

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

5

МОСКВА · 1980

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

А. Е. БУКАТОВ

(Севастополь)

В линейной постановке изучается влияние продольно сжатой упругой изотропной пластинки, плавающей на поверхности потока однородной жидкости конечной глубины, на неустановившееся волновое движение. Волны вызываются периодическими по времени нормальными напряжениями, прикладываемыми к ограниченной области поверхности пластинки, начиная с нулевого момента времени.

Изучению влияния упругой пластинки на характер волнового движения жидкости при отсутствии сжимающих усилий посвящены работы [1-6]. В [1, 2] изучались нестационарные волны в идеальной однородной жидкости. Решена задача о воздействии начального возмущения и изучен процесс развития волн, генерируемых движущейся сосредоточенной нагрузкой. Возбуждение изгибно-гравитационных волн сосредоточенным периодическим усилием для бесконечно глубокой жидкости изучено в [3]. В случае однородной жидкости конечной глубины развитие волн от периодических нормальных напряжений рассмотрено в [4]. В непрерывно стратифицированной жидкости установившиеся волны изучались в [4, 5], а процесс развития волнового возмущения потока однородной жидкости рассмотрен в [6], где в качестве генератора волн рассмотрены периодические нормальные напряжения, прикладываемые к поверхности пластинки.

1. Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, текущей с постоянной скоростью u в положительном направлении оси x , плавает тонкая упругая пластинка. Начиная с момента времени $t=0$ к поверхности пластинки прикладываются нормальные напряжения вида

$$(1.1) \quad p = af(x) \exp(i\sigma t)$$

где $f(x)$ представима интегралом Фурье, $a = \text{const}$.

Исследуем влияние продольных усилий сжатия на неустановившиеся волны, предполагая, что до начала действия напряжений (1.1) пластинка горизонтальна и поток жидкости невозмущен. Считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и возвышение поверхности пластинки — жидкость ξ — малыми, получим с учетом продольного сжимающего усилия [7-9] для определения потенциала скорости φ уравнение Лапласа со следующими граничными и начальными условиями:

$$(1.2) \quad \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad -H < z < 0, \quad |x| < \infty$$

$$(1.3) \quad D_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + Q_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \kappa_1 F \xi + \xi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = - \frac{p}{\rho g} \quad (z=0)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z=-H)$$

$$(1.4) \quad \varphi(x, z, 0) = \xi(x, 0) = 0.$$

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \kappa_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)},$$

$$F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Здесь ρ , H — плотность и глубина жидкости, E , h , ρ_1 , μ — модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, Q — продольное сжимающее усилие, приходящееся на единицу ширины пластинки.

Кроме того, ξ и φ при $z=0$ связаны кинематическим условием $\xi_t = \varphi_z - u \xi_x$.

Применяя для решения задачи комплексное преобразование Фурье по переменной x и удовлетворяя граничным условиям (1.3), получаем уравнение

$$(1.5) \quad \xi_{tt}^* + 2iur \xi_t^* + (\tau^2 - u^2 r^2) \xi^* = - \frac{a}{\rho g} \theta(r) f^*(r) \exp(i\sigma t)$$

$$\tau = [\theta(r) l(r)]^{1/2}, \quad \theta(r) = \frac{rg \operatorname{th} rH}{1 + \kappa_1 rg \operatorname{th} rH}, \quad l(r) = D_1 r^4 - Q_1 r^2 + 1$$

где ξ^* и f^* — преобразование Фурье функций ξ и f .

Из (1.5) после удовлетворения начальных условий (1.4) и применения теоремы обращения, находим

$$(1.6) \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{a}{\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(r) \psi(r, t) f^*(r) e^{irx} dx,$$

$$\psi(r, t) = \left(\frac{2}{\Delta} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-i t \Delta_1} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-i t \Delta_2} \right) e^{i \sigma t}$$

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2, \quad \Delta_1 = \sigma + ur - \tau, \quad \Delta_2 = \sigma + ur + \tau$$

Вычисление интеграла (1.6) проведем при условии $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, необходимым для устойчивости пластинки [7].

Подынтегральная функция в (1.6) не имеет особенностей на пути интегрирования, так как особенности отдельных слагаемых, представляющих собою вещественные корни уравнений $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$, взаимно погашаются. Следовательно, в силу теоремы Коши, исходный путь интегрирования можно деформировать в путь, обходящий эти особенности.

Возьмем за путь интегрирования [10] контур L_3 , идущий вдоль действительной оси, обходя корни уравнения $\Delta_1 = 0$ по малым полуокружностям, на которых $\operatorname{Re}(i\Delta_1) > 0$, а корни уравнения $\Delta_2 = 0$ — по полуокружностям, где $\operatorname{Re}(i\Delta_2) > 0$ и перепишем (1.6) в виде

$$(1.7) \quad \xi = - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{a}{\rho g} (\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)$$

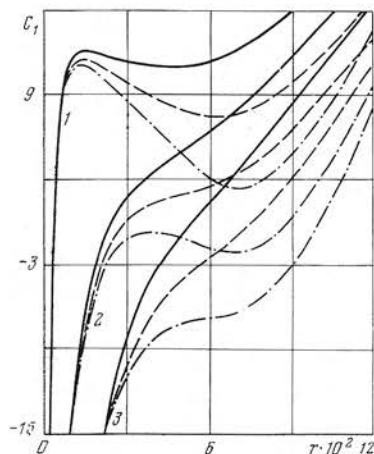
$$\eta_k = \int_{L_k} \frac{1}{\Delta_k} \left[\frac{\theta(r)}{l(r)} \right]^{1/2} f^*(r) \exp(i|x|M_k) dr, \quad k=1, 2$$

$$\eta_3 = 2 \int_{L_3} \frac{\theta(r)}{\Delta(r)} f^*(r) \exp(irx) dr \exp(i\sigma t)$$

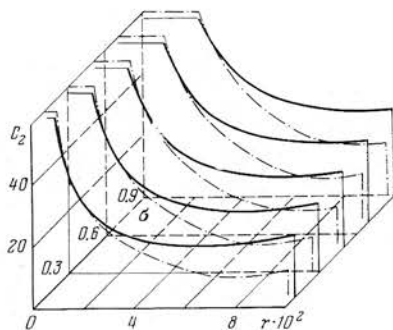
$$M_k = r \operatorname{sign} x - [ur + (-1)^k \tau(r)] v, \quad v = \frac{t}{|x|}$$

Здесь путь L_1 обходит только точки, где $\Delta_1=0$, а путь L_2 — только точки, где $\Delta_2=0$. Такой обход полюсов обеспечивает стремление к нулю η_1 и η_2 при $t \rightarrow \infty$ для любого фиксированного x .

Число полюсов подынтегральных функций, а следовательно, и характер волнового движения определяется частотой колебаний, величиной



Фиг. 1



Фиг. 2

сжимающего усилия и скоростью потока. Это иллюстрируется фиг. 1, 2, где изображены функции

$$(1.8) \quad C_1(r) = [\tau(r) - \sigma] r^{-1}, \quad C_2(r) = [\tau(r) + \sigma] r^{-1}$$

при значениях

$$(1.9) \quad E = 3 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2, \quad \rho_1 g = 870 \text{ кг/м}^3, \quad \mu = 0.34, \quad H = 10^3 \text{ м}, \quad h = 1 \text{ м}$$

отвечающих ледяной пластине [7, 11].

Функции $C_1(r)$ и $C_2(r)$, характеризующие дисперсионные кривые $u = C_1(r)$ (фиг. 1) уравнения $\Delta_1=0$ и $u = -C_2(r)$ (фиг. 2) уравнения $\Delta_2=0$, даны только в области $r > 0$, так как при $r < 0$ картина симметричная относительно начала координат. Сплошным, штриховым и штрихпунктирным кривым на фиг. 1, 2 отвечают Q_1 , равные 0, $\sqrt{D_1}$, $1.8\sqrt{D_1}$, которым при значениях (1.9) соответствуют величины сжимающего усилия 0, $1.68 \cdot 10^6$, $3.03 \cdot 10^6$ н/м. Кривые с номерами 1—3 на фиг. 1 отвечают частотам σ (сек $^{-1}$), равным 0.2, 0.5, 0.8.

2. Пусть $Q_1 < Q_0 = \tau_0(r_0)$, где r_0 — единственный положительный корень уравнения $\tau_0'(r) = 0$, а

$$\tau_0 = \frac{(1 + D_1 r^4) \tau_1(r) + 4 D_1 r^4 \tau_2(r)}{r^2 [\tau_1(r) + 2 \tau_2(r)]}$$

$$\tau_1(r) = \operatorname{th} rH + rH \operatorname{ch}^{-2} rH, \quad \tau_2(r) = (1 + \kappa_1 r g \operatorname{th} rH) \operatorname{th} rH$$

штрих означает производную по r .

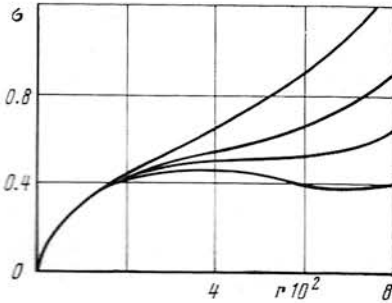
При этом условии (сплошные и штриховые кривые на фиг. 1, 2) уравнение

$$(2.1) \quad \sigma + ur - \tau(r) = 0$$

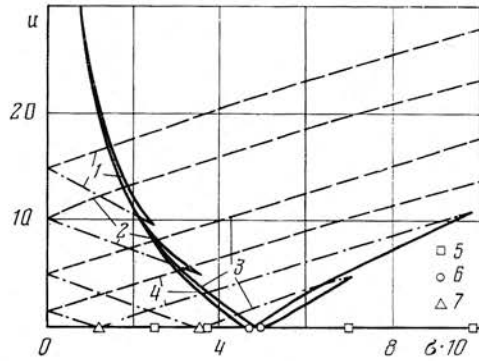
для $\sigma > \sigma_0$ (кривые 2, 3 на фиг. 1) имеет при любых скоростях потока только один отрицательный и только один положительный корни. Обозначим их при $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$ через $r = -\alpha_1$, $r = \alpha_6$ и $r = -\alpha_1$, $r = \alpha_4$, если $u < u_0^*$ и $u > u_0^*$ соответственно, а при $\sigma > \sigma_0^*$ через $r = \alpha_4$, $r = -\alpha_1$. Здесь

$$(2.2) \quad \sigma_0 = \sigma_0^* - u_0 r_1, \quad \sigma_0^* = \tau(r_1), \quad u_0 = \tau'(r_1), \quad u_0^* = |\sigma^* - \sigma| r_1^{-1}$$

r_1 — положительный корень уравнения $\tau''(r) = 0$. Причем $\alpha_6 < r_1 < \alpha_4$, а для α_1 справедлива оценка $\alpha_1 < r_1$, если $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$. Если же $\sigma > \sigma_0^*$, то $\alpha_1 < r_1$ при $u > u_0^*$ и $\alpha_1 > r_1$ для $u < u_0^*$. Кроме того, $\alpha_6 > \alpha_1$ на частотах $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Если $\sigma < \sigma_0$ (линии 1 на фиг. 1), то корнями уравнения (2.1) будут α_4 , $-\alpha_1$ для $u > u_1$; α_4 , α_5 , α_6 , $-\alpha_1$ для $u_2 < u < u_1$ и α_6 , $-\alpha_1$ для $u < u_2$. При этом

$$(2.3) \quad u_1 = |C_1(\beta_1)|, \quad u_2 = |C_1(\beta_2)|, \quad \alpha_4 > \beta_2 > \alpha_5 > \beta_1 > \alpha_6 > \alpha_1 > 0$$

где β_1 и β_2 — корни уравнения $C_1'(r) = 0$. Кроме того, для любых скоростей потока $\alpha_6 < r_1 < \alpha_4$, а $\alpha_5 < r_1$, если $u_0^* < u < u_1$ и $\alpha_5 > r_1$, если $u_2 < u < u_0^*$.

3. Пусть теперь $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. Этому условию удовлетворяют значения Q_1 , отвечающие штрихпунктирным кривым на фиг. 1, 2. При таком условии $u_0 = -\tau'(r)$, а уравнение (2.1) может иметь два, четыре или шесть действительных корней, что определяется скоростью потока, а также соотношением частоты колебаний и значений

$$\sigma_1 = \tau(m_1), \quad \sigma_2 = \tau(m_2), \quad \sigma_3 = [\beta_2 \tau(\beta_1) + \beta_1 \tau(\beta_2)] (\beta_1 + \beta_2)^{-1}$$

$$\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1, \quad 0 < m_1 < m_2 < \frac{1}{\sqrt{D_1}}$$

Здесь $\sigma = \sigma_3$ — частота, при которой $u_1 = u_2$; m_1 и m_2 — точки экстремов функции $\tau(r)$, имеющей при $r = m_1$ локальный максимум, а при $r = m_2$ — локальный минимум. Зависимость $\tau(r)$ при значениях (1.9) иллюстрируется фиг. 3, где кривым $\tau(r)$ по порядку сверху вниз отвечают Q_1 , равные 0, $\sqrt{D_1}$, $1.5\sqrt{D_1}$, $1.8\sqrt{D_1}$. Если $Q_0 = Q_1$, то $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0^*$. С увеличением Q_1 от Q_0 до $2\sqrt{D_1}$ значение σ_2 уменьшается от σ_0^* до значения $\tau(r)$ в корне $r = m_1$ уравнения $\tau'(r) = 0$, полученном для $Q_1 = 2\sqrt{D_1}$.

При выполнении условия $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ для частот $\sigma < \sigma_2$ справедливо неравенство $u_1 > u_2$, а уравнение (2.1) имеет такие же корни, как и на частотах $\sigma < \sigma_0$ в случае $Q_1 < Q_0$. Кроме соотношений (2.3) для α_5 верны оценки $\alpha_5 < m_1$, $m_1 < \alpha_5 < m_2$, $\alpha_5 > m_2$ соответственно при $u_4 < u < u_1$, $u_5 < u < u_4$, $u_2 < u < u_5$, а $\alpha_{1,6} < m_1$, $\alpha_4 > m_2$ при любых u . Здесь $u_4 = |\sigma - \sigma_1| m_1^{-1}$, $u_5 = |\sigma - \sigma_2| m_2^{-1}$, $u_1 > u_4 > u_5 > u_2$. При $\sigma_2 < \sigma < \sigma_3$ выполняется неравенство

$u_1 > u_2$, а для $\sigma_3 < \sigma < \sigma_1$ — неравенство $u_1 < u_2$. Корнями уравнения (2.1) для $\min(u_1, u_2) < u < \max(u_1, u_2)$ будут $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, -\alpha_1$ в первом случае и $\alpha_4, -\alpha_1, -\alpha_7, -\alpha_8$ во втором. Если же $u < \min(u_1, u_2)$, то это уравнение имеет корни $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, -\alpha_1, -\alpha_7, -\alpha_8$, а при $u > \max(u_1, u_2)$ — корни $\alpha_4, -\alpha_1$.
 Причем

$$(3.1) \quad \alpha_4 > \alpha_7 > \alpha_8 > \alpha_5 > \alpha_6 > \alpha_1, \quad 0 < \alpha_{1,6} < \beta_1, \quad \beta_1 < \alpha_{5,8} < \beta_2, \quad \alpha_{4,7} > \beta_2$$

Кроме того, $0 < \alpha_{1,6} < m_1, m_2 < \alpha_4 < \infty, m_1 < \alpha_8 < m_2$, а $\alpha_5 < m_1$, если $u_4 < u < u_1$ и $m_1 < \alpha_5 < m_2$ для $u < u_4$. Корень же α_7 больше m_2 при $u < u_5$, а для $u_5 < u < u_2$ справедливо неравенство $\beta_2 < \alpha_7 < m_2$.

В случае $\sigma_1 < \sigma < \sigma_0$ выполняются соотношения $u_2 > u_1, u_4 > u_1$, а уравнение (2.1) имеет два или четыре действительных корня. Четыре корня $\alpha_4, -\alpha_1, -\alpha_7, -\alpha_8$ будут при $u_1 < u < u_2$. При скоростях $u < u_2$ и $u > u_2$ есть только два корня $\alpha_4, -\alpha_7$ и $\alpha_4, -\alpha_1$ соответственно. Для них справедливы, кроме (3.1), оценки $0 < \alpha_1 < m_1$ при $u > u_4$; $m_1 < \alpha_4 < r_1$ для $u_1 < u < u_4$; $\alpha_7 > m_2$, если $u < u_5$ и $r_1 < \alpha_7 < m_2$ для $u_5 < u < u_2$. Величина же α_8 изменяется в пределах $m_1 < \alpha_8 < m_2$. В случае $\sigma > \sigma_0$ при любых u уравнение (2.1) имеет только один положительный $r = \alpha_4$ и только один отрицательный $r = -\alpha_1$ корни. Для α_1 справедливы оценки $\alpha_1 < m_1, m_1 < \alpha_1 < m_2, \alpha_1 > m_2$ соответственно для $u > u_4, u_5 < u < u_4, u < u_5$, а $\alpha_4 > m_2$.

Что касается уравнения $\sigma + ur + \tau(r) = 0$, то оно или вообще не имеет действительных корней, если $u < u_3$ или имеет для любых σ и Q_1 два отрицательных корня $r = -\alpha_2, r = -\alpha_3$, если $u > u_3$. Здесь

$$(3.2) \quad u_3 = C_2(\beta_3), \quad 0 < \alpha_1 < \beta_3, \quad \beta_3 < \alpha_3 < \infty, \quad \alpha_4 > \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_7$$

где β_3 — положительный корень уравнения $C_2'(r) = 0$. При этом в случае $Q_1 < Q_0$ находим $\alpha_2 > r_1$ и $\alpha_2 < r_1$ для $u_3 < u < u_7$ и $u > u_7$ соответственно, а $\alpha_3 > r_1$ при любых u . При условии $Q_0 < Q < 2\sqrt{D_1}$ для любых скоростей потока $\alpha_3 > m_2$, а величина α_2 заключена в пределах $(m_2, \infty), (r_1, m_2), (m_1, r_1), (0, m_1)$, если $u < u_6, u_6 < u < u_7, u_7 < u < u_8, u > u_8$ соответственно, где $u_6 = (\sigma + \sigma_2)m_2^{-1}, u_7 = (\sigma + \sigma_0^*)r_1^{-1}, u_8 = (\sigma + \sigma_1)m_1^{-1}$.

Распределение же полюсов подынтегральной функции (корней уравнения $\Delta(r) = 0$) в η_3 по частоте колебаний и скорости потока определяется соотношением величин u_k ($k=1-8$). Зависимость u_k от σ при $k=4-8$ линейная, а поведение u_1, u_2, u_3 с частотой для значений (1.9) иллюстрируется фиг. 4, где сплошными линиями изображено u_1 , штрихпунктирными — u_2 , а штриховыми — u_3 . Номера 1—4 отвечают величинам сжимающего усилия $0, \sqrt{D_1}, 1.8\sqrt{D_1}, 1.98\sqrt{D_1}$. Цифрами 5, 6, 7 помечены значения $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$.

Отметим, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} u_1 = \sqrt{gH}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} u_2 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} u_3 = \tau(\beta) / \beta$$

$$u_1(\sigma_0) = u_2(\sigma_0) = u_0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} u_3 = \infty$$

Здесь β — положительный корень уравнения $r\tau'(r) - \tau(r) = 0$.

Анализ показал, что при $Q_1 < Q_0$ имеют место следующие неравенства:

$$u_2 < u_3 < u_1, \quad \sigma < \sigma_4; \quad u_2 < u_1 < u_3, \quad \sigma \in (\sigma_4, \sigma_0)$$

$$u_0^* < u_3, \quad \sigma \in (\sigma_0, \sigma_5); \quad u_0^* > u_3, \quad \sigma > \sigma_5$$

$$\sigma_4 = \frac{\beta_3 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_3)}{\beta_1 + \beta_3}, \quad \sigma_5 = \frac{r_1 \tau(\beta_3) + \beta_3 \sigma_0^*}{\beta_3 - r_1}$$

Причем $\sigma_5 > \sigma_0^*$. На частотах σ_4 и σ_5 справедливы равенства $u_1 = u_3, u_0^* = u_5$ соответственно.

При условии же $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ справедливо

$$\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_4, \quad (Q_0 < Q_1 < Q_2); \quad \sigma_0 > \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_4 > \sigma_2, \\ (Q_2 < Q_1 < 2\sqrt{D_1})$$

где Q_2 — сжимающее усилие, при котором

$$\beta_3 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_3) = \beta_1 \tau(m_2) + \beta_3 \tau(m_2)$$

Кроме того

$$u_1 > u_3 > u_2, \quad \sigma < \sigma_4; \quad u_3 > u_1 > u_2, \quad \sigma \in (\sigma_4 \sigma_3)$$

$$u_3 > u_2 > u_1, \quad \sigma \in (\sigma_3 \sigma_0); \quad u_0^* > |u_0|, \quad \sigma > \sigma_0$$

Для каждого конкретного случая проведем вычисление интегралов (1.7) методом контурного интегрирования с учетом расположения стационарных точек (корней уравнений $M_k'(r) = 0$) относительно полюсов подынтегральных функций.

4. Пусть выполняется условие $Q_1 < Q_0$. Тогда из (1.7) при $\sigma < \sigma_0$ получим, что незатухающие с расстоянием колебания поверхности пластинки — жидкость на достаточном удалении вниз ($x > 0$) и вверх ($x < 0$) по потоку от области приложения возмущений формируются из нескольких волн вида

$$(4.1) \quad \xi_k = \pm A(\alpha_k) V_k^{-1} f^*(\alpha_k^*) \sin \gamma_k, \quad k=1, 2, \dots, 6$$

$$\gamma_k = \alpha_k x + \delta(k) \sigma t, \quad \alpha_k^* = \delta'(k) \alpha_k$$

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{\rho g} \frac{\tau(r)}{l(r)} \quad \delta(k) = \begin{cases} -1, & k=1, 2, 3 \\ 1, & k=4, 5, 6 \end{cases}$$

$$V_1 = u + \tau'(\alpha_1), \quad V_2 = u - \tau'(\alpha_2), \quad V_3 = \tau'(\alpha_3) - u$$

$$V_4 = \tau'(\alpha_4) - u, \quad V_5 = u - \tau'(\alpha_5), \quad V_6 = \tau'(\alpha_6) - u$$

где у ξ_k верхний знак берется только при $k=1$.

Затухающие колебания представляют собою волны, амплитуда которых для больших $|x|$ имеет порядок не ниже $1/\sqrt{|x|}$.

Число незатухающих волн определяется величиной скорости потока и частотой колебаний. Это иллюстрируется табл. 1, где приведены номера k возникающих волн ξ_k . Волны ξ_k для $k=1, 2, 5, 6$ гравитационные. Они возникают в жидкости и при отсутствии пластинки [12]. Волны же при $k=3, 4$ чисто упругие. В случае абсолютно гибкой пластинки эти волны не возникают. Передние фронты волн ξ_k при $k=1, 2, 5$ перемещаются вниз, а при $k=3, 4, 6$ вверх по потоку от области приложения возмущений соответственно со скоростями V_k . При $k=1, 2, 3$ волны распространяются вниз, а для $k=4, 5, 6$ вверх по потоку с фазовыми скоростями $v_k = \sigma/\alpha_k$. Длины волн равны $\lambda_k = 2\pi/\alpha_k$. Причем $V_1 > V_2$, $V_1 > V_5$, $V_4 > V_3$, $V_1 > V_6$, а соотношение между длинами генерируемых волн, а также между их фазовыми скоростями определяется выражениями (2.3), (3.2).

На частотах $\sigma > \sigma_0$ в областях $x > 0$ и $x < 0$ генерируется либо только по одной, либо по две незатухающие с расстоянием волны. Как и для $\sigma < \sigma_0$, волны при $k=1, 2$ гравитационные, а при $k=3, 4$ — упругие. Причем в случае $\sigma > \sigma_0$, $u < u_0^*$ волна ξ_1 существенно деформируется за счет упругих сил и сил продольного сжатия.

Отметим, что характер неустановившихся колебаний, генерируемых возмущениями (1.1) при условии $Q_1 < Q_0$ качественно такой же, как и при отсутствии сжимающих усилий [6].

Пусть выполняется условие $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. В этом случае кроме шести волн вида (4.1) на поверхности пластинки — жидкость могут при соответствующих условиях генерироваться еще две волны

$$\xi_k = A(\alpha_k) V_k^{-1} f^*(-\alpha_k) \sin \gamma_k, \quad \gamma_k = \alpha_k x - \sigma t, \quad k=7, 8$$

$$V_7 = u - \tau'(-\alpha_7), \quad V_8 = \tau'(-\alpha_8) - u$$

обусловленные наличием сил продольного сжатия. Волны ξ_7, ξ_8 распространяются вниз по потоку ($x < 0$) от области приложения возмущений (4.1) с фазовыми скоростями $v_{7,8} = \sigma/\alpha_{7,8}$. Соотношение между длинами этих волн и волн ξ_k ($k=1, 2, \dots, 6$), так же как и между их фазовыми скоростями определяется выражениями (3.1), (3.2). Передний фронт

Таблица 1

Таблица 2

Таблица 3

u	$x > 0$	$x < 0$	u	$x > 0$	$x < 0$	u	$x > 0$	$x < 0$
$\sigma < \sigma_4$			$\sigma < \sigma_2$			$\sigma_3 < \sigma < \sigma_1$		
$u > u_1$	1, 2	3, 4	$u > u_1$	1, 2	3, 4	$u > u_3$	1, 2	3, 4
$u_3 < u < u_1$	1, 2, 5	3, 4, 6	$u_3 < u < u_1$	1, 2, 5	3, 4, 6	$u_2 < u < u_3$	1	4
$u_2 < u < u_3$	1, 5	4, 6	$u_2 < u < u_3$	1, 5	4, 6	$u_1 < u < u_2$	1, 7	4, 8
$u < u_2$	1	6	$u < u_2$	1	6	$u < u_1$	1, 5, 7	4, 6, 8
$\sigma_4 < \sigma < \sigma_0$			$\sigma_2 < \sigma < \sigma_4$			$\sigma_1 < \sigma < \sigma_0$		
$u > u_3$	1, 2	3, 4	$u > u_1$	1, 2	3, 4	$u > u_3$	1, 2	3, 4
$u_1 < u < u_3$	1	4	$u_3 < u < u_1$	1, 2, 5	3, 4, 6	$u_2 < u < u_3$	1	4
$u_2 < u < u_1$	1, 5	4, 6	$u_2 < u < u_3$	1, 5	4, 6	$u_1 < u < u_2$	1, 7	4, 8
$u < u_2$	1	6	$u < u_2$	1, 2, 5, 7	3, 4, 6, 8	$u < u_1$	7	4
$\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$			$\sigma_4 < \sigma < \sigma_3$			$\sigma > \sigma_0$		
$u < u_0^*$	1	6	$u > u_3$	1, 2	3, 4	$u > u_3$	1, 2	3, 4
$u_0^* < u < u_3$	1	4	$u_1 < u < u_3$	1	4	$u < u_3$	1	4
$u > u_3$	1, 2	3, 4	$u_2 < u < u_1$	1, 5	4, 6			
$\sigma > \sigma_0^*$			$u < u_2$	1, 5, 7	4, 6, 8			
$u < u_3$	1	4						
$u > u_3$	1, 2	3, 4						

волны ξ_7 перемещается вниз, а волны ξ_8 вверх по потоку. Скорости перемещения передних фронтов равны соответственно V_7, V_8 .

Таким образом, при условии $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ вниз и вверх по потоку от области приложения возмущений может генерироваться по одной, две, три или четыре незатухающие с расстоянием волны. Число волн зависит от скорости потока, частоты колебаний и величины сжимающего усилия.

Для $\sigma < \sigma_3$ это иллюстрируется табл. 2, если $Q_2 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. При $Q_0 < Q_1 < Q_2$ распределение волн по скорости потока на частотах $\sigma < \sigma_4$ описывается табл. 1, а при $\sigma \in (\sigma_4, \sigma_2)$ оно то же, что в табл. 1 для $\sigma \in (\sigma_4, \sigma_0)$. В случае $Q_0 < Q_1 < Q_2$, $\sigma \in (\sigma_2, \sigma_3)$ волны распределены по u так же, как и в табл. 2 для $\sigma \in (\sigma_4, \sigma_3)$. Распределение волн по скорости потока и частоте колебаний для $\sigma > \sigma_3$ при условии $Q_0 < Q_1 < Q_2$ качественно такое же, как и при $Q_2 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. Оно представлено в табл. 3.

Волновая картина, аналогичная полученной для $Q_1 < Q_0$ и $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, формируется при отсутствии потока и под воздействием движущейся со скоростью u по поверхности пластинки области нормальных напряжений, интенсивность которых периодически меняется со временем. При этом волны $\xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_8$ возникают перед областью движущихся напряжений, а $\xi_1, \xi_2, \xi_5, \xi_7$ за ней.

Поступила 16 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д. Е. Нестационарная задача о колебаниях бесконечной упругой пластинки, плавающей на поверхности идеальной жидкости. Изв. АН СССР, Мех. и маш., 1962, № 1.
 2. Хейсин Д. Е. Некоторые нестационарные задачи динамики ледяного покрова. Тр. Аркт. и Антаркт. НИИ, 1971, т. 300.
 3. Красильников В. Н. О возбуждении изгибно-гравитационных волн. Акуст. ж., 1962, т. 8, № 1.
 4. Черкесов Л. В. Поверхностные и внутренние волны. Киев, «Наукова думка», 1973.
 5. Букагов А. Е., Черкесов Л. В. О влиянии упругой пластинки на движение неоднородной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
 6. Букагов А. Е., Черкесов Л. В. Неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости. Прикл. мех., 1977, т. 13, № 9.
 7. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л., Гидрометеоиздат, 1967.
 8. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.
 9. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
 10. Стокер Д. Д. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
 11. Богородский В. В. Упругие модули кристалла льда. Акуст. ж., 1964, т. 10, в. 2.
 12. Черкесов Л. В. Неустановившиеся волны. Киев, «Наукова думка», 1970.
-