

Подструктурные логики, родственные логике И.Е.Орлова¹

We construct substructural logics, which are sublogics of Orlov's system, based on different sequential formulizations of classical propositional calculus. The implication-negation fragment of each of them is implication-negation fragment of Orlov's system.

Предлагаются различные секвенциальные формулировки классического пропозиционального исчисления, на основе которых конструируются подструктурные логики, являющиеся подлогиками логики И.Е.Орлова. При этом в качестве импликативно-негативного фрагмента каждая из этих подлогик логики И.Е.Орлова имеет импликативно-негативный фрагмент последней. Пусть L – обычным образом определяемый пропозициональный язык над алфавитом $\langle S, \wedge, \vee, \supset, \neg, \rangle, (, >$, где S есть множество $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ всех пропозициональных переменных языка L , $\wedge, \vee, \supset$ – бинарные логические связи этого языка, а $\neg$ – унарная логическая связка этого языка, $\rangle$ и $($ – технические символы языка L . Термин "формула" будет употребляться только по отношению к формулам языка L . Принимаются обычные договоренности об опускании скобок. Далее A, B , и C – произвольные формулы, а Γ, Δ , Θ и Σ – произвольные конечные последовательности формул. Доказательства во всех определяемых здесь секвенциальных исчислениях строятся обычным для этого типа исчислений способом, а множество основных секвенций любого из этих исчислений есть множество всех секвенций вида $A \rightarrow A$. При таких обстоятельствах каждое из этих исчислений полностью определяется множеством всех его правил вывода (фигур заключения). Множество всех правил вывода каждого из формулируемых здесь секвенциальных исчислений включается во множество всех следующих правил вывода: R1-R13, R14.1-R14.4, R15.1-R15.4.

$$\frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (R1)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A} \quad (R2)$$

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 01-03-00403.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow \Theta} \quad (R3)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Delta, B, A, \Theta} \quad (R4)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B, \Sigma \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta} \quad (R5)$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \supset B} \quad (R6)$$

$$\frac{A, B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (R7)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B} \quad (R8)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (R9)$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A} \quad (R10)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad A, \Sigma \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta} \quad (R11, \text{называемое правилом смешения})$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (R12, \text{называемое правило добавления слева})$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, A} \quad (R13, \text{называемое правило добавления справа})$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad \Sigma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta, A \wedge B} \quad (R14.1)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \wedge B} \quad (R14.2)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \rightarrow \Sigma, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, \Sigma, A \wedge B} \quad (R14.3)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad \Sigma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, A \wedge B} \quad (R14.4)$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \quad B, \Sigma \rightarrow \Theta}{A \vee B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta} \quad (R15.1)$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (R15.2)$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \rightarrow E}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta, \Sigma} \quad (R15.3)$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \quad B, \Sigma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta} \quad (R15.4)$$

Секвенциальное исчисление $GCL(i, j)$ и секвенциальное исчисление $GO(i, j)$, где $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, таковы, что множеству всех правил вывода исчисления $GCL(i, j)$ принадлежат только правила $R1$ - $R13$, $R14.i$ и $R15.j$, а множеству всех правил вывода исчисления $GO(i, j)$ принадлежат только правила $R1$ - $R11$, $R14.i$ и $R15.j$, т.е. множеству всех правил вывода исчисления $GO(i, j)$ принадлежат все те и только те правила, каждое из которых является правилом вывода исчисления $GCL(i, j)$ и отлично от структурных правил добавления $R12$ и $R13$. Множества всех доказуемых секвенций в ряде определенных выше секвенциальных исчислений равны.

Определим отображение ϕ множества $\{1, 2, 3, 4\}$ на $\{1, 2, 3, 4\}$ следующим образом: $\phi(1)=1$, $\phi(2)=2$, $\phi(3)=4$, $\phi(4)=3$.

Можно доказать (используя факт наличия правила сечения $R11$ в соответствующих секвенциальных исчислениях), что для всяких i и j из $\{1, 2, 3, 4\}$ верно следующее: множество всех секвенций, доказуемых в $GO(i, j)$, равно множеству всех секвенций, доказуемых в $GO(\phi(i), \phi(j))$.

Доказаны следующие утверждения 1 и 2.

Утверждение 1. Для всяких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ секвенциальное исчисление $GCL(i, j)$ аксиоматизирует классическую пропозициональную логику: секвенция $\rightarrow A$ доказуема в $GCL(i, j)$ т.т.т. формула A есть классическая тавтология.

Утверждение 2. Для всяких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ секвенциальное исчисление $GO(i, j)$ аксиоматизирует собственную подлогику классической пропозициональной логики: всякая секвенция $\rightarrow A$ доказуемая в $GO(i, j)$ такова, что A есть классическая тавтология, но не всякая классическая тавтология A такова, что $\rightarrow A$ доказуема в $GO(i, j)$.

Итак, для всяких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ секвенциальное исчисление $GO(i, j)$ получается из секвенциального исчисления $GCL(i, j)$ только за счёт ограничения применения структурных правил – отбрасываются правила добавления $R12$ - $R13$ (см. определение исчисления $GO(i, j)$), $GCL(i, j)$ аксиоматизирует классическую пропозициональную логику (см. утверждение 1), $GO(i, j)$ аксиоматизирует пропозициональную логику отличную от классической пропозициональной логики (см. утверждение 2). Поэтому для

всяких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ логика, которая аксиоматизируется исчислением $GO(i, j)$ есть подструктурная логика в смысле, вероятно, близком к [5] и [6].

Доказаны следующие утверждения 3 и 4.

Утверждение 3. Для всяких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ логика, аксиоматизируемая исчислением $GO(i, j)$ является подлогикой логики, аксиоматизируемой исчислением $GO(1, 1)$.

Утверждение 4. Логика, аксиоматизируемая исчислением $GO(1, 1)$, равна множеству всех формул, доказуемых в исчислении совместимости предложений И.Е. Орлова.

Следствие утверждений 3 и 4. Для всяких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ логика, аксиоматизируемая исчислением $GO(i, j)$, включается во множество всех формул, доказуемых в исчислении совместимых предложений И.Е. Орлова, т.е. логика, аксиоматизируемая исчислением $GO(i, j)$, является подлогикой логики И.Е. Орлова.

Доказана теорема об устранимости сечения для $GO(1, 1)$.

Следствием этой теоремы и утверждения 3 является следующее утверждение 5.

Утверждение 5. Для всяких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ и всякой формулы A , не содержащей ни вхождений $\wedge$, ни вхождений $\vee$ верно следующее: $\rightarrow A$ доказуема в $GO(i, j)$ т.т.т. $\rightarrow A$ доказуема в $GO(1, 1)$.

Следствие утверждения 5. Для всяких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ импликативно-негативный фрагмент логики, аксиоматизируемой исчислением $GO(i, j)$, равен импликативно-негативному фрагменту логики, аксиоматизируемой исчислением $GO(1, 1)$.

Следствие утверждения 4. Импликативно-негативный фрагмент логики, аксиоматизируемой исчислением $GO(1, 1)$ равен импликативно-негативному фрагменту логики И.Е. Орлова (т.е. логики, аксиоматизируемой исчислением совместимости предложений)².

Из вышеприведённых следствий из утверждений 5 и 4 следует, что для всяких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ импликативно-негативный фрагмент логики, аксиоматизируемой исчислением $GO(i, j)$, равен импликативно-негативному фрагменту логики И.Е. Орлова.

² Конечно, в предположении унификации символики.

Литература

1. Орлов И.Е. Исчисления совместимости предложений // Математический сборник. Т. 35, Вып. 3-4. М., 1998.
2. Попов В.М. О разрешимости релевантной логики RAO // Модальные и интенциональные логики. М., 1998.
3. Попов В.М. О системе совместимости предложений И.Е. Орлова. Тбилиси, 1982.
4. Попов В.М. Система И.Е. Орлова и релевантная логика // Философские проблемы истории логики и методологии науки. М., 1986.
5. Dosen, K., Schraeder-Heister P. (eds.) Substructural logics. Oxford, 1993.
6. Restall G. Substructural logics. Stanford Encyclopedia of Philosophy. <http://plato.stanford.edu/entries/logic-substructural/>.