

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА
И ТЕХНИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

6

(Отдельный оттиск)

НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1991

А. Е. Букатов, В. В. Жарков, Д. Д. Завьялов

ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ
ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ СЖАТИИ

Изучается влияние неравномерного сжатия на трехмерные изгибные колебания тонкой упругой плавающей пластинки и волновое возмущение в слое однородной жидкости под ней при движении области давлений. Анализируется зависимость годографа волнового вектора и структуры фазовых портретов колебаний от скорости и направления перемещения генератора волн, величин продольного, поперечного и сдвигового сжимающих усилий. Для условий продольного и равномерного сжатия изгибно-гравитационные волны при движении области давлений рассматривались в [1—4].

1. Пусть на поверхности потока однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины H плавает тонкая упругая неравномерно сжатая пластинка. По поверхности пластинки под углом α к направлению потока движется с постоянной скоростью v генератор волновых возмущений

$$(1.1) \quad p = p_0 f(x_1, y) \exp(-i\sigma t), \quad x_1 = x - vt.$$

Рассмотрим влияние сжимающих усилий на трехмерные установившиеся изгибные колебания пластинки и волновое возмущение потока жидкости. В системе координат x_1, y, z , связанной с движущейся областью давлений (1.1), задача о колебаниях малой амплитуды сводится к решению уравнения Лапласа

$$(1.2) \quad \Delta \varphi = 0, \quad -H < z < 0$$

с граничными условиями

$$(1.3) \quad L\zeta + (1/g)F\varphi = p_1 f(x, y) \exp(-i\sigma t), \quad z = 0;$$

$$F\zeta = \partial\varphi/\partial z, \quad z = 0; \quad \partial\varphi/\partial z = 0, \quad z = -H.$$

$$\text{Здесь} \quad L = D_1 \nabla^4 + Q_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2Q_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \kappa_1 F^2 + 1;$$

$$F = \frac{\partial}{\partial t} + (u_x + v) \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\{D_1, Q_1, Q_2, Q_3, \kappa_1, p_1\} = \frac{1}{\rho g} \{D, Q_x, Q_y, Q_{xy}, \kappa, p_0\};$$

$$D = Eh^3 [12(1 - \nu^2)]^{-1}; \quad \kappa = \rho_1 h; \quad u_x = u \cos \alpha; \quad u_y = u \sin \alpha;$$

Q_x, Q_y, Q_{xy} — сжимающие усилия по соответствующим направлениям; E, h, ν, ρ_1 — модуль нормальной упругости, толщина, коэффициент Пуассона, плотность пластинки; ρ — плотность жидкости; u — модуль вектора скорости потока; ζ — прогиб пластинки. Здесь и далее у x_1 индекс 1 опущен.

Решая задачу (1.1) — (1.3) методом интегрального преобразования Фурье для прогиба пластинки ζ , получим выражение

$$(1.4) \quad \zeta = \frac{p_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(m, n) M(r)}{\tau^2 - \sigma_0^2} \exp[i(m x + n y - \sigma t)] dm dn,$$

$$\tau^2 = M(r) l(m, n), \quad M(r) = (1 + \kappa_1 r g \operatorname{th} r H)^{-1} r g \operatorname{th} r H,$$

$$l(m, n) = 1 + D_1 r^4 - Q_1 m^2 - Q_2 n^2 - 2Q_3 m n,$$

$$\sigma_0 = \sigma - (u_x + v)m - u_y n, \quad r^2 = m^2 + n^2$$

$\bar{f}(m, n)$ — трансформанта Фурье функции $f(x, y)$.

Уравнение $\tau^2 - \sigma_0^2 = 0$, связывающее волновое число r с частотой σ , скоростью потока u , скоростью перемещения источника возмущений v , определяет годограф волнового вектора в плоскости (m, n) . Установившиеся волновые возмущения в дальней зоне, описываемые выражением

(1.4), характеризуются [5, 6] координатами (m, n) точек годографа $G(m, n) = 0$.

2. Рассмотрим источник постоянной интенсивности ($\sigma = 0$), перемещающийся по поверхности пластинки при отсутствии дрейфа ($u = 0$). Тогда уравнение годографа можно привести к виду

$$m = \left[S_1 S_2 + 2S_3 [S_3 r^2 \pm (S_3^2 r^4 + S_1 S_2 r^2 - S_1^2)^{1/2}] \right] (S_2^2 + 4S_3^2)^{-1/2},$$

$$n = \pm (r^2 - m^2)^{1/2} \text{sign } Q_3,$$

$$S_1 = rg(1 + D_1 r^4 + Q_2 r^2) \text{th } rH, \quad S_2 = v^2(1 + \kappa_1 rg \text{th } rH) +$$

$$+ (Q_1 - Q_2)rg \text{th } rH,$$

$$S_3 = Q_3 rg \text{th } rH.$$

Верхний и нижний знаки при n и в квадратных скобках выражения m относятся к дугам годографа, лежащим соответственно выше и ниже оси абсцисс. Годограф определен при $v > v_0$, где

$$v_0 = \Phi(r_0), \quad \Phi'(r_0) = 0, \quad \Phi(r) = \frac{1}{r} \left\{ M(r) \left[(1 + D_1 r^4 - Q_1 r^2) - \frac{(r^2 Q_3)^2}{1 + D_1 r^4 - Q_2 r^2} \right] \right\}^{1/2}.$$

Если $Q_3 = 0$, то $m = (S_1/S_2)^{1/2}$, $n = \pm(r^2 - m^2)^{1/2}$ и годограф симметричен относительно оси абсцисс. Причем Q_2 не влияет на v_0 , а зависимость этой критической скорости от Q_1 рассмотрена в [7].

3. Для исследования зависимости годографа и структуры волновых возмущений от величин продольного, поперечного и сдвигового сжимающих усилий проводились численные расчеты при различных скоростях перемещения источника возмущений для значений $E = 5 \cdot 10^9$ Н·м⁻², $H = 350$ м, $h = 2,5$ м, $v = 0,34$, $\rho_1 = 870$ кг·м⁻³, $\rho = 1025$ кг·м⁻³, характеризующих ледяную пластину [8, 9].

Анализ результатов численного счета показал, что при $Q_3 \neq 0$ распределение v_0 по Q_1 качественно аналогично распределению в случае равномерного сжатия. Количественная зависимость v_0 от Q_1 для $Q_2 = 0$, $Q_3 \geq 0$ дана в таблице, где $Q_0 = \sqrt{D_1}$. Роль Q_3 независимо от его знака проявляется в уменьшении v_0 . Поперечное сжатие (растяжение) при учете сдвиговых усилий ($Q_3 \neq 0$) уменьшает (увеличивает) v_0 , причем влияние Q_2 усиливается с ростом Q_3 . Распределение v_0 по Q_2 и Q_3 иллюстрирует рис. 1 (сплошные, штриховые, штрихпунктирные и пунктирные линии отвечают $Q_1 = Q_3 = 0$; $Q_1 = 0, Q_3 = 0$; $Q_1 = 0, Q_3 = (3/2)Q_0$; $Q_1 = Q_3 = Q_0$ (а), $Q_1 = Q_2 = 0$; $Q_1 = 0, Q_2 = (3/2)Q_0$; $Q_1 = (3/2)Q_0, Q_2 = 0$; $Q_1 = Q_2 = (3/2)Q_0$ (б)). Видно, что при наличии сдвиговых усилий возможны условия генерации волновых возмущений источником, движущимся с любой ненулевой скоростью.

Годографы волнового вектора без учета и с учетом сдвиговых усилий представлены соответственно на рис. 2, 3 при $v = 45$ м·с⁻¹ из диапазона $v_0 < v < c$ ($c = \sqrt{gH}$). Линии 1–5 соответствуют $Q_1 = Q_2 = 0$; $Q_1 = -Q_0, Q_2 = Q_0$; $Q_1 = 2Q_0, Q_2 = 0$; $Q_1 = 0, Q_2 = 1,9Q_0$; $Q_1 = Q_0, Q_2 = -Q_0$ (рис. 2) и $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$; $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_0$; $Q_1 = Q_2 = 0, Q_3 = Q_0$; $Q_1 = Q_2 = 0, Q_3 = 2Q_0$; $Q_1 = 0, Q_2 = 1,9Q_0, Q_3 = 1,5Q_0$ (рис. 3). Видно, что для всех годографов характерно наличие двух точек перегиба

Q_1/Q_0	Q_3/Q_0		
	0	1	1,5
-2	29,065	28,037	26,196
-1,5	27,589	26,309	24,061
-1	25,915	24,332	21,593
-0,5	24,011	22,039	18,668
0	21,797	19,318	15,030
0,5	19,157	15,959	9,227
1	15,869	11,413	0
1,5	11,381	0	0
2	0	0	0

как в верхней, так и в нижней полуплоскости. На годографах, где прогибы выражены особенно ярко, эти точки отмечены кружками и треугольниками, а звездочки — точки касания годографа и луча, выходящего из начала координат. Уменьшение v приводит к сближению точек перегиба на дугах годографа в верхней и нижней полуплоскостях. Слияние этих точек для $Q_3 = 0$ происходит при скорости $v = v_1$, определяемой из системы урав-

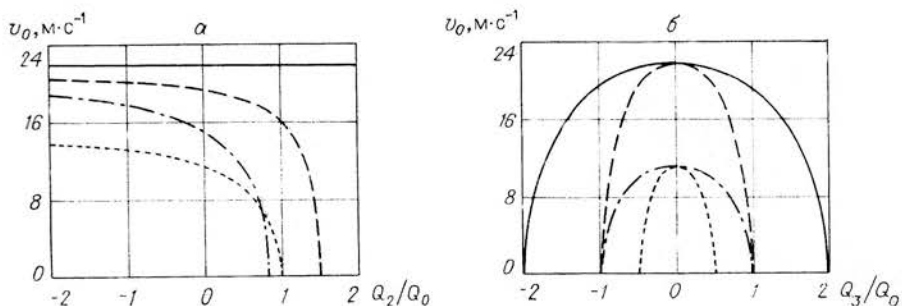


Рис. 1

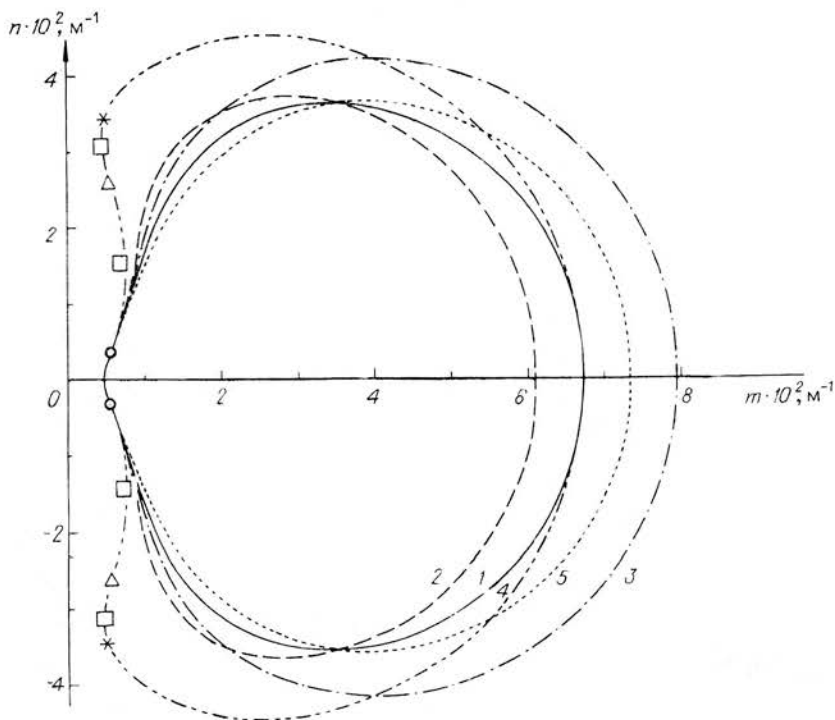


Рис. 2

нений

$$(3.1) \quad n''m' - n'm'' = 0, \quad n'''m' - n'm''' = 0$$

относительно r и v (штрих означает производную по r). При равномерном сжатии формула для v_1 получена в [3]. Сдвиговые усилия обуславливают неоднозначность решения системы (3.1), вследствие чего значения v_1 для верхней v_1^* и нижней v_1^0 дуг годографа различны. Если $Q_3 > 0$, то $v_1^* < v_1^0$ и $v_1^* > v_1^0$ для $Q_3 < 0$. При выполнении условия $v < v_1$ на дугах годографа отсутствуют точки перегиба. Площадь, ограниченная годографом, убывает с уменьшением v , стягиваясь в точку при скорости v , стремящейся к v_0 .

С увеличением v участок годографа между кружками стягивается в точку, приближающуюся к началу координат при стремлении v к c . Для $v > c$ годограф проходит через начало координат, а на его дугах сохраняется только по одной точке перегиба, обозначенной треугольником. При этом касательные к дугам годографа в начале координат образуют с осью абсцисс угол $\psi = \pm \arctg \sqrt{(v/c)^2 - 1}$. Расстояние между точками пересечения годографа с осью m растет (убывает) при увеличении продольного сжатия (растяжения). Поперечное сжатие деформирует годограф таким образом, что на нем могут появиться (при выполнении условия

$m' = m'' = 0$) точки с перпендикулярной к оси абсцисс касательной. Они обозначены квадратами. При отсутствии сдвигового сжатия эти точки появляются, если

$$Q_1 \geq Q_1^*, \quad Q_1^* = Q_2 - \tau_1(r^*, Q_2),$$

$$\tau_1(r, Q_2) = v^2 \left(\kappa_1 + \frac{1}{rg \operatorname{th} rH} \right) \left[1 - \frac{1 - Q_2 r^2 + D_1 r^4}{2r^2 (2D_1 r^2 - Q_2)} \left(1 - \frac{2rH}{\operatorname{sh} 2rH} \right) \right],$$

где r^* — положительный корень уравнения

$$\tau_2(r, Q_2) + 2\tau_3(r, Q_2) = 0, \quad \tau_2 = (2rH + \operatorname{sh} 2rH) (4Q_2 r - 6D_1 r^3 - \tau_1 \tau_4),$$

$$\tau_3 = (Q_2 - 4D_1 r^2) r \operatorname{sh} 2rH - (1 + D_1 r^4 - Q_2 r^2 - \tau_1 \tau_4) (3 - 2rH \operatorname{th} rH) H,$$

$$\tau_4 = (1 + D_1 r^4 - Q_2 r^2) [v^2 + (\kappa_1 v^2 - \tau_1) rg \operatorname{th} rH]^{-1} rg \operatorname{th} rH.$$

Распределения Q_1^* по Q_2 иллюстрирует рис. 4, где кривые 1, 2 отвечают значениям скорости источника 30 и 45 м·с⁻¹, сплошные и штриховые линии даны для глубин бассейна 350 и 50 м. Графики $Q_1^*(Q_2)$ для различных v пересекаются в точке, соответствующей $Q_1^* = Q_2$. Это значение совпадает с критическим усилием Q^* в условиях равномерного сжатия [3, 4, 7]. Если волны короткие, то $Q^* = \frac{\sqrt{20}}{3} Q_0$. В случае длинных волн $Q^* = \sqrt{3} Q_0$. Уменьшение глубины бассейна приводит к незначительному росту Q^* .

В условиях сдвигового сжатия нет симметрии расположения точек с вертикальной касательной относительно оси абсцисс для верхней и нижней дуг годографа. При этом возможно наличие таких точек только на одной из дуг (кривая 5 на рис. 3).

4. Дифференцирование уравнения линии равной фазы $mx + ny = \text{const}$ по r и R показывает ортогональность вектора групповой скорости к касательной годографа и фазовой скорости к гребню (впадине) волны. Для построения фазового портрета волновых возмущений вдоль направления групповой скорости откладываем отрезки длиной $2\pi k [r \cos(\theta - \gamma)]^{-1}$ ($\theta = \operatorname{arctg}(m/n)$, $\gamma = \operatorname{arctg}[dG/dn(dG/dm)^{-1}]$, k — номер линии равной фазы).

Проведем анализ структуры фазовых портретов по соответствующим годографам. При $v_0 < v < c$ участок дуги годографа (см. рис. 2, 3) справа от звездочек характеризует изгибающую волну перед источником, а слева — изгибно-гравитационную в следе за ним [3]. Если при этом $v > v_1$, то внешние нормали в точках, обозначенных кружками, характеризуют внешние, а треугольниками — внутренние границы угловых зон корабельного следа с трехволновыми возмущениями [3]. Между указанными внутренними границами возмущения формируются только поперечными гра-

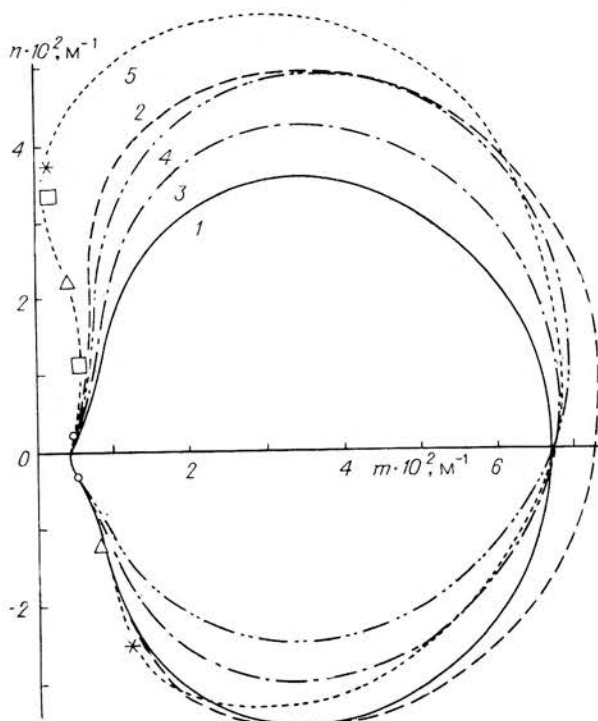


Рис. 3

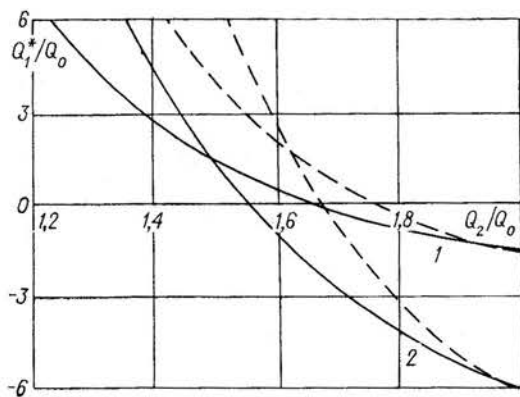


Рис. 4

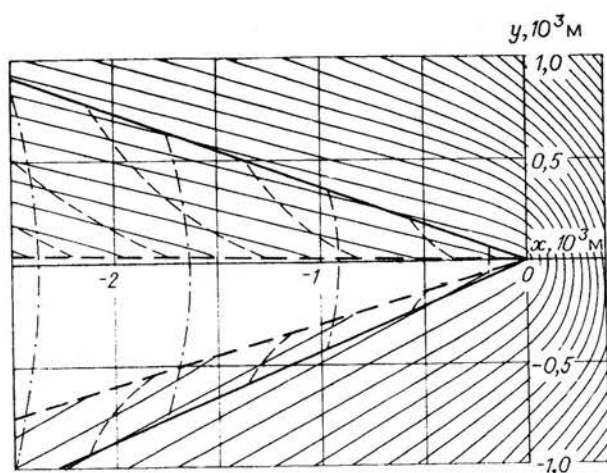


Рис. 5

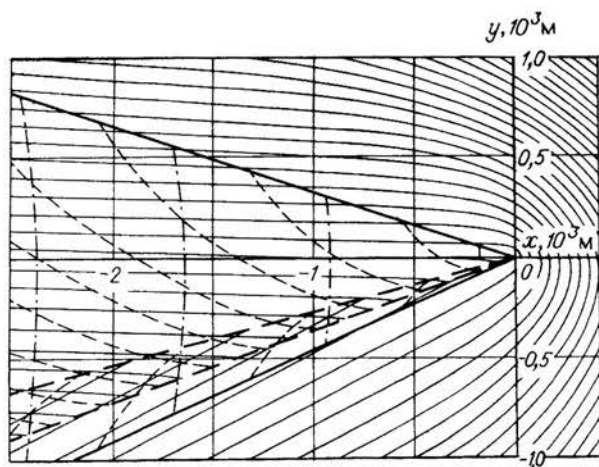


Рис. 6

витационными волнами. Изгибные волны в волновом следе характеризуются участками дуг между треугольниками и звездочками, а бегущие впереди источника — участками справа от звездочек. При отсутствии сдвиговых усилий структура фазовых портретов качественно такая же, как и при равномерном сжатии [3, 4]. Причем рост Q_1 уменьшает длины волн (изгибных в большей мере, чем гравитационных) на трассе движения источника.

Зона волнового следа, покрытая только поперечными волнами, с увеличением сжимающего усилия Q_2 сужается за счет смещения внутренних границ области с трехволновыми возмущениями; при $Q_1 = Q_1^*$ она исчезает. С дальнейшим увеличением сжимающих усилий рассматриваемые границы уходят за трассу. Вследствие этого в окрестности трассы происходит наложение друг на друга частей правой и левой зон с тремя системами волн [3]. Возмущения в зоне перекрытия характеризуются на рис. 2, 3 участками годографа между прямоугольниками. Ближние к оси абсцисс прямоугольники соответствуют пересечению гребней продольной, а дальние — изгибных волн с трассой. Смещение внешней границы области трехволновых возмущений под влиянием Q_2 незначительно. Слабо влияет на размеры угловых зон и усилие Q_1 .

Фазовые картины волновых возмущений в условиях сдвигового сжатия ($Q_3 > 0$), соответствующие годографам 2, 5 из рис. 3, представлены на рис. 5, 6 при $\max(v_1^*, v_1^0) < v < c$. Внешние и внутренние границы угловых зон изображены сплошными и штриховыми жирными линиями. Изгибным, продольным и поперечным волнам отвечают сплошные, штриховые и штрихпунктирные тонкие линии. Видна несимметричность волнового следа относительно курса движения источника. Угловая зона с трехволновым возмущением (рис. 5) слева по курсу большая, чем справа. Ее внутренняя граница расположена ближе к трассе, приближаясь к ней с ростом как Q_3 , так и Q_2 . Возможны такие значения сжимающих усилий Q_3, Q_2 , что эта граница смещается за трассу, в то время как внутренняя граница правой зоны до трассы не доходит (рис. 6).

Фазовые картины при $Q_3 < 0$ симметричны приведенным для $Q_3 > 0$ относительно трассы. Отметим, что при $Q_3 > 0$ в диапазоне $v_1^0 < v < v^*$ угловая зона генерации трех систем волн возникает только слева, а для $Q_3 < 0$ и $v_1^* < v < v_1^0$ — справа от трассы по направлению движения источника. При $v > c$ в следе за источником поперечные гравитационные волны не возбуждаются.

5. Пусть теперь источник движется по дрейфующему льду под углом α к направлению дрейфа. Повернем систему координат на угол $\beta = \arctg [(u \sin \alpha)/(v + u \cos \alpha)]$. В полученной системе источник будет двигаться со скоростью $U_0 = [(v + u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha)^2]^{1/2}$ вдоль новой оси абсцисс, а величины продольного, поперечного и сдвигового усилий примут значения

$$Q_{1\beta} = Q_1 \cos^2 \beta + Q_2 \sin^2 \beta + Q_3 \sin 2\beta,$$

$$Q_{2\beta} = Q_1 \sin^2 \beta + Q_2 \cos^2 \beta - Q_3 \sin 2\beta,$$

$$Q_{3\beta} = (1/2)(Q_2 - Q_1) \sin 2\beta + Q_3 \cos 2\beta.$$

Анализ годографа волнового вектора и фазовой структуры волновых возмущений в новой системе координат проводится, как и при отсутствии потока для $v = U_0$, $Q_i = Q_{i\beta}$, $i = 1, 2, 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букатов А. Е. Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания дрейфующего льда // Мор. гидрофиз. исслед.— 1980.— № 1.
2. Kerr A. D. The critical velocities of a moving on a floating ice plate that is subjected to in-plane forces // Gold Reg. Sci. Tech.— 1983.— N 6.
3. Букатов А. Е., Ярошенко А. А. Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 6.

4. Schulkes R. M. S. M., Hosking R. J., Sneyd A. D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2 // J. Fluid Mech.— 1987.— V. 180.— P. 297.
5. Davis J. W., Hosking R. J., Sneyd A. D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 158.— P. 269.
6. Takizawa T. Response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load // J. Geophys. Res.— 1988.— V. 93, N C5.
7. Букатов А. Е. Влияние ледового сжатия на неустановившиеся изгибно-гравитационные волны // Океанология.— 1980.— Т. 20, № 4.
8. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы в гляциологии.— Л.: Гидрометеониздат, 1980.
9. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова.— Л.: Гидрометеониздат, 1967.

г. Севастополь

*Поступила 3/V 1990 г.,
в окончательном варианте — 24/VIII 1990 г.*
