

УДК 551.467

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКО-УПРУГИХ СВОЙСТВ ЛЬДА НА ТРЕХМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

© 1995 г. А. Е. Букатов, Т. А. Соломаха

Морской гидрофизический институт АН Украины
Поступила в редакцию 10.03.94 г., после доработки 22. 08. 94 г.

Рассматривается влияние вязко-упругих свойств плавающего ледяного покрова на структуру установившихся трехмерных поверхностных волн малой амплитуды, возбуждаемые движущейся областью давлений в бассейне постоянной глубины.

Рассматривается влияние вязко-упругих свойств плавающего ледяного покрова на структуру установившихся трехмерных поверхностных волн малой амплитуды, возбуждаемые движущейся областью давлений в бассейне постоянной глубины.

Теоретический анализ трехмерных изгибно-гравитационных волн в покрытом упругим льдом бассейне выполнен в [1 - 3]. Обусловленное вязкостью ледяного покрова затухание свободных прогрессивных волн изучалось в [4, 5, 7]. Оценка скорости затухания вязко-упругого отклика на фиксированном удалении от трассы следования источника проведена в [6].

1. Исследование пространственной структуры трехмерных изгибно-гравитационных волн, возбуждаемых в покрытом льдом бассейне движущейся областью давлений, проведено в [2; 3]. Ледяной покров при этом моделировался тонкой упругой плавающей пластиной. Однако представление о вполне упругом поведении ледяного покрова при возбуждении в нем изгибных колебаний не всегда приемлемо [4 - 10]. В значительной степени это относится к ледяному покрову антарктических вод, встречающемуся без снега весьма редко и представляющему на начальной стадии состояния смесь воды, льда и снега [11]. Такой ледяной покров может обладать как упругими, так и вязкими свойствами. Проведем исследование их влияния на пространственную структуру установившихся возмущений, возбуждаемых движущейся по льду областью давлений

$$p = p_0 f(x - Vt, y) \exp(-i\sigma t), \quad (1)$$

принимая уравнения изгибных колебаний плавающего ледяного покрова в виде

$$D \nabla^4 \zeta + \kappa \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \eta h_2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \zeta = p + q, \quad (2)$$

где

$$D = \frac{E h_1^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\kappa = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2,$$

E, h_1, ν, ρ_1 – модуль нормальной упругости, толщина, коэффициент Пуассона, плотность льда; h_2, ρ_2, η – толщина, плотность и коэффициент вязкого трения снега; ζ – возвышение поверхности лед-вода; q – гидродинамическое давление воды на нижнюю поверхность льда.

В предположении потенциальности движения жидкости под ледяным покровом задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\Delta \Phi = 0, \quad -H < z < 0 \quad (3)$$

с соответствующими граничными условиями. На дне ($z = -H$) удовлетворим условию непротекания

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = -H, \quad (4)$$

а в качестве динамического условия на поверхности бассейна ($z = 0$) рассмотрим уравнение (2) колебаний ледяного покрова, учитывающее действие внешней нагрузки p вида (1) и гидродинамического давления воды $q = -\rho g \zeta - \rho \Phi_z$. Здесь ρ – плотность воды. Безотрывность колебаний льда обеспечим выполнением кинематического соотношения

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad z = 0. \quad (5)$$

Решая задачу (1) - (5) методом интегрального преобразования Фурье в системе координат $x_1 = x - Vt, y, z$, связанной с движущейся областью давлений, получим для прогиба льда выражение

$$\zeta = \frac{p_1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(m, n)}{G(m, n)} M(k) \exp[i(mx + ny - \sigma t)] dm dn,$$

$$M(\kappa) = (1 + \kappa_1 k g \operatorname{th} k H)^{-1} k g \operatorname{th} k H, \quad k^2 = m^2 + n^2,$$

$$G(m, n) = \tau_0^2 - (\sigma_0 - i\mu M)^2, \quad \tau_0^2 = \tau^2 - (\mu M)^2, \quad (6)$$

$$\tau^2 = (1 + D_1 k^4) M, \quad \sigma_0 = \sigma - Vm, \quad \mu = 0.5\eta_1 h_2 k^2.$$

$$\{D_1, \kappa_1, \eta_1, p_1\} = \{D, \kappa, \eta, p\} (\rho g)^{-1},$$

$\tilde{f}(m, n)$ – трансформанта Фурье-функции $f(x, y)$.

При отсутствии трения ($\eta = 0$) функция $G(m, n)$ действительная и уравнение $G = 0$, связывающее волновое число k с частотой σ и скоростью перемещения давлений V , определяет годограф волнового вектора плоскости (m, n) . Следовательно, установившееся волновое возмущение в дальней зоне, описываемое выражением (6), характеризуется координатами m и n точек годографа [2, 3, 9].

Для вязко-упругого случая ($\eta \neq 0$) функция $G(m, n)$ комплексная и полюсами подынтегрального выражения (6) являются комплексные корни $k = r + i\epsilon$ уравнения $G(m, n) = 0$. Их реальные части можно найти [7] из уравнения

$$\tau^2(r, 0) - \sigma_0^2(r, 0) - \sigma_1^2(r, 0) = 0. \quad (7)$$

Здесь $\sigma_1 = 0.5\eta_1 h_2 r^2 M$ величина, характеризующая скорость затухания возмущений во времени.

Величину проекции коэффициента пространственного затухания на направление нормали к вязко-упругому годографу в предположении слабой диссипации определим [6].

$$l = \operatorname{Im} G(r, 0) |\operatorname{grad} \operatorname{Re} G(r, 0)|^{-1}. \quad (8)$$

2. Рассмотрим возмущения, возбуждаемые движущимся источником постоянной со временем интенсивности в бассейне с плавающей смесью измельченного льда с шугой и снежурой [11]. В таких условиях установившееся волновое движение характеризуется выражениями (6) – (8) при $\sigma = 0$, $E = 0$, $h_1 = 0$. Количественный анализ проведем при $H = 10^3$ м, $\eta = 4.7 \times 10^6$ Па с, $\rho_2 = 250$ кг/м³. Зависимость соответствующего годографа волнового вектора от скорости перемещения генератора и толщины вязкого слоя иллюстрируются графиками на рис. 1а. Здесь сплошными линиями изображен годограф при $h_2 = 0.5$ м, а штриховыми – при $h_2 = 1$ м. Номера 1, 2, 3 отвечают значениям скорости перемещения генератора 10, 20, 50 м/с.

Видно, что с увеличением толщины рассматриваемого вязкого слоя площадь, ограниченная кривой волнового числа, убывает. Это свидетельствует об уменьшении диапазона волновых чисел генерируемых установившихся возмущений. В то же время изменение скорости перемещения источника может привести к существенной деформации годографа. Для $V_0 < V < C$, где $C = \sqrt{gH}$ годограф (кривые 2, 3) в верхней ($n > 0$) и нижней

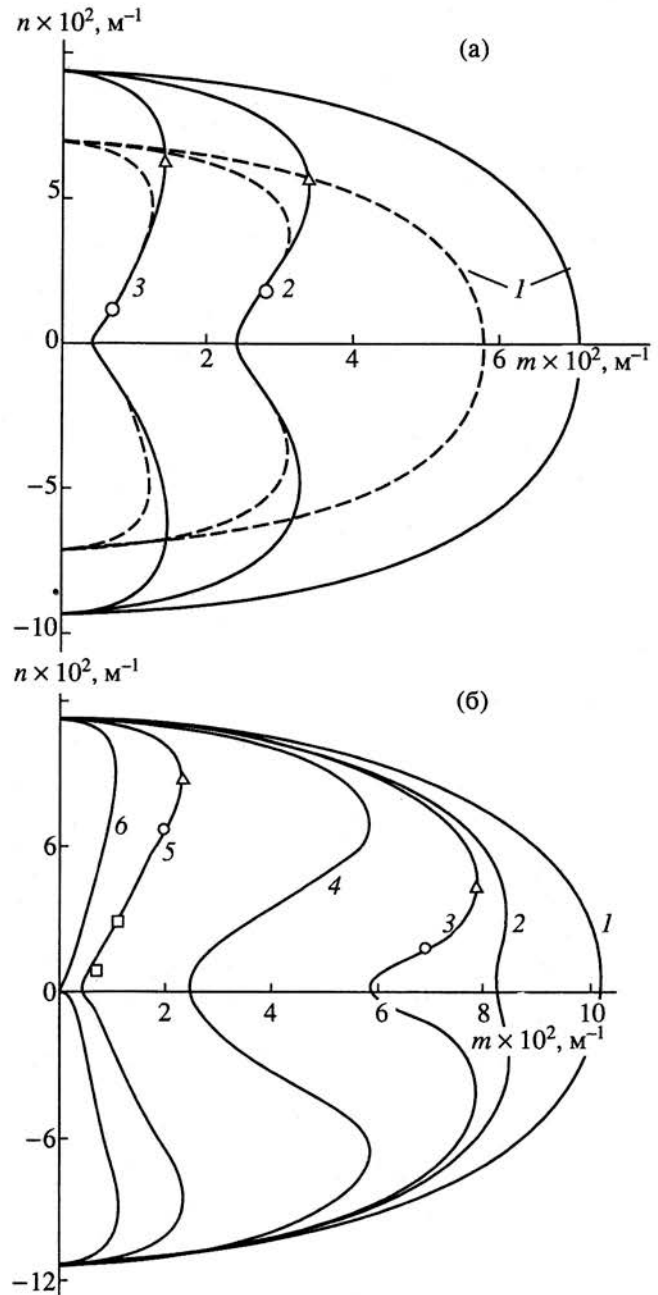


Рис. 1. Годографы волнового вектора для битума ($E=0$) и сплошного льда ($E \neq 0$, $\eta > \eta_0$).

($n < 0$) полуплоскостях имеет точки перегиба и точки с касательной, параллельной оси n . Они обозначены кружками и треугольниками соответственно. Здесь

$$V_0 = F(r_1), \quad (9)$$

$$F(r) = \left[\tau_0^2 r^{-2} - \tau_0' (r \tau_0' - \tau_0)^2 (r^3 \tau_0'')^{-1} \right]^{1/2},$$

r_1 – корень уравнения $\tau_0(r) = 0$, штрих означает производную по r .

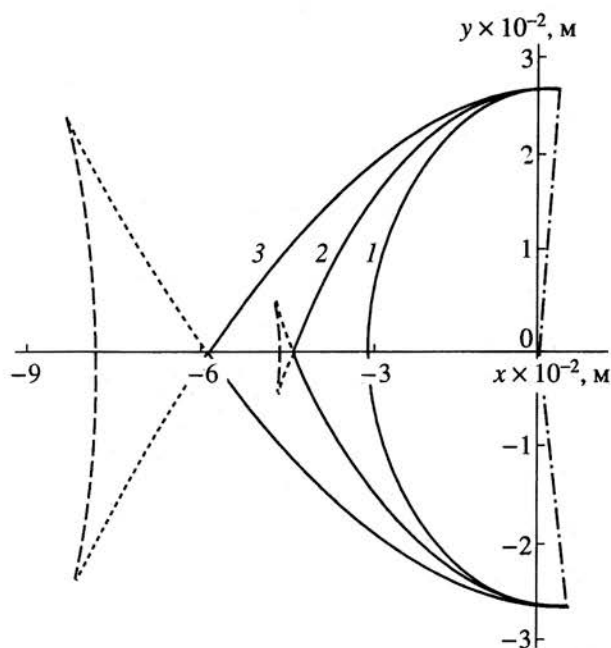


Рис. 2. Зависимость структуры волнового следа от скорости перемещения источника в условиях битого льда.

При $V \Rightarrow C$ точки перегиба стягиваются к оси m , приближаясь к началу координат. В диапазоне скорости $V \geq C$ годограф проходит через начало координат, а ограниченная им площадь убывает с ростом V . Если $V \Rightarrow V_0$, то в каждой из полуплоскостей точка перегиба и точка с параллельной оси n касательной вырождается в одну, приближающуюся к оси m , а годограф приобретает форму, представленную кривыми 1. Такой вид годографа сохраняется в диапазоне скоростей $0 < V < V_0$. Значение V_0 увеличивается с ростом трения η и толщины вязкого слоя. В частности, V_0 равно 11.14 и 12.78 м/с при толщинах вязкого слоя 0.5 и 1 м соответственно (рис. 1а). Если при этом $\eta = 2 \times 10^4$ Па с, то критическими скоростями будут 3.63, 4.11 м/с.

Анализ структуры фазовых портретов и соответствия их особенностей характерным чертам годографа проведем при слабой диссипации, используя известные соотношения, связывающие уравнение кривой волнового вектора и линий постоянной фазы [2, 3, 9, 12]. Построенные по результатам численных расчетов линии первых в волновом следе гребней возмущений обозначены номерами 1, 2, 3 на рис. 2 для $h_2 = 1$ м, $\eta = 4.7 \times 10^6$ Па с и значений скорости перемещения источника 10, 15, 20 м/с. Сплошная кривая 1 характеризует здесь волны, обусловленные вязкостью. Штриховые и пунктирные участки линий 2, 3 представляют гравитационные поперечные и продольные, а сплошные – продольные гравитационно-вязкие корабельные волны.

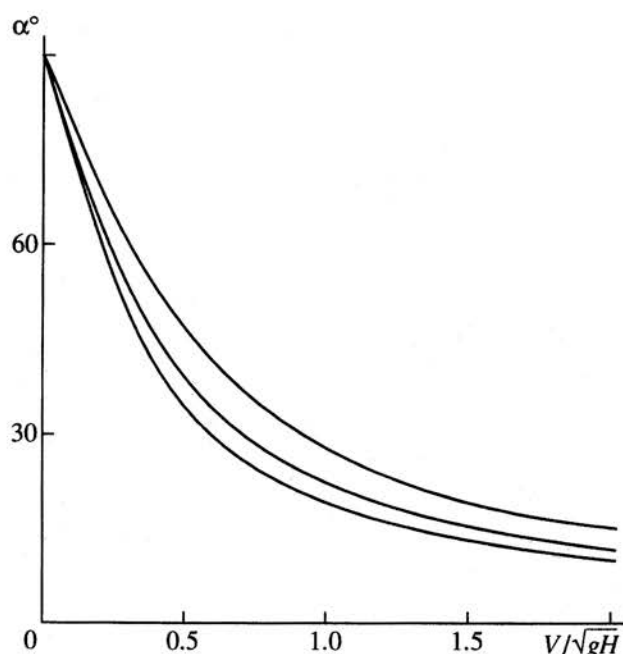


Рис. 3. Угол зоны перед источником, свободной от вязких возмущений, при $E = 0$.

Эти графики показывают, что при $V < V_0$ структура возбуждаемых волн определяется трением в вязком слое. Если $V_0 < V < C$, то кроме гравитационно-вязких волн в следе генерируются и гравитационные волны типа корабельных. Их угловая зона, ограниченная прямыми, проходящими через начало координат и точки слияния гребней (впадин) продольных и поперечных волн, растет с увеличением скорости перемещения источника, приближаясь к величине предельного угла следа в жидкости при отсутствии вязкого слоя. При этом точка, разделяющая гравитационные и гравитационно-вязкие участки гребней продольных волн, лежащая в волновом следе на трассе за источником (треугольник на годографе), и гребень поперечных волн удаляются от источника. В диапазоне $V > C$ поперечные волны не возбуждаются, а волновой след формируют продольные гравитационные и гравитационно-вязкие волны. Кроме того, при наличии вязкого поверхностного слоя возмущения, обусловленные трением, находятся не только в следе, но и опережают источник вне трассы его следования. Непосредственно перед генератором имеется свободная от них угловая зона. Она сужается при увеличении скорости перемещения источника и расширяется с ростом толщины вязкого слоя и коэффициента вязкого трения. Количественная зависимость величины угла α этой зоны, характеризующей степень опережения возмущениями источника, иллюстрируется графиками на рис. 3, где линии по порядку сверху вниз отвечают толщинам вязкого слоя 2, 0.5, 0.2 м. Отметим, что увеличение h_1

приводит к аналогичным, в качественном отношении, изменениям структуры возмущений и волновых характеристик.

3. Рассмотрим теперь возмущения, возбуждаемые движущимся источником постоянной интенсивности в бассейне с плавающим сплошным упругим ($D \neq 0$) льдом, покрытым слоем снега. Из анализа годографов, проведенного для этого случая, следует их существенная зависимость от скорости перемещения источника, упругих и вязких свойств ледяного покрова.

Пусть $\eta > \eta_0$, где

$$\eta_0 = \rho g [(a_1^2 + a_2)^{1/2} - a_1]^{1/2} (r^2 h_2)^{-1},$$

$$a_1 = 2 [5 - 2gH\kappa_1 r^2 + (1 - 2gH\kappa_1 r^2) D_1 r^4] (r^2 gH)^{-1},$$

$$a_2 = 16 (1 + D_1 r^4)^2 [H + (1 - g\kappa_1 r) g\kappa_1] (r^2 g^2 H)^{-1}.$$

При таких η кривая волнового числа определена при любом значении скорости перемещения источника возмущений. Ее зависимость от V иллюстрируют графики на рис. 16, приведенные для значений $E = 3 \times 10^9$ Н/м², $\rho_1 = 870$ кг/м³, $\rho_2 = 250$ кг/м³, $h_1 = 1.5$ м, $h_2 = 1$ м (10). Глубина бассейна и коэффициент трения полагались равными 10^3 м, 6.5×10^6 Па с. Линии с номерами 1 - 6 отвечают здесь значениям скорости источника 10, 14, 15, 20, 50, 105 м/с. Видно, что для диапазона $0 < V < V_0$, где V_0 определяется по формуле (9) при $D \neq 0$, жесткость льда не вносит качественных изменений в поведение годографа. Он имеет примерно такой же вид (линии 1), как и в случае битого льда. Не меняется за счет жесткости форма годографа и при $V_0 < V < V_1$ где $V_1 = F(r_2)$, а r_2 - действительный корень уравнения $F'(r) = 0$. В данном диапазоне V на годографе (кривые 2 - 4) в верхней и нижней полуплоскостях имеется по одной точке перегиба и одной точке с параллельной осью касательной. Если $V_1 < V < C$, то под влиянием жесткости льда и силы тяжести на годографах (кривые 5, 6) в указанных областях появляются еще по две точки перегиба, обозначенные на графике для $V = 50$ м/с квадратами. Дальнейшее увеличение V стягивает ближайшие к оси m точки перегиба в одну, приближающуюся к началу координат. При $V > C$ на годографе (кривая 6) сверху и снизу остается только по две точки перегиба. Одна из них обусловлена вязкостью, а другая жесткостью льда.

Пусть теперь $\eta < \eta_0$. Тогда, кроме V_0 , V_1 , C , скорость перемещения источника имеет еще два критических значения V_2 и V_3 , обусловленных упругими и вязкими свойствами льда. Они определяются по формуле $V_{2,3} = \tau_0(r_{2,3})r_{2,3}^{-1}$, где $r_{2,3}$ - действительные корни уравнения $r\tau_0(r) - \tau_0(r) = 0$, $r_2 < r_3$.

От соотношения критических скоростей между собой и скоростью перемещения источника су-

щественно зависит вид годографа. Возможные соотношения характеризуются на рис. 4 расположением графиков, представляющих зависимость критических величин скорости от коэффициента трения при значениях (10) для глубины бассейна 350 м. Здесь сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями с одной и двумя точками изображены соответственно $V_k(\eta)$, $k = 0 - 3$. Для источника, скорость перемещения которого изменяется в пределах одной из десяти пронумерованных на рис. 4 областей, вид годографа сохраняется. Однако для различных областей он имеет не только количественные, но и качественные отличия.

Если $V < V_2$ (область 1), то годографом является геометрическое место волновых чисел, обусловленных только трением. Он имеет вид кривых с номерами 1 на рис. 1. Для областей 2 - 7 годограф составляют две ветви, что иллюстрируют графики на рис. 5а. Они даны для $\eta = 4.25 \times 10^6$ Па с при тех же значениях параметров, что и на рис. 4. Линии с номерами 1, 2, 3 отвечают скорости источника 28.5 (область 2), 40.5 (область 6), 41.6 м/с ($V = V_3$). Одна из ветвей годографа обусловлена вязкостью (штриховая кривая), а другая - изгибно-гравитационная (сплошная замкнутая кривая), жесткостью льда и силой тяжести. При увеличении скорости в пределах областей 2 - 7 вязкий годограф деформируется, как и в случае битого

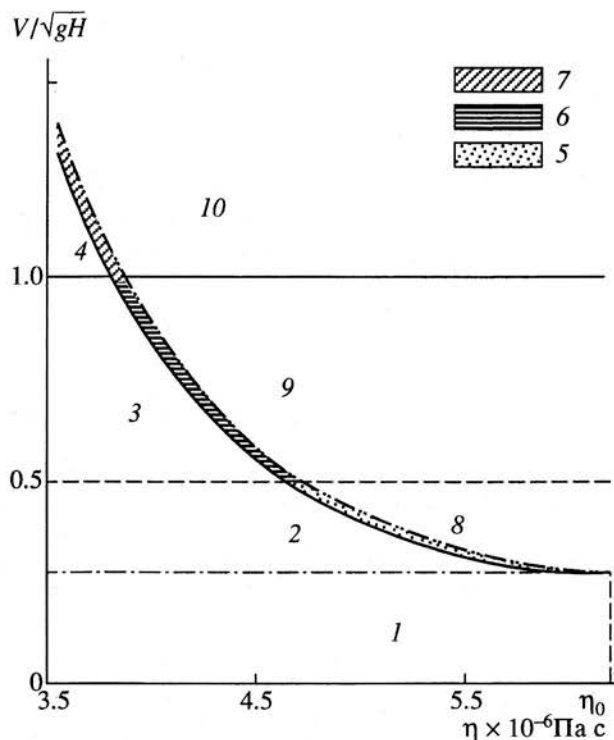


Рис. 4. Зависимость значений критических скоростей перемещения источника от коэффициента трения при $E \neq 0$, $\eta < \eta_0$.

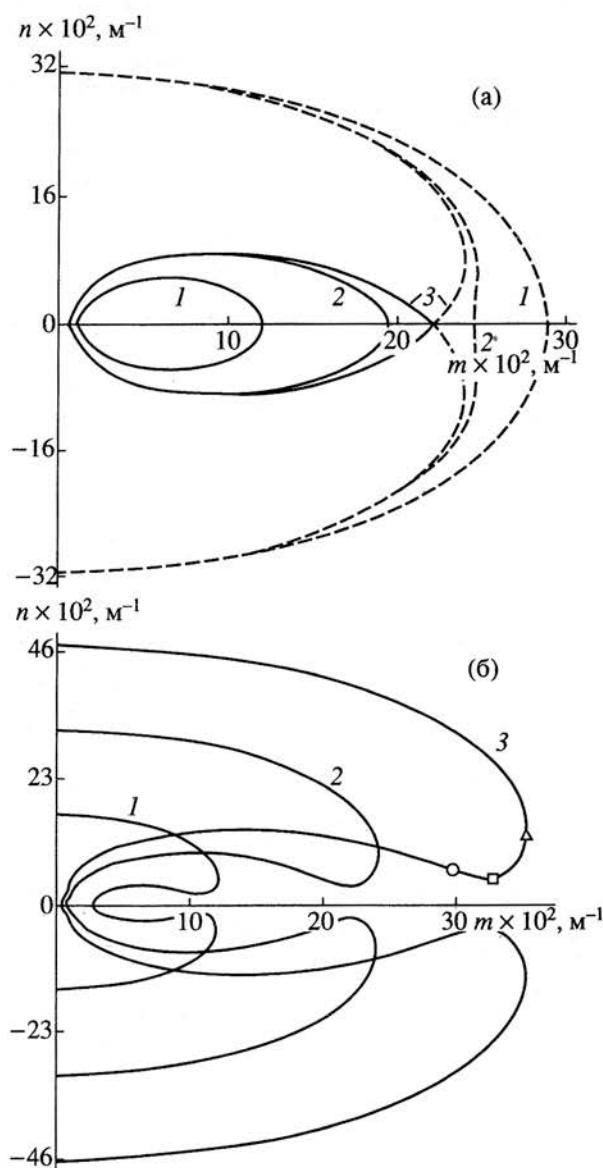


Рис. 5. Годографы волнового вектора при $E \neq 0$, $\eta < \eta_0$.

льда. Переход через $V = V_0$ связан с появлением на нем по одной точке перегиба, симметрично расположенных сверху и снизу от оси n . Изгибно-гравитационный годограф с ростом V деформируется как и при отсутствии трения [2, 3, 9]. Переход через $V = V_1$ обуславливает появление на верхнем и нижнем его участках по две точки перегиба (области 3, 6), отсутствующие в диапазоне $V_2 < V < V_1$ (области 2, 5). Из них ближайшие к оси m , стягиваясь в одну с увеличением V , приближаются к началу координат при $V \Rightarrow C$, а годограф приобретает форму, характерную для $V > C$ (области 4, 7). Переход из областей 5, 6, 7, соответственно в 8, 9, 10 через $V = V_3$ сопровождается соприкосновением вязкой и изгибно-гравитационной ветвей годографов в точке на оси m (кривая 3). Для $V > V_3$ происходит разделение изгибно-грави-

тационной ветви на два участка, каждый из которых вместе с дополняющим его участком вязкой ветви в соответствующих полуплоскостях образуют годографы для областей 8, 9, 10. Характерные годографы для указанных областей представлены на рис. 5б. Линиям 1, 2, 3 отвечают величины коэффициента трения ($\eta \times 10^{-6}$) и скорости движения источника (V м/с) равные соответственно 5.5; 19 (область 8), 4.25; 41.9 (область 9), 3.75; 67.5 (область 10). На годографах существуют точки перегиба и локальных экстремумов модулей m и n . Они обозначены кружком, квадратом и треугольником соответственно. С увеличением V указанные точки удаляются от оси m , приближаясь к оси n . Эволюция особенностей изгибно-гравитационного участка годографа при изменении скорости качественно аналогична рассмотренной для $\eta > \eta_0$ в диапазоне $V \geq 50$ м/с (рис. 16).

Особенности годографа определяют структуру фазовых картин волновых возмущений, генерируемых движущимся источником. Для значений параметров из области 1 возмущения формируются только волнами, обусловленными вязкостью. Форма линий их гребней (впадин) имеет такой же вид, как и кривая 1 на рис. 2. При значениях из области 2 - 7 возмущения формируются волнами, отвечающими волновым числам вязких и изгибно-гравитационных ветвей годографа. Поэтому пространственная структура возмущений является результатом сложения соответствующих этим ветвям фазовых картин. Фазовый портрет, отвечающий вязкой ветви кривой волнового числа, и его деформация при изменении скорости источника и коэффициента трения качественно такие же, как и для бассейна с битым льдом. Фазовая структура, порожденная изгибно-гравитационной ветвью годографа, практически не меняется под воздействием вязкости ледяного покрова и определяется, главным образом, его жесткостью. Зависимость этой структуры от скорости перемещения источника и сил ледового сжатия рассмотрена в [2, 3, 9]. Что касается областей 8, 9, 10, то для них фазовые картины возмущений, формируемых продольными, поперечными и изгибными волнами в зоне корабельного следа за движущимся источником, так же практически не деформируются вязкостью. Ее влияние проявляется здесь возбуждением системы изгибно-вязких волн, которые вместе с гравитационными корабельными и изгибными формируют структуру возмущений в следе. Фазовый портрет этих волн, соответствующий участку годографа для области 8 сверху от его локального минимума, приведен на рис. 6а. Гребни волн, изображенные штриховыми линиями, отвечают на годографе волновым числам между квадратом и треугольником, а сплошными — сверху от треугольника. Штрихпунктирными линиями ограничена угловая зона перед источником, свободная от обусловленных вязкостью возму-

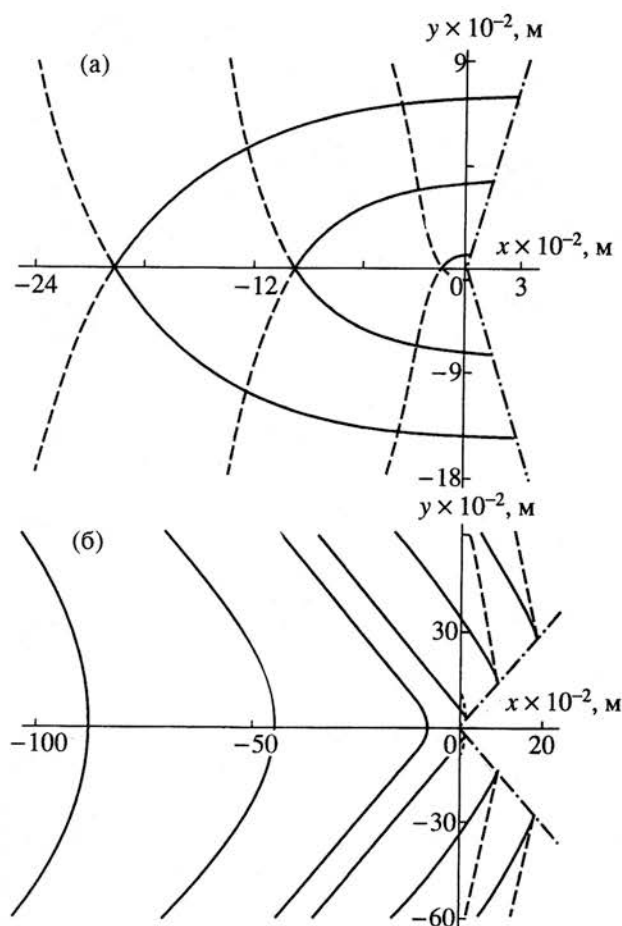


Рис. 6. Фазовые картины возмущений при $V > V_3$, $\eta < \eta_0$, в условиях сплошного льда.

щений. Эта зона, как и в случае битого льда, убывает с ростом коэффициента трения. Жесткость льда увеличивает ее. Перед источником в окрестности курса его следования под влиянием вязкости образуется и угловая зона, свободная от изгибных волн предвестников, а фазовый портрет приобретает вид, представленный на рис. 6б для годографа из области 8. Сплошными кривыми изображены здесь линии гребней для волн, отвечающих участку годографа слева от точки вязкого перегиба, а штриховыми – справа от него до точки локального минимума. Направление нормали к годографу в точке перегиба определяет границу указанной зоны. Угол ее раствора растет с увеличением скорости перемещения источника, что приводит к уменьшению области изгибных

возмущений, опережающих его на трассах, параллельных направлению перемещения. Для больших величин скорости угол становится тупым и все возмущения, обусловленные изгибными волнами, сосредоточены в угловой зоне следа за источником. Она уменьшается с ростом скорости.

При значениях коэффициента трения $\eta > \eta_0$ изменение скорости в диапазоне $0 < V < V_1$ деформирует фазовые портреты, как и в бассейне с битым льдом. При $V > V_1$ изменения структуры возмущений такие же, что и для значений параметров из областей 9, 10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. С. 215.
2. Davis J.W., Hosking R.J., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 269 - 287.
3. Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д. Трехмерные изгибногравитационные волны при неравномерном сжатии. // ПМТФ. 1991. № 6. С. 51 - 57.
4. Крылов Ю.М. Распространение длинных волн под ледяным полем // Тр. ГОИН. 1948. № 8. С. 52 - 59.
5. Савченко В.Г. О влиянии ледяного покрова на поверхностные и внутренние свободные гравитационные волны // Проблемы Арктики и Антарктики. Л.: Гидрометеиздат, 1986. Вып. 62. С. 103 - 110.
6. Hosking R.J., Sneyd A.D., Waygh D.W. Viscoelastic response of a floating ice plate to a steadily moving load // J. Fluid Mech. 1988. V. 196. P. 409 - 430.
7. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Затухание изгибногравитационных волн // Морской гидрофизический журнал. 1990. № 5. С. 12 - 18.
8. Гаверило В.П., Трипольников В.П. Результаты исследования изгибно-гравитационного резонанса в морских льдах // Теория и прочность ледокольного корабля. Горький: Изд. Горьк. политехн. института, 1982. С. 28 - 34.
9. Takisawa T. Response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load. // J. Geophys. Res. 1988. V. 93. № C5. P. 5100 - 5112.
10. Букатов А.Е., Жарков В.В. Моделирование трехмерных изгибных колебаний ледяного покрова при движении области давлений // Морской гидрофизический журнал. 1990. № 4. С. 10 - 15.
11. Назаров В.С. Льды антарктических вод. Результаты исследований по программе МГГ. Океанология № 6. М.: Изд. АН СССР, 1962, С. 80.
12. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. М.: 1981. С. 600.

Influence of Visco-Elastic Properties of the Ice on Three-Dimensional Waves

A. E. Bukatov, T. A. Solomakha

The influence of visco-elastic properties of floating ice sheet on the structure of three-dimensional small-amplitude steady waves, generated by a moving pressure area in a basin of constant depth, is considered.