На правах рукописи

Антипин Константин Владиславович

ТЕОРЕМА ХААГА В КОММУТАТИВНОМ И НЕКОММУТАТИВНОМ ВАРИАНТАХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

01.04.02 — «Теоретическая физика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре квантовой теории и физики высоких энергий физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	Вернов Юрий Сергеевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИЯИ РАН
Официальные оппоненты:	Жуковский Владимир Чеславович, доктор физико-математических наук, профессор физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
	Фаустов Рудольф Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Вычислительного центра имени А.А. Дородницына РАН
Ведущая организация:	Институт физики высоких энергий (г. Протвино)

Защита состоится 12 декабря 2013 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, дом 1, стр. 2, физический факультет, СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан « » ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.002.10
доктор физико-математических наук
профессор П. А. Поляков

Общая характеристика работы

Актуальность работы.

Теорема Хаага является важным результатом аксиоматического подхода в квантовой теории поля. В традиционной формулировке теории поля предполагается, что полевые операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям (ККС) в заданный момент времени. Аксиоматический подход позволил взглянуть на эту идею с новой точки зрения.

В случае системы с конечным числом степеней свободы n можно показать [1], что любые два представления коммутационных соотношений в форме Вейля связаны унитарным преобразованием, т. е. являются унитарно эквивалентными. В частности, всегда существует унитарный оператор $V(t_2, t_1)$, связывающий операторы координаты Q_n и импульса P_n (образующие элементы алгебры коммутационных соотношений) в разные моменты времени:

$$\begin{aligned} Q_n(t_2) &= V(t_2, t_1)Q_n(t_1)V^{-1}(t_2, t_1), \\ P_n(t_2) &= V(t_2, t_1)P_n(t_1)V^{-1}(t_2, t_1). \end{aligned} \tag{1}$$

Используемое в обычной формулировке теории возмущений представление взаимодействия является, по сути, попыткой перенести этот результат в теорию поля, т. е., в теорию систем с бесконечным числом степеней свободы. В этом случае предполагается, что канонические переменные (например, $\varphi(t, \vec{x})$) в каждый момент времени связаны унитарным преобразованием с каноническими переменными свободного поля $\varphi_{(0)}(t, \vec{x})$:

$$V(t)\varphi(t, \vec{x})V^{-1}(t) = \varphi_{(0)}(t, \vec{x}). \tag{2}$$

Зависимость от времени оператора V отражает наличие взаимодействия. Оператор рассеяния в представлении взаимодействия определяется так:

$$S = \lim_{t\to\infty} V(t)V(-t)^*. \tag{3}$$

Однако, как выясняется в рамках алгебраического подхода, существует множество унитарно неэквивалентных представлений ККС, и уже этот факт ставит под сомнение рассуждения, приводящие к (2). Результаты исследований Р. Хаага показывают [2], что, действительно, эти рассуждения неверны: за исключением случая, когда $\varphi(t, \vec{x})$ — свободное поле, не существует математически корректно определенного оператора V, удовлетворяющего (2).

Теорема Хаага в своей более поздней формулировке [3] содержит также утверждение о числе совпадающих функций Уайтмана (вакуумных средних от произведения полевых операторов) в двух теориях, связанных унитарным преобразованием. Функции Уайтмана играют важную роль: зная эти функции, можно в некотором смысле полностью восстановить теоретико-полевую модель. Кроме того, теорема указывает, что если в двух теориях не совпадают определенное число функций Уайтмана, то необходимо использовать неэквивалентные представления коммутационных соотношений.

В связи с важностью роли функций Уайтмана значительный интерес представляет обобщение утверждения теоремы Хаага на различные специальные варианты теории поля. Настоящая работа посвящена исследованию этой возможности для двух вариантов: некоммутативной квантовой теории поля (НКТП) и теории в пространстве с индефинитной метрикой.

Идея введения некоммутирующих пространственно-временных переменных берет свои истоки из принципов квантовой механики. Так, при квантовании координатам q_i и сопряженным к ним импульсам p_i ставятся в соответствие эрмитовы операторы $\hat{q}_i$ и $\hat{p}_i$, действующие в гильбертовом пространстве векторов состояний. После этого согласно принципу соответствия постулируются канонические коммутационные соотношения: $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$. Так получается некое квантовое фазовое пространство. Фон Нейман [4] был первым, кто строго описал такие пространства, при этом сам он называл область своих изысканий "геометрией без точек" ("pointless geometry") на основании того факта, что в квантовом фазовом пространстве понятие точки бессмысленно в силу принципа неопределенности Гейзенберга. Эти работы привели к разработке теории алгебр фон Неймана и положили начало развитию некоммутативной геометрии [5], занимающейся изучением реализации некоммутативных C^*-алгебр на топологических пространствах. С построением этой области математики и связано активное развитие некоммутативной квантовой теории поля, начало которой было заложено в работах Маркова [6, 7] и Снейдера [8, 9]. Подобно квантованию классического фазового пространства, некоммутативное пространство-время вводится заменой пространственно-временных координат на эрмитовы генераторы некоммутативной алгебры операторов в некотором гильбертовом пространстве. В наиболее простом варианте некоммутативной теории в пространстве Минковского соотношения между координатами имеют вид:

$$[\hat{x}^\mu,\, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{4}$$

где $\theta^{\mu\nu}$ - постоянная антисимметричная матрица.

Новый этап в развитии теорий этого рода связан с появлением аргументов в пользу их обобщения на сверхмалые расстояния и сверхвысокие энергии [10], а также с установлением связи НКТП с теорией струн [11]. Так, было показано, что некоммутативные теории возникают в низкоэнергетическом пределе теории струн во внешних полях специального вида. Некоммутативные теории представляют и самостоятельный интерес как один из вариантов модели с дополнительными пространственными измерениями [12–16].

Основы аксиоматического подхода к НКТП в формулировке Уайтмана были заложены в работах [17–22]. Для некоммутативной теории типа “space-space” (т. е., когда время коммутирует с пространственными переменными, $\theta^{0i} = 0, i = 1, 2, 3$) были получены аналоги постулатов спектральности и локальности, получены свойства аналитичности функций Уайтмана, доказана CPT-теорема для простейшего случая скалярного поля. В работе [21] рассматривалась и теорема Хаага, однако её доказательство было получено лишь для частного случая $SO(1,\ 1)$-инвариантной НКТП типа “space-space”. В связи с активным развитием теорий в пространствах многих измерений интересно было бы получить многомерное обобщение теоремы и ее следствий, в том числе и для случая “time-space” некоммутативности (время некоммутативно с пространственными переменными), поскольку и для этого класса в последнее время были получены варианты последовательной теории [23, 24].

Другим интересным вариантом является теория поля в пространстве с индефинитной метрикой. Хорошо известно, что индефинитную метрику и нефизические частицы необходимо вводить в калибровочных теориях, чтобы использовать ковариантную калибровку. Например, при квантовании электромагнитного поля рассматриваются операторы $a_n^{\pm}$ как операторы рождения и уничтожения четырех независимых сортов фотонов: двух поперечных, “продольных” и “временных”. Однако такое квантование оказывается несовместимым с предположением о вещественности поля или положительности метрики. Чтобы преодолеть эту трудность, Блейлер [25] и Гупта [26] использовали формальный прием, основанный на том, что соответствующие нулевой компоненте потенциала “временные” и “продольные” фотоны в действительности не существуют, а их возникновение в промежуточных рассуждениях связано с переходом от наблюдаемых величин (векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$) к ненаблюдаемому 4-потенциалу A. Чтобы сохранить самосопряженность оператора a_n, вводится индефинитная метрика в пространстве амплитуд состояния.

Представления канонических коммутационных соотношений в пространствах с индефинитной метрикой были изучены сравнительно недавно [27], [28]. При этом оказалось, что для описания реалистичных физических ситуаций необходимо работать в классе пространств Крейна [29]. В работе [27] показано, что, помимо фоковского представления, в пространстве Крейна возможно представление ККС с отрицательным спектром оператора числа частиц $N = a^{+}a$ (так называемый антифоковский случай). Именно этот случай соответствует теории с нефизическими частицами. В работе [28] был получен аналог вейлевского представления алгебры ККС для случая нефизических частиц. Обобщение теоремы

Хаага на случай нефизических частиц было бы следующим логичным шагом, позволяющим продвинуться в изучении свойств единственности представлений ККС в пространствах с индефинитной метрикой для систем с бесконечным числом степеней свободы.

Целью диссертационной работы является исследование возможности обобщения теоремы Хаага и ее следствий на два специальных класса теорий. В качестве первого класса рассматривается некоммутативная квантовая теория поля в двух своих вариантах перестановочных соотношений операторов временных и пространственных координат: “space-space” и “time-space”. В качестве второго класса рассматривается теория поля в пространстве с индефинитной метрикой. Для достижения указанной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Рассмотрение общего случая $SO(1,\, k)$-инвариантной теории с произвольным фиксированным числом некоммутативных координат. Определение числа совпадающих функций Уайтмана в двух таких теориях, связанных унитарным преобразованием.

2. Вывод следствий из теоремы Хаага для процессов рассеяния частиц в многомерном некоммутативном пространстве.

3. Доказательство теоремы Хаага в некоммутативной теории типа “time-space”.

4. Исследование антифоковской реализации канонических коммутационных соотношений в пространстве Крейна с помощью методов алгебраического подхода к КТП.

Научная новизна:

1. Впервые было получено обобщение теоремы Хаага для квантовой теории поля на некоммутативном четырехмерном пространстве-времени в вариантах как пространственной, так и пространственно-временной некоммутативности.

2. Рассмотрен общий случай SO(1, k)-инвариантной теории с произвольным фиксированным числом некоммутативных координат, в котором была установлена зависимость числа совпадающих функций Уайтмана в теориях, связанных унитарным преобразованием, от числа коммутативных размерностей пространства.

3. Получены следствия обобщенной теоремы Хаага для некоторых процессов рассеяния в многомерном коммутативном и некоммутативном простран-

стве. Установлено равенство амплитуд и полных сечений упругого рассеяния в теориях, связанных унитарным преобразованием. Доказано, что равенство некоторого числа функций Уайтмана в двух теориях приводит также к равенству амплитуд некоторых неупругих процессов.

4. С помощью методов алгебраического подхода впервые было показано, что обобщение теоремы Хаага может быть получено для теории, в которой регулярные представления канонических коммутационных соотношений реализованы в пространстве с индефинитной метрикой.

Научная и практическая значимость. Результаты диссертации важны как для фундаментальной теории, так и для экспериментальных исследований при высоких энергиях. Полученные в рамках некоммутативной теории результаты могут быть полезны в теоретическом исследовании процессов в пространствах с дополнительными (компактными и некомпактными) измерениями. В этом случае они позволяют получить связь различных характеристик процессов рассеяния частиц в многомерном пространстве в двух теориях, связанных унитарным преобразованием. Доказательство теоремы Хаага для нефизических частиц имеет большое теоретическое значение в исследовании представлений коммутационных соотношений в пространствах с индефинитной метрикой для систем с бесконечным числом степеней свободы.

На защиту выносятся следующие результаты и положения:

1. Обобщение теоремы Хаага в квантовой теории поля на некоммутативном четырехмерном пространстве-времени может быть получено как для пространственного (”space-space”), так и для пространственно-временного (”time-space”) вариантов некоммутативности.

2. В двух $SO(1,\, k)$-инвариантных некоммутативных теориях, связанных унитарным преобразованием, совпадают все функции Уайтмана вплоть до $(k+1)$-точечных.

3. Для НКТП типа ”space-space” существует аналог редукционных формул Лемана-Циммермана-Симанзика. При этом равенство первых $(k+1)$ функций Уайтмана в двух теориях приводит к равенству амплитуд соответствующих неупругих процессов рассеяния “$m \to n$”, если $n+m \leqslant k+1$. Кроме того, совпадают амплитуды и полные сечения упругого рассеяния “$2 \to 2$”.

4. Обобщение теоремы Хаага может быть получено для теории, в которой регулярные представления канонических коммутационных соотношений реализованы в пространстве с индефинитной метрикой.

Апробация работы. Результаты работы были представлены на следующих международных и всероссийских конференциях, научно-методических семинарах: 19th International workshop on high energy physics and quantum field theory “QFTHEP” (Москва, 2010 г.); 16th International seminar on high energy physics “QUARKS” (Коломна, 2010 г.); 15th International conference on symmetry methods in physics “SYMPHYS” (Дубна, 2011 г.); международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2012г., 2013 г.); семинар отдела теоретической физики высоких энергий НИИЯФ МГУ (Москва, 2013 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах и 4 работы в сборниках трудов конференций. Библиографические данные печатных работ приведены в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованных источников. Общий объем диссертации составляет 93 страницы. Список литературы содержит 52 наименования.

Содержание работы

Во **введении** дана общая характеристика работы, обоснована актуальность выбранного направления исследований, сформулированы цель и задачи работы.

В **первой главе** представлен обзор основных результатов аксиоматического подхода в квантовой теории поля, связанных с теоремой Хаага и полученных в рамках как стандартной, так и некоммутативной теории. В первой части обзора изложены основы уайтмановского подхода в стандартной теории поля. Приведены аналитические свойства функций Уайтмана, формулировки теоремы реконструкции и теоремы Хаага.

Во второй части обзора приведены основные положения некоммутативной теории поля, а также результаты, связанные с развитием уайтмановского подхода в ней. Описаны основные варианты НКТП, а также трудности, встречающиеся в таких теоретических построениях. Представлены постулаты формализма Уайтмана для НКТП. В заключительных параграфах первой главы представлены результаты, связанные с возможностью распространения теоремы Хаага и её следствий на $SO(1,\,1)$-инвариантную НКТП типа “space-space”.

Вторая глава посвящена обобщению теоремы Хаага на различные варианты НКТП.

В разделе 2.1 рассмотрен случай некоммутативности типа “space-space” в $SO(1,\,k)$-инвариантной теории. Такая теория инвариантна относительно собственных преобразований Лоренца в $(k+1)$ - мерном пространстве, затрагивающих одну временную переменную и k коммутативных пространственных переменных. При этом задано произвольное четное число m некоммутативных пространственных переменных.

Коммутационные соотношения между координатами для случая, когда $m = 2n$, имеют вид:

$$\left[\hat{x}^i,\,\hat{x}^j\right] = i\theta^{ij}, \quad i,\,j = 1,\,\ldots,\,2n, \tag{5}$$

где θ^{ij} — действительная матрица размерности $2n \times 2n$. Остальные $(k+1)$ переменных (включая время) коммутативны, т. е. коммутируют между собой и со всеми $\hat{x}^j$ из (5). Линейной заменой переменных соотношения (5) можно привести к более удобному виду

$$[\hat{x}^1,\,\hat{x}^2] = i\theta_1, \quad ,\,\ldots, \quad [\hat{x}^{2n-1},\,\hat{x}^{2n}] = i\theta_n. \tag{6}$$

Здесь $\theta_1,\,\ldots,\,\theta_n$ — положительные действительные параметры, а остальные коммутаторы равны нулю. Некоммутативные поля $\Phi(\hat{x}^1,\,\ldots,\,\hat{x}^{2n})$ в этом случае реализуются как операторы в гильбертовом пространстве квантовой механики частицы в n-мерном пространстве с координатами и импульсами

$$\hat{q}^1 = \frac{\hat{x}^1}{\sqrt{\theta_1}},\, \hat{p}^1 = \frac{\hat{x}^2}{\sqrt{\theta_1}},\,\ldots,\, \hat{q}^n = \frac{\hat{x}^{2n-1}}{\sqrt{\theta_n}},\, \hat{p}^n = \frac{\hat{x}^{2n}}{\sqrt{\theta_n}}. \tag{7}$$

Для доказательства первой части утверждения теоремы Хаага используются аналитические свойства функций Уайтмана, которые обобщаются на рассматриваемый вариант НКТП благодаря коммутативности временной переменной. Именно, в такой теории можно по-прежнему выделять точки Иоста, вещественные точки аналитичности функций Уайтмана. На основании того факта, что две функции Уайтмана, совпадающие в точках Йоста, совпадают тождественно, и проводится обобщение первой части теоремы. Доказывается, что в двух теориях, связанных унитарным преобразованием, совпадают все функции Уайтмана вплоть до $(k+1)$-точечных.

Доказательство второй части теоремы проводится на основе равенства двухточечных функций Уайтмана в двух теориях, а также на основе условия локальной коммутативности. В итоге приводится обобщенный вариант теоремы:

Теорема. *Пусть:*

- $\varphi_j(f,t)$, $j = 1,\,2$ — *два неприводимых набора операторов скалярного нейтрального поля в момент времени* t*, определенных в гильбертовых пространствах* $\mathcal{H}_j$*;*

- *обе теории являются некоммутативными с* $\theta^{0i} = 0$ *и* $SO(1,\,k)$-*инвариантными;*

- *вакуум* Ψ_{0j} *является единственным нормированным* $SO(1,\,k)$-*инвариантным состоянием в* $\mathcal{H}_j$*;*

- *выполнен постулат спектральности;*

- *две теории связаны унитарным преобразованием.*

Тогда:

1. *первые* $k+1$ *функции Уайтмана совпадают в обеих теориях;*

2. *если* $\varphi_1(x)$ — *свободное поле массы m, то* $\varphi_2(x)$ — *также свободное поле той же массы.*

В заключении раздела 2.1 выводятся следствия из теоремы для коммутативной $S\,O\,(1,\,k)$-инвариантной теории при $k\geqslant 3$. В этом случае рассматриваются процессы рассеяния в $(k+1)$-мерном коммутативном пространстве-времени, так что $S\,O\,(1,\,k)$-симметрия сохраняется, а некоммутативность отсутствует. На основании редукционных формул Лемана-Циммермана-Симанзика для процесса "$m\to n$"

$$
\begin{gathered}
< p_1',\ldots,\,p_n'|p_1,\ldots,\,p_m >_i \sim \\
\sim \int d\,x_1\ldots d\,x_{n+m}\,\exp\{i\,(-p_1\,x_1-\ldots-p_m\,x_m+p_1'\,x_{m+1}+\ldots+p_n'\,x_{n+m})\}\times \\
\times\prod_{j=1}^{n+m}(\Box_j-m^2)\,\langle\Psi_{0i}|T\,\varphi_i\,(x_1)\,\ldots\,\varphi_i\,(x_{n+m})|\Psi_{0i}\rangle, \\
i=1,\,2
\end{gathered}
\tag{8}
$$

и доказанного утверждения теоремы устанавливается равенство амплитуд неупругого процесса "$m\to n$" в двух теориях, если $n+m\leqslant k+1$.

В разделе 2.2 выводится аналог редукционных формул Лемана-Циммермана-Симанзика для некоммутативной теории. Применимость редукционных формул здесь неочевидна, поскольку вместо стоящего в функциях Грина хронологического произведения операторов нужно использовать упорядоченное $\star$-произведение вследствие деформации алгебры операторов:

$$
G_n(x_1,\,\ldots,\,x_n)=\langle\Psi_0|T(\varphi(x_1)\star\ldots\star\varphi(x_n))|\Psi_0\rangle, \tag{9}
$$

где $\star$-произведение операторов, взятых в различных точках, определяется следующим образом:

$$\varphi(x_1) \star \ldots \star \varphi(x_n) = \prod_{a<b} \exp\left(\frac{i}{2}\,\theta^{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial x_a^\mu}\,\frac{\partial}{\partial x_b^\nu}\right)\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n), \qquad a,b = 1,2,\ldots n, \tag{10}$$

а хронологическое $\star$-произведение операторов является естественным обобщением обычного T-произведения :

$$T(\varphi_1(x_1) \star \ldots \star \varphi_n(x_n)) = \varphi_{\sigma_1}(x_{\sigma_1}) \star \ldots \star \varphi_{\sigma_n}(x_{\sigma_n}), \tag{11}$$

где $\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_n$— перестановка индексов $1,\,\ldots,\,n$, такая, что

$$x^0_{\sigma_1} > x^0_{\sigma_2} > \ldots > x^0_{\sigma_n}.$$

Для $SO(1,\,d)$-инвариантной теории с некоторым числом дополнительных некоммутативных размерностей l окончательное выражение для редукционных формул получено в следующем виде:

$$\langle\Psi_0|a^-_{out}(\vec{p}_1)\,\ldots\,a^-_{out}(\vec{p}_k)\,a^+_{in}(\vec{p}_{k+1})\,\ldots\,a^+_{in}(\vec{p}_n)|\Psi_0\rangle = \left[\frac{1}{i(2\pi)^{(d+l)/2}}\right]^n \times$$
$$\times\,\exp\left[\frac{i}{2}\,\theta_{\mu\nu}\sum_{a<b} p^\mu_{a,\,nc}p^\nu_{b,\,nc}\right]\Bigg|_{-p_{out}}\,\prod_{j=1}^n\frac{p_j^2-m^2}{\sqrt{2\omega(\vec{p}_j)}}\,G_n(-p_1,\,\ldots,\,-p_k,\,p_n,\,\ldots,\,p_{k+1}), \tag{12}$$

где $G_n(p_1,\,\ldots,\,p_n)$ — фурье-образ функции Грина:

$$G_n(p_1,\,\ldots,\,p_n) = \int dx_1\ldots dx_n\,\exp\left[-i\sum_{j=1}^n p_jx_j\right]\,G(x_1,\,\ldots,\,x_n).$$

Отличие от стандартных формул выражается в наличии дополнительного фазового множителя

$$N(p_{1,\,nc},\ldots,\,p_{n,\,nc}) = \exp\left[\frac{i}{2}\,\theta_{\mu\nu}\sum_{a<b} p^\mu_{a,\,nc}p^\nu_{b,\,nc}\right]\Bigg|_{-p_{out}},$$

где ограничитель $|_{-p_{out}}$ указывает на то, что выходящие импульсы нужно взять со знаком “минус”.

Соотношение (12) позволяет распространить полученные в разделе 2.1 результаты для рассеяния частиц на некоммутативную теорию. Соответствующие результаты приводятся в **разделе 2.3**.

Раздел 2.4 посвящен распространению теоремы Хаага на случай теории с некоммутативностью типа "time-space". Такая теория является $SO(1, 1)$-инвариантной, однако теперь все переменные являются некоммутативными, и свойства аналитичности функций Уайтмана нарушаются. В частности, в такой теории нельзя выделить точки Йоста. Функции Уайтмана принадлежат пространству обобщенных функций $(\mathcal{S}^{\beta})'$, сопряженному к пространству Гельфанда-Шилова $\mathcal{S}^{\beta}$, $\beta < 1/2$.

При доказательстве второй части теоремы (о свободном поле) также возникает проблема: в отличие от коммутативной $SO(1, 1)$-теории здесь нельзя сформулировать условие локальной коммутативности, которое требуется для доказательства равенства нулю тока для поля, унитарно эквивалентного свободному полю.

Доказательство теоремы Хаага осуществляется следующим способом, обходящим перечисленные трудности: производится обрыв ряда разложения экспоненты в $\star$-произведении (10) до некоторого конечного числа членов k. Полученные таким образом функции Уайтмана W_k становятся обобщенными функциями умеренного роста. После этого формулируется локальная теория: с использованием теоремы реконструкции по функционалам W_k восстанавливаются гильбертово пространство $\mathcal{H}_k$, представление группы Пуанкаре и операторы поля $\varphi^{(k)}(x)$. Далее стандартным способом получаются все основные свойства аналитичности функций Уайтмана W_k. На основании $SO(1, 1)$-симметрии выводится утверждение о совпадении двухточечных функций Уайтмана. Кроме того, операторы поля $\varphi^{(k)}(f)$ рассматриваемой локальной теории будут удовлетворять условию локальной коммутативности. Далее повторяются рассуждения раздела 2.1. После этого осуществляется предельный переход при $k \to \infty$ от такой локальной теории к некоммутативной теории, при этом свойства слабой сходимости функционалов из пространств $\mathcal{S}'$ (обобщенных функции умеренного роста) и $(\mathcal{S}^{\beta})'$ используются для доказательства корректности такого перехода. Утверждение теоремы Хаага выполнено для полей $\varphi^{(k)}(x)$ и функций W_k, следовательно, оно выполнено и для их предельных значений — полей и функций Уайтмана $W_{\star}(x_1, \ldots, x_n)$ в НКТП.

Глава 3 посвящена рассмотрению возможности обобщения теоремы Хаага на теории с индефинитной метрикой.

В **разделах 3.1** и **3.2** приводятся необходимые сведения из алгебраического подхода к квантовой теории поля. В разделе 3.1 обсуждается обобщенная формулировка представления канонических коммутационных соотношений в форме Вейля, охватывающая физические системы с любым числом степеней свободы (конечным или бесконечным). В разделе 3.2 приводится алгебраическая формулировка теоремы Хаага.

В **разделе 3.3** рассматриваются некоторые свойства пространства Крейна, являющегося важным частным случаем пространства с индефинитной метрикой.

В **разделе 3.4** рассмотрены представления канонических коммутационных соотношений в пространстве Крейна. Основное внимание уделено классу антифоковских представлений, который характеризуется наличием отрицательного спектра у оператора числа частиц $N = a^+a$. Этот случай соответствует теории с нефизическими частицами.

В **разделе 3.5** проводится обобщение теоремы Хаага на выбранный класс теорий. Для этого сначала строится аналог представления Вейля для антифоковской реализации в пространстве Крейна в соответствии с [28]. Вводятся операторы b_k и b_k^+, связанные с операторами антифоковского представления a_k и a_k^+ посредством соотношений:

$$b_k = a_k^+, \quad b_k^+ = a_k. \tag{13}$$

Знак “$+$” обозначают сопряжение по отношению к индефинитному скалярному произведению. В терминах новых операторов коммутационные соотношения принимают вид:

$$[b_k, b_l^+] = -\delta_{kl}. \tag{14}$$

Известно [29], что в пространстве Крейна можно ввести положительно определенное произведение и операцию сопряжения “$*$” относительно него. Для антифоковского представления известна связь между двумя сопряжениями [28]:

$$b_l^* = -b_l^+. \tag{15}$$

При этом перестановочные соотношения перепишутся в виде:

$$[b_k, b_l^*] = \delta_{kl}\,\mathrm{I}. \tag{16}$$

Далее вводятся операторы “координаты” и “импульса”:

$$\tilde{P}_k = \frac{(b_k - b_k^*)}{\sqrt{2}i}, \quad \tilde{Q}_k = \frac{(b_k + b_k^*)}{\sqrt{2}}, \tag{17}$$

которые являются симметричными операторами, определенными на некоторых плотных областях в “эффективном” гильбертовом пространстве. Следовательно, операторы

$$U_k(\alpha) = \exp\{i\alpha\tilde{P}_k\}, \quad V_l(\beta) = \exp\{i\beta\tilde{Q}_l\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

образуют представление Вейля. На основании построенного представления Вейля, с использованием алгебраической формулировки раздела 3.2 делается утверждение теоремы Хаага для случая нефизических частиц.

Заключение

В заключение сформулируем основные результаты диссертационной работы.

1. Получено обобщение теоремы Хаага для квантовой теории поля на некоммутативном четырехмерном пространстве-времени в вариантах как пространственной (”space-space”), так и пространственно-временной (”time-space”) некоммутативности.

2. Рассмотрен общий случай $SO(1,\, k)$-инвариантной теории с произвольным фиксированным числом некоммутативных координат, в котором было установлено, что в двух теориях, связанных унитарным преобразованием, совпадают все функции Уайтмана вплоть до $(k+1)$-точечных.

3. Получены следствия обобщенной теоремы Хаага для некоторых процессов рассеяния в многомерном коммутативном и некоммутативном пространстве. С помощью некоммутативного аналога редукционных формул Лемана-Циммермана-Симанзика установлено равенство амплитуд и полных сечений упругого рассеяния в теориях, связанных унитарным преобразованием. Доказано, что равенство первых $(k+1)$ функций Уайтмана в двух теориях приводит также к равенству амплитуд соответствующих неупругих процессов рассеяния частиц “$m \to n$”, если $n + m \leqslant k + 1$.

4. Рассмотрены теории с индефинитной метрикой. С помощью методов алгебраического подхода показано, что обобщение теоремы Хаага может быть получено для теории, в которой регулярные представления канонических коммутационных соотношений реализованы в пространстве с индефинитным скалярным произведением.

Список публикаций автора по теме диссертации

Работы в научных журналах, входящих в перечень ВАК РФ рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций

[A1] K. V. Antipin, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov. Haag's theorem in the theories with non-physical particles // International Journal of Modern Physics A. 2013. Vol. 28. P. 1350076-1350086.

[A2] K. V. Antipin, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov. Haag's theorem in noncommutative quantum field theory // Physics of Atomic Nuclei. 2013. Vol. 76. P. 965-968.

[A3] Антипин К. В., Вернов Ю. С., Мнацаканова М. Н. Доказательство обобщенной теоремы Хаага в пространстве произвольной размерности // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2011. № 4. С. 27-32.

Работы в сборниках трудов конференций

[A4] K. V. Antipin, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov. Haag's Theorem in SO (1, k) invariant quantum field theory // Proceedings of the The XIXth International Workshop "High Energy Physics and Quantum Field Theory QFTHEP-2010 (Golitsyno, Moscow, September 2010). PoS - Proceedings of Science, SISSA, Trieste, Italy, 2010, p.080.

[A5] K. V. Antipin, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov. Extension of Generalized Haag's Theorem on Spaces with Arbitrary Dimensions // Proceedings of the 16-th International Seminar on High Energy Physics "QUARKS-2010"(6-12 июня, 2010, Коломна, Россия)/ Под ред. В.А. Матвеева, А.Г. Панина, В.А. Рубакова, Издат. Отдел ИЯИ, Москва, Россия, 2010, с.391-401.

[A6] K. V. Antipin, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov. Consequences of the Generalized Haag's Theorem // Proceedings of the 16-th International Seminar on High Energy Physics "QUARKS-2010" (6-12 июня, 2010, Коломна, Россия) Под ред. В.А. Матвеева, А.Г. Панина, В.А. Рубакова, Издат. Отдел ИЯИ, Москва, Россия, 2010, с.133-136.

[A7] Антипин К. В., Вернов Ю. С., Мнацаканова М. Н. Теорема Хаага в теориях с нефизическими частицами // Материалы докладов XX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2013 г.). 2013. С. 336.

Цитируемая литература

1. Neumann J. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren // Math. Ann. 1931. Vol. 104. P. 570–578.

2. Haag R. On Quantum Field Theory // Dan. Mat. Fys. Medd. 1955. Vol. 29. P. 12–49.

3. Hall D., Wightman A. A Theorem on Invariant Analytic Functions with Applications to Relativistic Quantum Field Theory // Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 1957. Vol. 31. P. 5–45.

4. Neumann J. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton: Princeton University Press, 1955.

5. Connes A. Noncommutative Geometry. New York: Acad. Press, 1994.

6. Марков М. А. О четырехмерно протяженном электроне в релятивистской квантовой области // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 1311–1328.

7. Марков М. А. О нелокализуемых полях // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 11–15.

8. Snyder H. S. Quantized Space-Time // Phys. Rev. 1947. Vol. 71. P. 38–41.

9. Snyder H. S. The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 68–71.

10. Doplicher S., Fredenhagen K., Roberts J. E. Spacetime Quantization Induced by Classical Gravity // Phys. Lett. B. 1994. Vol. 331. P. 39–44.

11. Seiberg N., Witten E. String Theory and Noncommutative Geometry // J. High-Energy Phys. 1999. Vol. 9909. P. 32–123.

12. Connes A. Gravity Coupled with Matter and the Foundation of Noncommutative Geometry // Commun. Math. Phys. 1996. Vol. 182. P. 155–176.

13. Douglas M. R., Hull C. D-branes and the Noncommutative Torus // Commun. Math. Phys. 1998. Vol. 02. P. 008–011.

14. Kubyshin Y. A., Mourao J. M., Volobujev I. P. Multidimensional Einstein-Yang-Mills Theories: Dimensional Reduction, Spontaneous Compactification, and all that // Nucl. Phys. B. 1989. Vol. 322. P. 531–554.

15. Volobujev I. P., Smolyakov M. N. Single-Brane World with Stabilized Extra Dimension // Int. J. Mod. Phys. A. 2008. Vol. 23. P. 761–775.

16. Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E. Extra Space-Time Dimensions: Towards a Solution to the Cosmological Constant Problem // Phys. Let. B. 1983. Vol. 125. P. 139–143.

17. Вернов Ю. С., Мнацаканова М. Н. Уайтмановский аксиоматический подход в некоммутативной квантовой теории поля // ТМФ. 2005. Т. 142. С. 403–416.

18. Test Functions Space in Noncommutative Quantum Field Theory / M. Chaichian, M. Mnatsakanova, A. Tureanu et al. // J. High-Energy Phys. 2008. Vol. 0809. P. 125–134.

19. Towards an Axiomatic Formulation of Noncommutative Quantum Field Theory / M. Chaichian, M. Mnatsakanova, K. Nishijima et al. // J. Math. Phys. 2011. Vol. 52. P. 32303–32318.

20. Álvarez-Gaumé L., Vázquez-Mozo M. A. General Properties of Non-Commutative Field Theories // Nucl. Phys. B. 2003. Vol. 668. P. 293–321.

21. Classical Theorems in Noncommutative Quantum Field Theory / M. Chaichian, M. Mnatsakanova, K. Nishijima et al. Preprint in arXiv: 0612112 [hep-ph].

22. Chaichian M., Nishijima K., Tureanu A. Spin-Statistics and CPT Theorems in Noncommutative Field Theory // Phys. Lett. B. 2003. Vol. 568. P. 146–152.

23. Aharony O., Gomis J., Mehen T. On Theories with Light-Like Noncommutativity // J. High-Energy Phys. 2000. Vol. 0009. P. 23–37.

24. OM Theory in Diverse Dimensions / R. Gopakumar, S. Minwalla, N. Seiberg et al. // JHEP. 2000. Vol. 08. P. 8–34.

25. Bleuler K. Eine neue Methode zur Behandlung der Longitudinalen und Skalaren Photonen // Heh. Phys. Acta. 1950. Vol. 23. P. 567–586.

26. Gupta S. Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics // Proc. Roy. Soc. A. 1950. Vol. 63. P. 681–691.

27. Irreducible Representations of the Heisenberg Algebra in Krein Spaces / M. Mnatsakanova, G. Morchio, F. Strocchi et al. // J. Math. Phys. 1998. Vol. 39. P. 2969–2990.

28. Вернов Ю. С., Мнацаканова М. Н., Салынский С. Г. Аналог вейлевского представления алгебры канонических коммутационных соотношений для случая нефизических частиц // Письма в ЭЧАЯ. 2012. Т. 9. С. 353–358.

29. Krein M. G. Introduction to the Geometry of Indefinite J-Spaces and to the Theory of Operators in those Spaces // Am. Math. Soc. Transl. 1970. Vol. 93. P. 103–176.