Astrophys. J.*, **530** (2000), 17; [astro-ph/9901388](#); G. W. Gibbons, *Class. Q. Grav.*, **20** (2003), S321; [hep-th/0301117](#); E. J. Copeland, M. R. Garousi, M. Sami, S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D*, **71** (2005), 043003; [hep-th/0411192](#).
- [10] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000), 4438; [astro-ph/0004134](#); *Phys. Rev. D*, **63** (2001), 103510; [astro-ph/0006373](#).
- [11] A. Sen, *Int. J. Mod. Phys. A*, **20**:24 (2005), 5513; [hep-th/0410103](#).
- [12] Л. Б. Окунь, *Лептоны и кварки*, Наука, М., 1990.
- [13] R. R. Caldwell, *Phys. Lett. B*, **545** (2002), 23; [astro-ph/9908168](#).
- [14] B. McInnes, *JHEP*, **08** (2002), 029; [hep-th/0112066](#); J. M. Cline, S. Jeon, G. D. Moore, *Phys. Rev. D*, **70** (2004), 043543; [hep-ph/0311312](#); S. D. H. Hsu,

- A. Jenkins, M. B. Wise, *Phys. Lett. B*, **597** (2004), 270; [astro-ph/0406043](#);
 U. Alam, V. Sahni, A. A. Starobinsky, *JCAP*, **0406** (2004), 008; [astro-ph/0403687](#);
 T. Padmanabhan, T. R. Choudhury, *Phys. Rev. D*, **66** (2002), 081301; [hep-th/0205055](#);
 A. Melchiorri, L. Mersini, C. J. Odman, M. Trodden, *Phys. Rev. D*, **68** (2003), 043509; [astro-ph/0211522](#); B. Feng, X. Wang, X. Zhang, *Phys. Lett. B*, **607** (2005), 35; [astro-ph/0404224](#); B. Feng, M. Li, Y.-S. Piao, X. Zhang, *Phys. Lett. B*, **634** (2006), 101; [astro-ph/0407432](#); S. Nojiri, S. O. Odintsov, *Phys. Rev. D*, **70** (2004), 103522; [hep-th/0408170](#); W. Fang, H. Q. Lu, Z. G. Huang, K. F. Zhang, *Int. J. Mod. Phys.*, **15** (2006), 199; [hep-th/0409080](#); J.-G. Hao, X.-Z. Li, *Phys. Rev. D*, **67** (2003), 107303; [gr-qc/0302100](#); P. Singh, M. Sami, N. Dadhich, *Phys. Rev. D*, **68** (2003), 023522; [hep-th/0305110](#); R.-G. Cai, A. Wang, *JCAP*, **0503** (2005), 002; [hep-th/0411025](#); Z.-K. Guo, Y.-Z. Zhang, *Phys. Rev. D*, **71** (2005), 023501; [astro-ph/0411524](#); S. M. Carroll, A. De Felice, M. Trodden, *Phys. Rev. D*, **71** (2005), 023525; [astro-ph/0408081](#).
- [15] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, N. N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003), 071301; [astro-ph/0302506](#).
- [16] S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D*, **70** (2004), 123529; [astro-ph/0410309](#).
- [17] S. M. Carroll, M. Hoffman, M. Trodden, *Phys. Rev. D*, **68** (2003), 023509; [astro-ph/0301273](#).
- [18] V. K. Onemli, R. P. Woodard, *Class. Q. Grav.*, **19** (2002), 4607; [gr-qc/0204065](#); *Phys. Rev. D*, **70** (2004), 107301; [gr-qc/0406098](#).
- [19] T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D*, **66** (2002), 021301; [hep-th/0204150](#).
- [20] I. Ya. Aref'eva, "Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy", *AIP Conf. Proc.*, **286**, 2006, 301; [astro-ph/0410443](#).
- [21] M. Kaplinghat, S. Bridle, *Phys. Rev. D*, **71** (2005), 123003; [astro-ph/0312430](#).
- [22] C. Csáki, N. Kaloper, J. Terning, *Ann. Phys.*, **317** (2005), 410; [astro-ph/0409596](#); *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 161302; [hep-ph/0111311](#).
- [23] A. Vikman, *Phys. Rev. D*, **71** (2005), 023515; [astro-ph/0407107](#).
- [24] A. A. Andrianov, F. Cannata, A. Y. Kamenshchik, *Phys. Rev. D*, **72** (2005), 043531; [gr-qc/0505087](#).
- [25] A. A. Starobinsky, J. Yokoyama, *Phys. Rev. D*, **50** (1994), 6357; [astro-ph/9407016](#).
- [26] C. Deffayet, G. Dvali, G. Gabadadze, *Phys. Rev. D*, **65** (2002), 044023; [astro-ph/0105068](#); R. Kallosh, A. Linde, *Phys. Rev. D*, **67** (2003), 023510; [hep-th/0208157](#); S. Mukohyama, L. Randall, *Phys. Rev. Lett.*, **92** (2004), 211302; [hep-th/0306108](#); V. Sahni, Y. Shtanov, *JCAP*, **0311** (2003), 014; [astro-ph/0202346](#); P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, *Rep. Progr. Phys.*, **67** (2004), 2183; [hep-th/0404011](#); T. N. Tomaras, *Brane-world evolution with brane-bulk energy exchange*, [hep-th/0404142](#); E. J. Copeland, M. R. Garousi, M. Sami, S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D*, **71** (2005), 043003; [hep-th/0411192](#).
- [27] I. Ya. Aref'eva, D. M. Belov, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev, *Nucl. Phys. B*, **638** (2002), 3; [hep-th/0011117](#).
- [28] K. Ohmori, *A review on tachyon condensation in open string field theories*, [hep-th/0102085](#); I. Ya. Aref'eva, D. M. Belov, A. A. Giriyavets, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev, *Noncommutative field theories and (super)string field theories*, [hep-th/0111208](#); W. Taylor, *Lectures on D-branes, tachyon condensation, and string field theory*, [hep-th/0301094](#).
- [29] B. McInnes, *Nucl. Phys. B*, **718** (2005), 55; [hep-th/0502209](#).

- [30] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **268** (1986), 253; I. Ya. Aref'eva, P. B. Medvedev, A. P. Zubarev, *Nucl. Phys. B*, **341** (1990), 464; C. R. Preitschopf, C. B. Thorn, S. A. Yost, *Nucl. Phys. B*, **337** (1990), 363.
- [31] N. Moeller, B. Zwiebach, *JHEP*, **0210** (2002), 034; [hep-th/0207107](#).
- [32] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, L. V. Joukovskaya, *JHEP*, **0309** (2003), 012; [hep-th/0301137](#).
- [33] Ya. I. Volovich, *J. Phys. A*, **36** (2003), 8685; [math-ph/0301028](#).
- [34] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 19943.
- [35] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 355; [math-ph/0306018](#).
- [36] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **302** (1988), 365.
- [37] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, A. Karch, *Phys. Rev. D*, **62** (2000), 046008; [hep-th/9909134](#).
- [38] S. Yu. Vernov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **13** (2006), 50; [astro-ph/0502356](#).
- [39] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov, *Phys. Lett. B*, **628** (2005), 1; [astro-ph/0505605](#).
- [40] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov, *Phys. Rev. D*, **72** (2005), 064017; [astro-ph/0507067](#).

Поступила в редакцию 10.10.2005