УДК 521.1

Возмущения первого порядка во вращении Земли, обусловленные гравитационными моментами со стороны Луны при высокоточном описании ее орбитального движения

© Ю.В. Баркин[1], М.Ю. Баркин[2, 3]

[1] ГАИШ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[3] Московский авиационный институт, Москва, 12599, Россия

На основе уравнений вращательного движения в переменных Андуайе для несферической Земли разрабатывается аналитическая теория вращательного движения (теория прецессии, нутации и вынужденных колебаний полюсов). Построены возмущения первого порядка во вращении планеты под действием гравитационных моментов со стороны Луны в условиях ее реальной орбиты, задаваемой высокоточной теорией EL 421. Вычисления, выполненные в эклиптической системе координат даты, представлены в форме, удобной для анализа.

Ключевые слова: *переменные действие-угол, невозмущенное движение Эйлера — Пуансо, задача Лиувилля, ряды Фурье, эллиптический интеграл.*

Введение. В предыдущих работах авторов изучалось вращательное движение Земли как изолированной планеты с изменяемой геометрией масс на основе специального подхода, учитывающего специальные формы канонических уравнений в переменных Андуайе и действие-угол (гамильтонов формализм) [1, 2]. Гравитационные моменты, действующие на несферическую Землю со стороны Луны, Солнца и планет при этом не учитывались. В рамках данного подхода можно обобщить выполненное исследование и в возмущающий гамильтониан задачи добавить силовую функцию гравитационного взаимодействия несферической Земли с Луной и другими небесными телами. Это позволяет построить новую теорию прецессии и нутации, поскольку в качестве невозмущенного вращательного движения Земли принимается не осевое вращение (вращение вокруг полярной оси инерции планеты), а коническое движение, подробно описанное в работе [1]. Следует отметить, что возмущения первого порядка, обусловленные наблюдаемыми вариациями тензора инерции Земли [1], и возмущения, обусловленные силовой функцией ньютоновского взаимодействия несферической Земли и Луны, в качестве которой мы принимаем вторую гармонику, имеют одинаковый порядок и характеризуются малым параметром $\mu \simeq 10^{-7}$. А это означает, что возмущения первого порядка для указанных возмущающих факторов могут быть вычислены отдельно в соответствии с принципом суперпозиции.

Разложение силовой функции в задаче о вращении Земли. Силовая функция в теории вращательного движения Земли определяется формулой для второй гармоники гравитационного потенциала [3]:

$$U = \frac{3}{2} n_0^2 (A - C) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left(\delta\alpha_2^2 + \alpha_3^2 \right), \tag{1}$$

где $n^2 = fm_S / a^3$; r — расстояние между центрами масс Земли и Луны; a — невозмущенное значение большой полуоси орбиты Луны; δ — динамический параметр, $\delta = (B - A)/(C - A) > 0$; A, B, C — главные центральные моменты инерции Земли, соответствующие ее главным центральным осям инерции $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$; α_2, α_3 —осинусы углов, образованных осями инерции $C\eta$ и $C\zeta$ с линией центров Земля — Луна. В переменных Андуайе эти направляющие косинусы определяются выражениями

$$\alpha_i = \left[c_{1i} \cos(\lambda - h) + c_{2i} \cos\rho \sin(\lambda - h) - c_{3i} \sin\rho \sin(\lambda - h) \right] \cos\varphi +$$

$$+ \left(c_{2i} \sin\rho + c_{3i} \cos\rho \right) \sin\varphi, \; i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

В выражениях (2)

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \cos g \cos l - \sin l \sin g \cos\theta; \\
c_{21} &= \sin g \cos l + \sin l \cos g \cos\theta; \\
c_{12} &= -\sin l \cos g - \cos l \sin g \cos\theta; \\
c_{22} &= -\sin l \sin g + \cos l \cos g \cos\theta; \\
c_{13} &= \sin g \sin\theta; \\
c_{23} &= -\cos g \sin\theta; \\
c_{31} &= \sin l \sin\theta; \\
c_{32} &= \cos l \sin\theta; \\
c_{33} &= \cos\theta
\end{aligned} \tag{3}$$

являются направляющими косинусами осей инерции планеты $C\xi$, $C\eta$ и $C\zeta$ в промежуточной системе координат Андуайе $CG_1G_2G_3$, связанной с вектором кинетического момента вращательного движения Земли $\mathbf{G}$. Ось CG_3 направлена вдоль вектора $\mathbf{G}$, оси CG_1 и CG_2 расположены в промежуточной плоскости Q, ортогональной вектору кинетического момента Земли, ось CG_1 направлена к восходящему узлу плоскости плоскости эклиптики даты на основной координатной плоскости эклиптики эпохи (какпринято в известной теории вращения твердой Земли Киношита [4]. Переменные ρ и h — наклон и долгота восходящего узла плоскости Q в основной эклиптической системе координат, θ — угол между полярной осью инерции Земли и вектором кинетического момента ее вращательного движения. Невозмущенное значение этого угла является малым и в приведеных исследованиях в соответствии с данными наблюдений принимается $\theta = 0,24''$.

В выражение силовой функции (3) сомножителями входят функции $\left(a/r\right)^3 \alpha_2^2$ и $\left(a/r\right)^3 \alpha_3^2$. Для этих функций получены следующие представления [3]:

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 \alpha_i^2 = \frac{1}{2}\left(c_{1i}^2 + c_{2i}^2 \cos^2\rho + c_{3i}^2 \sin^2\rho - c_{2i}c_{3i}\sin 2\rho\right)\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos^2\varphi\right\} + \\
+\left(c_{2i}^2 \sin^2\rho + c_{2i}c_{3i}\sin 2\rho + c_{3i}^2\cos^2\rho\right)\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2\varphi\right\} + \\
+\frac{1}{2}\left(c_{1i}^2 - c_{2i}^2\cos^2\rho - c_{3i}^2\sin^2\rho + c_{2i}c_{3i}\sin 2\rho\right)\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos^2\varphi\cos 2\left(\lambda - h\right)\right\} + \\
+\left(c_{1i}c_{2i}\cos\rho - c_{1i}c_{3i}\sin\rho\right)\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos^2\varphi\sin 2\left(\lambda - h\right)\right\} + \\
+2\left(c_{2i}c_{1i}\sin\rho + c_{1i}c_{3i}\cos\rho\right)\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin\varphi\cos\varphi\cos\left(\lambda - h\right)\right\} + \\
+\left[\left(c_{2i}^2 - c_{3i}^2\right)\sin 2\rho + 2c_{2i}c_{3i}\cos 2\rho\right]\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin\varphi\cos\varphi\sin\left(\lambda - h\right)\right\}.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Выражения в фигурных скобках зависят от сферических эклиптических координат гелиоцентрических координат Луны, которые в свою очередь представляются известными тригонометрическими рядами по кратным средних долгот планет. Эти ряды построены с учетом планетных возмущений в орбитальном движении Луны с высокой точностью [3].

Полученные данные представляют собой новые разложения функций (5.9), (5.10а), (5.10b), (5.11а) и (5.11b) (от сферических координат орбитального движения Луны r, φ и λ_m) из работы Киношита [4]. Разложения выполнены на интервале времени 1000AD-3000AD на основе долгосрочной численной эфемериды Луны LE-406 (система координат ICRF) и представлены в виде рядов Пуассона [3], [5]. Эти разложения, имеющие более общий вид, определяются более точными формулами по сравнению с рядами Киношита и учитывают новые эффекты в орбитальном движении Луны:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(1-3\sin^2\varphi\right)=\sum_{\nu}A_{\nu}^{(0)}\cos\Theta_{\nu}+a_{\nu}^{(0)}\sin\Theta_{\nu}; \qquad (5.1)\ (5)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos^2\varphi\cos 2\left(\lambda-h\right)=\sum_{\nu}A_{\nu}^{(2)}\cos\Theta_{\nu}+a_{\nu}^{(2)}\sin\Theta_{\nu}; \qquad (5.2)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos^2\varphi\sin 2\left(\lambda-h\right)=\sum_{\nu}B_{\nu}^{(2)}\sin\Theta_{\nu}+b_{\nu}^{(2)}\cos\Theta_{\nu}; \qquad (5.3)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\left(\lambda-h\right)=\sum_{\nu}A_{\nu}^{(1)}\cos\Theta_{\nu}+a_{\nu}^{(1)}\sin\Theta_{\nu}; \qquad (5.4)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin\varphi\cos\varphi\cos\left(\lambda-h\right)=\sum_{\nu}B_{\nu}^{(1)}\sin\Theta_{\nu}+b_{\nu}^{(1)}\cos\Theta_{\nu}. \qquad (5.5)$$

В выражениях (5) Θ_{ν} — любые линейные комбинации классических аргументов теории орбитального движения Луны,

$$\Theta_{\nu}=\nu_1 l+\nu_2 l'+\nu_3 F+\nu_4 D+\nu_5\left(\Omega-h\right), \qquad (6)$$

Здесь $\nu=(\nu_1,\nu_2,\ ...,\ \nu_5)$ — целочисленные коэффициенты; l, l', F, D, Ω — аргументы Делоне и средняя долгота восходящего узла орбиты Луны, определяемые, соответственно, выражениями (3.5.b) и (3.4.b.3) из работ [3], [5].

Коэффициенты рядов (5), (6):

$$A_{\nu}^{(j)},\ B_{\nu}^{(j)}\ \text{и}\ a_{\nu}^{(j)},\ b_{\nu}^{(j)} \qquad (7)$$

с высокой точностью представлены квадратичными функциями времени и учитывают вековые планетные возмущения в орбитальном движении Луны [3], [5]:

$$\mathrm{A}_{\nu}^{(j)}=\mathrm{A}_{\nu;0}^{(j)}+\mathrm{A}_{\nu;1}^{(j)}t+\mathrm{A}_{\nu;2}^{(j)}t^2,$$

где

$$\mathcal{A} = (A,\ B,\ a,\ b), \quad j = (0,\ 1,\ 2). \tag{8}$$

Фундаментальная постоянная $fm_E = 398\ 600{,}5 \cdot 10^9$ м^3/с^2. Значение большой полуоси $a = 383\ 397\ 772{,}5$ м было принято при построении рядов Пуассона (5), (6). Для фундаментальной частоты $n_0 = \sqrt{fm_E}\, a^{-3/2}$ и для значений частот орбитального движения Луны n_Ω, n_F, входящих сомножителями при времени в выражениях аргументов теории орбитального движения Луны, имеем следующие численные значения:

$$n_0 = 17\ 311\ 058''6\ 854\ 464 \text{ ед./год};$$

$$n_\Omega = -69\ 679''193\ 631 \text{ ед./год};$$

$$n_F = 17\ 395\ 272''628\ 478 \text{ ед./год},$$

Как и в теории физической либрации Луны [3] за начальный момент времени принимаем юлианскую дату J2000.0 (JED2451545.0).

В рядах Пуассона (5), (6) коэффициенты

$$A_{\nu;n}^{(j)},\ a_{\nu;n}^{(j)}\ \left(j = 0,1,2\right) \text{ и } B_{\nu;n}^{(j)},\ b_{\nu;n}^{(j)}\ \left(j = 1,2\right) \tag{9}$$

представляют собой численные коэффициенты (амплитуды) $(j = 0,1,2;\ n = 0,1,2)$.

Ниже приведены [3], данные коэффициенты, умноженные на соответствующую степень, для каждой из пяти шаровых функций (5.1) – (5.5):

$$\begin{gathered} A_{\nu;0}^{(j)},\ a_{\nu;0}^{(j)}\ \left(j = 0,1,2\right),\ B_{\nu;0}^{(j)},\ b_{\nu;0}^{(j)},\ j = 1,\ 2\ \ (10^7); \\ A_{\nu;1}^{(j)},\ a_{\nu;1}^{(j)}\ \left(j = 0,1,2\right),\ B_{\nu;1}^{(j)},\ b_{\nu;1}^{(j)},\ j = 1,\ 2\ \ (10^8); \\ A_{\nu;2}^{(j)},\ a_{\nu;2}^{(j)}\ \left(j = 0,\ 1,\ 2\right),\ B_{\nu;2}^{(j)},\ b_{\nu;2}^{(j)},\ j = 1,\ 2\ \ (10^9). \end{gathered} \tag{10}$$

В первом столбце указан номер наборов коэффициентов, в последующих пяти столбцах по строкам приведены наборы пяти целочисленных индексов $\nu = \left(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5\right)$ — коэффициентов в линейных комбинациях классических аргументов теории орбитального движения Луны (6). В седьмом столбце указаны значения периодов (в сутках) соответствующих возмущений или тригонометрических слагаемых разложений (при условии, что пренебрегаются вековые квадратичные изменения аргументов со временем). Здесь не приводятся таблицы указанных значений коэффициентов из разложений (9), (10), (11). Отметим лишь, что для этих разложений получены таблицы значений коэффициентов (5.1) для 286 наборов индексов аргументов $\Theta_\nu = \nu_1 l + \nu_2 l' + \nu_3 F + \nu_4 D + \nu_5 \Omega$, в разложении (5.2) — для 336 наборов, в разложении (5.3) — для 332 наборов аргументов, в разложении (5.4) — для 525 наборов индексов аргументов и, наконец, в разложении (5.5) — для 526 аргументов Θ_ν.

После громоздких преобразований на основе формул (1)–(7) получаем окончательное тригонометрическое разложение второй гармоники силовой функции задачи:

$$
\begin{aligned}
U = \frac{3}{2} n_0^2 (A - C) \Big\{ & N_0 \sum_\nu \left[R_{0,\nu}(\rho, t) \cos \Theta_\nu + r_{0,\nu}(\rho, t) \sin \Theta_\nu \right] + \\
& + \sum_\mu N_{0,2\mu} \sum_\nu \left[R_{0,\nu}(\rho, t) \cos\left(\Theta_\nu - 2\mu l\right) - r_{0,\nu}(\rho, t) \sin\left(\Theta_\nu - 2\mu l\right) \right] + \\
& + N_{1,0} \sum_\varepsilon \sum_\nu \left[R_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho, t) \cos\left(g - \varepsilon \Theta_\nu\right) + r_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho, t) \sin\left(g - \varepsilon \Theta_\nu\right) \right] + \\
& + N_{2,0} \sum_\varepsilon \sum_\nu \left[R_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho, t) \cos\left(2g - \varepsilon \Theta_\nu\right) + r_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho, t) \sin\left(2g - \varepsilon \Theta_\nu\right) \right] + \\
& + \sum_\mu N_{1,\mu} \sum_\varepsilon \sum_\nu \Big[R_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho, t) \cos\left(g - \varepsilon \Theta_\nu + 2\mu l\right) + \\
& \qquad + r_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho, t) \sin\left(g - \varepsilon \Theta_\nu + 2\mu l\right) \Big] + \\
& + \sum_\mu N_{2,\mu} \sum_\varepsilon \sum_\nu \Big[R_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho, t) \cos\left(2g - \varepsilon \Theta_\nu + 2\mu l\right) + \\
& \qquad + r_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho, t) \sin\left(2g - \varepsilon \Theta_\nu + 2\mu l\right) \Big] \Big\}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Коэффициенты $N_{n,m}(\theta)$ и функции наклона $R_{n,m}(\rho)$, $r_{n,m}(\rho)$ при тригонометрических функциях в разложении (11) являются углов наклона θ и ρ. Они определяются последовательностью формул:

$$
\begin{aligned}
& N_0 = (2 + \delta)\left(2 - 3\sin^2\theta\right); \quad N_{1,0} = \frac{1}{4}(2 - \delta)\sin 2\theta; \\
& N_{2,0} = \frac{1}{4}(\delta - 2)\sin^2\theta; \quad N_{0,2} = -\frac{3}{4}\delta \sin^2\theta; \\
& N_{1,\mu} = -\frac{1}{4}\delta \sin\theta\left(\mu + \cos\theta\right); \quad N_{2,\mu} = -\frac{1}{8}\mu\delta\cos\theta\left(1 + \mu\cos\theta\right)^2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Для функций наклона запишем следующие представления:

$$R_{0,\nu}(\rho,t) = -\frac{1}{6}\left(3\cos^2\rho - 1\right)A_\nu^{(0)} - \frac{1}{2}\sin 2\rho A_\nu^{(1)} - \frac{1}{4}\sin^2\rho A_\nu^{(2)};$$

$$r_{0,\nu}(\rho,t) = -\frac{1}{6}\left(3\cos^2\rho - 1\right)a_\nu^{(0)} - \frac{1}{2}\sin 2\rho a_\nu^{(1)} - \frac{1}{4}\sin^2\rho a_\nu^{(2)};$$

$$R_{1,\nu}^{(\varepsilon)} = \sin 2\rho\left(A_\nu^{(0)} - \frac{1}{2}A_\nu^{(2)}\right) - 2\cos 2\rho A_\nu^{(1)} + 2\varepsilon\cos\rho B_\nu^{(1)} - \varepsilon\sin\rho B_\nu^{(2)};$$

$$r_{1,\nu}^{(\varepsilon)} = 2\cos\rho b_\nu^{(1)} - \sin\rho b_\nu^{(2)} - \varepsilon\sin 2\rho\left(a_\nu^{(0)} - \frac{1}{2}a_\nu^{(2)}\right) + 2\varepsilon\cos 2\rho a_\nu^{(1)};$$

$$R_{2,\nu}^{(\varepsilon)} = A_\nu^{(2)} + \sin^2\rho\left(A_\nu^{(0)} - \frac{1}{2}A_\nu^{(2)}\right) - \sin 2\rho A_\nu^{(1)} + 2\varepsilon\sin\rho B_\nu^{(1)} + \varepsilon\cos\rho B_\nu^{(2)};$$

$$r_{2,\nu}^{(\varepsilon)} = 2\sin\rho b_\nu^{(1)} + \cos\rho b_\nu^{(2)} - \varepsilon a_\nu^{(2)} - \varepsilon\sin^2\rho\left(a_\nu^{(0)} - \frac{1}{2}a_\nu^{(2)}\right) + \varepsilon\sin 2\rho a_\nu^{(1)}$$

$$(\varepsilon = \pm 1). \tag{13}$$

Полученное разложение силовой функции задачи (11)–(13) обобщает аналогичное разложение из работы Киношита [4].

Возмущения первого порядка во вращательном движении Земли в переменных Андуайе.

Уравнения вращательного движения твердой Земли под действием гравитационного притяжения Луны имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial g};\\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{2}G\sin\theta\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sin 2l + \frac{1}{G}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial g} - \frac{1}{G}\operatorname{cosec}\theta\frac{\partial U}{\partial l};\\
\frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{G}\operatorname{ctg}\rho\frac{\partial U}{\partial g} - \frac{1}{G}\operatorname{cosec}\rho\frac{\partial U}{\partial h};\\
\frac{dl}{dt} &= -G\cos\theta\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right) + \frac{1}{G}\operatorname{cosec}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta};\\
\frac{dg}{dt} &= G\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right) - \frac{1}{G}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta} - \frac{1}{G}\operatorname{ctg}\rho\frac{\partial U}{\partial\rho};\\
\frac{dh}{dt} &= \frac{1}{G}\operatorname{cosec}\rho\frac{\partial U}{\partial\rho},
\end{aligned} \tag{14}$$

где силовая функция задачи определяется разложением (11)–(13).

Уравнения (14) легко приводятся к стандартному виду уравнений многочастотных колебательных систем, содержащих малый параметр (или несколько малых параметров). В качестве таких малых параметров принимаются обычно малые динамические сжатия эллипсоида инерции Земли или коэффициенты второй гармоники геопотенциала J_2, C_{22}.

В отличие от теории Киношита в данной работе принимается более общее невозмущенное вращательное движение Земли, а именно равномерное осевое вращение планеты и коническое чандлеровское движение вектора кинетического момента относительно полярной оси инерции (конус с углом полураствора $\theta = 0,24''$). Период движения полюса твердой осесимметричной Земли составляет около 305 сут. Однако это движение (и уравнения враща-тельного движения) легко обобщается на случай Земли с упругой мантией и период блуждания полюса относительно полярной оси инерции уже будет составлять 432 сут. [2], как и для чандлеровского движения полюса.

Таким образом, невозмущенное вращательное движение рассматриваемой модели Земли определяется простыми формулами:

$$l = n_l t + l_0;\ \ g = n_g t + g_0;\ \ h = h_0;\ \ \theta = 0,24'';\ \ \rho = \rho_0 = -23°45. \quad (15)$$

Отметим, что указанные переменные Андуайе определяют движение вектора кинетического момента по отношению к главным центральным осям инерции Земли (средним осям); n_g, n_l — невозмущенные (постоянные) значения частот эйлеровского — чандлеровского движения [2].

Для основных параметров задачи можно принять следующие значения [2]. Экваториальный радиус Земли 637 8140 м, $I = C/mr_0^2$ — безразмерный момент инерции. Коэффициенты второй гармоники геопотенциала: $J_2 = 1082,6265 \cdot 10^{-6}$, $C_{22} = 1,81537 \cdot 10^{-6}$. Параметр $\delta = 4C_{22}/(J_2 + 2C_{22}) = 0,668479 \cdot 10^{-2}$.

Согласно рассматриваемому методу построения приближенного решения задачи для возмущений первого порядка, имеем простые квадратуры:

$$\begin{gathered}
G_1 = \int \frac{\partial U}{\partial g} dt; \\
\theta_1 = \frac{1}{G} \operatorname{ctg}\theta \int \frac{\partial U}{\partial g} dt - \frac{1}{G} \operatorname{cosec}\theta \int \frac{\partial U}{\partial l} dt; \\
\rho_1 = \frac{1}{G} \operatorname{ctg}\rho \int \frac{\partial U}{\partial g} dt - \frac{1}{G} \operatorname{cosec}\rho \int \frac{\partial U}{\partial h} dt; \\
l_1 = \frac{1}{G} \operatorname{cosec}\theta \int \frac{\partial U}{\partial \theta} dt; \\
g_1 = -\frac{1}{G} \operatorname{ctg}\theta \int \frac{\partial U}{\partial \theta} dt - \frac{1}{G} \operatorname{ctg}\rho \int \frac{\partial U}{\partial \rho} dt; \\
h_1 = \frac{1}{G} \operatorname{cosec}\rho \int \frac{\partial U}{\partial \rho} dt.
\end{gathered} \quad (16)$$

Отметим, что в подынтегральных выражениях и в правых частях (уравнений) (16) переменные Андуайе принимают невозмущенные значения (15). Постоянные интегрирования определяются сответствующими начальными условиями задачи, которые для краткости не рассматриваются.

Возмущения первого порядка переменных Андуайе. В результате подстановки в подынтегральные выражения в (18) невозмущенных значений переменных Андуайе (17) вычисление интегралов сводится к интегрированию известных тригонометрических функций времени. Поэтому, опуская довольно громоздкие преобразования, приведем окончательные формулы для возмущений первого порядка, обусловленных гравитационным притяжением Луны при ее сложном орбитальном движении (второй гармоникой). Для простоты в выражениях коэффициентов A (8) сохраним лишь их постоянные слагаемые (из общего разложния силовой функции) и примем постоянные значения коэффициентов геопотенциала, J_2 и C_{22}, которые связаны с соответствующими разностями главных центральных моментов инерции A, B, C известными формулами:

$$J_2 = \frac{2C - A - B}{2m_0 r_0^2}; \; C_{22} = \frac{B - A}{4m_0 r_0^2}, \tag{17}$$

где m_0, r_0 — масса средний радиус Земли.

Запишем ряд формул, определяющих возмущения первого порядка переменных Андуайе (G, ρ, θ, l, h):)

$$\begin{gathered}
\frac{G_1}{G} = -\frac{3}{4}\frac{n_0}{I\omega}\left(J_2 + 2C_{22}\right)n_0 \times \\
\times\left\{N_{1,0}\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g - \varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(g - \varepsilon\Theta_\nu\right) + \frac{r_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g - \varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(g - \varepsilon\Theta_\nu\right)\right] + \right. \\
+\sum_{\mu} N_{1,\mu}\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g - \varepsilon\Omega_\nu + 2\mu n_l}\cos\left(g - \varepsilon\Theta_\nu + 2\mu l\right) + \right. \\
\left. + \frac{r_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g - \varepsilon\Omega_\nu + 2\mu n_l}\sin\left(g - \varepsilon\Theta_\nu + 2\mu l\right)\right] + \\
+2\sum_{\mu} N_{2,\mu}\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g - \varepsilon\Omega_\nu + 2\mu n_l}\cos\left(2g - \varepsilon\Theta_\nu + 2\mu l\right) + \right. \\
\left.\left. + \frac{r_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g - \varepsilon\Omega_\nu + 2\mu n_l}\sin\left(2g - \varepsilon\Theta_\nu + 2\mu l\right)\right]\right\};
\end{gathered} \tag{18}$$

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 = -\frac{3}{4}\frac{n_0}{I\omega}\left(J_2 + 2C_{22}\right) n \times \\
&\times\left\{ -N_0(\theta)\csc\rho \sum_{\nu} \nu_5 \left[\frac{R_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu}\cos\Theta_\nu + \frac{r_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu}\sin\Theta_\nu \right] + \right. \\
&+ N_{0,2}(\theta)\csc\rho \sum_{\mu}\sum_{\nu} \nu_5 \left[\frac{R_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu - 2\mu n_l}\cos\left(\Theta_\nu - 2\mu l\right) + \right. \\
&\left. + \frac{r_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu - 2\mu n_l}\sin\left(\Theta_\nu - 2\mu l\right) \right] + N_{1,0}\csc\rho \sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left(\cos\rho + \varepsilon\nu_5\right) \times \\
&\times \left[\frac{R_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g - \varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(g - \varepsilon\Theta_\nu\right) + \frac{r_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g - \varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(g - \varepsilon\Theta_\nu\right) \right] + \\
&+ N_{2,0}\csc\rho \sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left(2\cos\rho + \varepsilon\nu_5\right) \times \\
&\times \left[\frac{R_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g - \varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(2g - \varepsilon\Theta_\nu\right) + \frac{r_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g - \varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(2g - \varepsilon\Theta_\nu\right) \right] + \qquad (19) \\
&+ \sum_{\mu} N_{1,\mu}\csc\rho \sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left(\cos\rho + \varepsilon\nu_5\right) \times \\
&\times \left[\frac{R_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g - \varepsilon\Omega_\nu + 2\mu n_l}\cos\left(g - \varepsilon\Theta_\nu + 2\mu l\right) + \right. \\
&\left. + \frac{r_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g - \varepsilon\Omega_\nu + 2\mu n_l}\sin\left(g - \varepsilon\Theta_\nu + 2\mu l\right) \right] + \\
&+ \sum_{\mu} N_{2,\mu}\csc\rho \sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left(2\cos\rho + \varepsilon\nu_5\right) \times \\
&\times \left[\frac{R_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g - \varepsilon\Omega_\nu + 2\mu n_l}\cos\left(2g - \varepsilon\Theta_\nu + 2\mu l\right) + \right. \\
&\left.\left. + \frac{r_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g - \varepsilon\Omega_\nu + 2\mu n_l}\sin\left(2g - \varepsilon\Theta_\nu + 2\mu l\right) \right] \right\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_1 = & -\frac{3}{4}\frac{n_0}{I\omega}\left(J_2+2C_{22}\right)n_0 \times \\
& \times\left\{\cot\theta N_{1,0}\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{1,\boldsymbol{\nu}}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(g-\varepsilon\Theta_\nu\right)+\frac{r_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(g-\varepsilon\Theta_\nu\right)\right]+\right. \\
& +2\cot\theta N_{2,0}\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu\right)+\frac{r_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu\right)\right]- \\
& -2\csc\theta N_{0,2}(\theta)\sum_{\mu}\sum_{\nu}\mu\left[\frac{R_{0,\nu}(\rho,t)}{-\Omega_\nu+2\mu n_l}\cos\left(\Theta_{\boldsymbol{\nu}}-2\mu l\right)+\right. \\
& \left.+\frac{r_{0,\mu}(\rho,t)}{-\Omega_\nu+2\mu n_l}\sin\left(\Theta_\nu-2\mu l\right)\right]+ \\
& +\sum_{\mu}\left(\cot\theta-2\mu\csc\theta\right)N_{1,\mu}\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{1,\boldsymbol{\nu}}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\cos\left(g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)+\right. \\
& \left.+\frac{r_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_{\boldsymbol{\nu}}+2\mu n_l}\sin\left(g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)\right]+ \\
& +2\sum_{\mu}\left(\cot\theta-\mu\csc\theta\right)N_{2,\mu}\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\cos\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)+\right. \\
& \left.+\frac{r_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\sin\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)\right];
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
l_1 = & -\frac{3}{4}\frac{n_0}{I\omega\sin\theta}\left(J_2+2C_{22}\right)n_0 \times \\
& \times\left\{N_0'(\theta)\sum_{\nu}\left[\frac{R_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu}\sin\Theta_\nu-\frac{r_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu}\cos\Theta_\nu\right]+\right. \\
& +N_{1,0}'(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(g-\varepsilon\Theta_\nu\right)-\frac{R_{1,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(g-\varepsilon\Theta_\nu\right)\right]+ \\
& +N_{2,0}'(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu\right)-\frac{r_{2,\nu}^{(\varepsilon)}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu\right)\right]+ \\
& +N_{0,2}'(\theta)\sum_{\mu}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu-2\mu n_l}\sin\left(\Theta_\nu-2\mu l\right)-\frac{r_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu-2\mu n_l}\cos\left(\Theta_\nu-2\mu l\right)\right]+
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\mu} N'_{1,\mu}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\sin\left(g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)-\right.\\
&\left.-\frac{r^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\cos\left(g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)\right]+\\
&+\sum_{\mu} N'_{2,\mu}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\sin\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)-\right.\\
&\left.\left.-\frac{r^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\cos\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)\right]\right\};
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
g_1=\frac{3}{4}\frac{n_0}{I\omega}\left(J_2+2C_{22}\right)n_0\times
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left\{\cot\theta N'_0(\theta)\sum_{\nu}\left[\frac{R_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu}\sin\Theta_\nu-\frac{r_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu}\cos\Theta_\nu\right]+\right.\\
&+\cot\rho N_0(\theta)\sum_{\nu}\left[\frac{R'_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu}\sin\Theta_\nu-\frac{r'_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu}\cos\Theta_\nu\right]+\\
&+\cot\theta N'_{1,0}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(g-\varepsilon\Theta_\nu\right)-\right.\\
&\left.-\frac{r^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(g-\varepsilon\Theta_\nu\right)\right]+\\
&+\cot\rho N_{1,0}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R'^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(g-\varepsilon\Theta_\nu\right)-\frac{r'^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega\nu}\cos\left(g-\varepsilon\Theta_\nu\right)\right]+\\
&+\cot\theta N'_{2,0}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu\right)-\right.\\
&\left.-\frac{r^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu\right)\right]+\\
&+\cot\rho N_{2,0}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R'^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu\right)-\right.\\
&\left.-\frac{r'^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu\right)\right]+
\end{aligned}
$$

$$+\cot\theta N'_{0,2}(\theta)\sum_{\mu}\sum_{\nu}\left[\frac{R_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu-2\mu n_l}\sin\left(\Theta_{\boldsymbol{\nu}}-2\mu l\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{r_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu-2\mu n_l}\cos\left(\Theta_\nu-2\mu l\right)\right]+$$

$$+\cot\rho N_{0,2}(\theta)\sum_{\mu}\sum_{\nu}\left[\frac{R'_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu-2\mu n_l}\sin\left(\Theta_\nu-2\mu l\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{r'_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu-2\mu n_l}\cos\left(\Theta_\nu-2\mu l\right)\right]+$$

$$+\sum_{\mu}\cot\theta N'_{1,\mu}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\sin\left(g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{r^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\cos\left(g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)\right]+$$

$$+\sum_{\mu}\cot\rho N_{1,\mu}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R'^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\sin\left(g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)-\right. \tag{22}$$

$$\left.-\frac{r'^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\cos\left(g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)\right]+$$

$$+\sum_{\mu}\cot\theta N'_{2,\mu}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\sin\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{r^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\cos\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)\right]+$$

$$+\sum_{\mu}\cot\rho N_{2,\mu}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R'^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\sin\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{r'^{(\varepsilon)}_{2,\boldsymbol{\nu}}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_{\boldsymbol{\nu}}+2\mu n_l}\cos\left(2g-\varepsilon\Theta_{\boldsymbol{\nu}}+2\mu l\right)\right],$$

$$h_1 = -\frac{3}{4}\frac{n_0}{I\omega\sin\rho}\left(J_2 + 2C_{22}\right)n_0 \times$$

$$\times\left\{N_0(\theta)\sum_{\nu}\left[\frac{R'_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu}\sin\Theta_\nu - \frac{r'_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu}\cos\Theta\nu\right]+\right.$$

$$+N_{1,0}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R'^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(g-\varepsilon\Theta_\nu\right) - \frac{r'^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(g-\varepsilon\Theta_\nu\right)\right]+$$

$$+N_{2,0}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R'^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\sin\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu\right) - \frac{r'^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu}\cos\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu\right)\right]+$$

$$+N_{0,2}(\theta)\sum_{\mu}\sum_{\nu}\left[\frac{R'_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu-2\mu n_l}\sin\left(\Theta_\nu-2\mu l\right) - \frac{r'_{0,\nu}(\rho,t)}{\Omega_\nu-2\mu n_l}\cos\left(\Theta_\nu-2\mu l\right)\right]+$$

$$+\sum_{\mu}N_{1,\mu}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R'^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\sin\left(g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)+\right.$$

$$\left.-\frac{r'^{(\varepsilon)}_{1,\nu}(\rho,t)}{n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\cos\left(g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)\right]+$$

$$+\sum_{\mu}N_{2,\mu}(\theta)\sum_{\varepsilon}\sum_{\nu}\left[\frac{R'^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\sin\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{r'^{(\varepsilon)}_{2,\nu}(\rho,t)}{2n_g-\varepsilon\Omega_\nu+2\mu n_l}\cos\left(2g-\varepsilon\Theta_\nu+2\mu l\right)\right]\right\}. \tag{23}$$

Суммирование в формулах (18)–(23) осуществляется по всем значениям индексов $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_5)$ из разложений (5), (6) и по двум вспомогательным индексам: $\varepsilon = \pm 1$ и $\mu = \pm 1$. Здесь все аргументы тригонометрических функций являются известными линейными функциями времени. Переменные l, g, h принимают свои невозмущенные значения (15). Коэффициенты $\mathrm{N}_{n,m}(\theta)$ и функции наклона $R_{n,m}(\rho)$, а также их производные $N'_{n,m}(\theta)$ и $R'_{n,m}(\rho)$ по переменным Андуайе θ и ρ при тригонометрических функциях в формулах для возмущений (18)–(23) являются постоянными. Их можно вычислить при постоянных значениях соответствующих углов

$\theta=\theta_0$ и $\rho=\rho_0$ (они определяются последовательностью формул (12) и (13).

Первые производные данных коэффициентов определяют по формулам:

$$
\begin{gathered}
N_0'(\theta)=-3(2+\delta)\sin 2\theta;\ \ N_{1,0}'(\theta)=\frac{1}{2}(2-\delta)\cos 2\theta;\\
N_{2,0}'(\theta)=\frac{1}{4}(\delta-2)\sin 2\theta;\ N_{0,2}'(\theta)=-\frac{3}{4}\delta\sin 2\theta;\\
N_{1,\mu}'(\theta)=-\frac{1}{4}\delta\left(\mu\cos\theta+\cos 2\theta\right);\\
N_{2,\mu}'(\theta)=\frac{1}{8}\mu\delta\sin\theta\left(1+\mu\cos\theta\right)\left(1+3\mu\cos\theta\right).
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Для их производных по наклонности ρ получены следующие формулы:

$$
R_{0,\nu}'(\rho,t)=\frac{1}{2}\sin 2\rho\left(A_\nu^{(0)}-\frac{1}{2}A_\nu^{(2)}\right)-\cos 2\rho A_\nu^{(1)};
$$

$$
r_{0,\nu}'(\rho,t)=\frac{1}{2}\sin 2\rho\left(a_\nu^{(0)}-\frac{1}{2}a_\nu^{(2)}\right)-\cos 2\rho a_\nu^{(1)};
$$

$$
R_{1,\nu}'^{(\varepsilon)}(\rho,t)=2\cos 2\rho\left(A_\nu^{(0)}-\frac{1}{2}A_\nu^{(2)}\right)+4\sin 2\rho A_\nu^{(1)}-2\varepsilon\sin\rho B_\nu^{(1)}-\varepsilon\cos\rho B_\nu^{(2)};
$$

$$
r_{1,\nu}'^{(\varepsilon)}(\rho,t)=-2\sin\rho b_\nu^{(1)}-\cos\rho b_\nu^{(2)}-2\varepsilon\cos 2\rho\left(a_\nu^{(0)}-\frac{1}{2}a_\nu^{(2)}\right)-4\varepsilon\sin 2\rho a_\nu^{(1)};
$$

$$
R_{2,\nu}'^{(\varepsilon)}(\rho,t)=\sin 2\rho\left(A_\nu^{(0)}-\frac{1}{2}A_\nu^{(2)}\right)-2\cos 2\rho A_\nu^{(1)}+2\varepsilon\cos\rho B_\nu^{(1)}-\varepsilon\sin\rho B_\nu^{(2)};
$$

$$
r_{2,\nu}'^{(\varepsilon)}(\rho,t)=2\cos\rho b_\nu^{(1)}-\sin\rho b_\nu^{(2)}-\varepsilon\sin 2\rho\left(a_\nu^{(0)}-\frac{1}{2}a_\nu^{(2)}\right)+2\varepsilon\cos 2\rho a_\nu^{(1)}.
$$

$$(\varepsilon=\pm 1).$$

В формулах для возмущений (18)–(23) $\Omega_\nu=\nu_1 n_M+\nu_2 n_S+\nu_3 n_F+$ $+\nu_4 n_D+\nu_5 n_\Omega$ — комбинации частот основных аргументов теории орбитального движения Луны, n_g, n_l — частоты невозмущенного эйлеровского движения.

В теории вращения Земли [4] получены вспомогательные разложения определенных функций сферических геоцентрических координат Луны: формулы (5.9)–(5.11b), а квадратичные слагаемые относительно времени с коэффициентами $A_{\nu;2}^{(j)}$, $a_{\nu;2}^{(j)}$, $\left(j=0,1,2\right)$ и $B_{\nu;2}^{(j)}$,

$b_{\nu;2}^{(j)}\ \left(j=1,2\right)$ вообще не рассматриваются. В настоящей работе также не используются упрощающие предположения Киношита, касающихся полноты учета вековых орбитальных возмущений Луны [4].

Процедура вычисления и табулирования амплитуд, периодов и наборов аргументов для возмущений первого порядка всех переменных Андуайе является весьма емкой, хотя принципиальных трудностей не вызывает и будет рассмотрена в следующей работе авторов.

Заключение. Построены возмущения первого порядка во вращательном движении несферической Земли непосредственно в переменных Андуайе. В качестве базовых использованы уравнения движения в переменных Андуайе, в которых учтены вторая гармоника силовой функции при высокоточном описании орбитального движения Земли и Луны. Приближенное решение задачи о вращении Земли построено с помощью метода малого параметра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Баркин М.Ю. *Изучение возмущенных вращательных движений небесного тела с приложением к теории вращения Земли.* Дис. … канд. физ.-мат. наук. Москва, 2014, с. 154.

[2] Barkin Yu.V. (2000) Perturbated rotational motion of weakly deformable celestial bodies. *Astronomical and Astrophysical Transactions*, 2000, vol. 19, issue 1, pp. 19–65. DOI: 10.1080/10556790008241350.

[3] Barkin Yu.V., Kudrjavtsev C.M., Barkin M.Yu. Perturbations of the first order of the Moon rotation. *Proceedings of International Conference “Astronomy and World Heritage: across Time and Continents”.* Kazan, 2000, 19–24 August. KSU, pp. 161–164.

[4] Kinoshita H. Theory of Rotation of the Rigid Earth. *Celest. Mech*., 1977, vol. 15, pp.277–326.

[5] Kudryavtsev S.M. Long-term harmonic development of lunar ephemeris. *Astronomy & Astrophysics*. A&A 471, 1069–1075. DOI: 10.1051/0004-6361:20077568.

Статья поступила в редакцию 29.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Баркин Ю.В., Баркин М.Ю. Возмущения первого порядка во вращении Земли, обусловленные гравитационными моментами со стороны Луны при высокоточном описании ее орбительного движения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 12.

URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/hidden/1337.html

Баркин Юрий Владимирович — д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник ГАИШ МГУ им. М.В. Ломоносова. Область научных интересов: теоретическая механика, небесная механика. e-mail: barkin@inbox.ru

Баркин Михаил Юрьевич — ассистент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, ассистент кафедры «Теоретическая механика» Московского авиационного института. Область научных интересов: теоретическая механика, небесная механика. e-mail: barkin@yandex.ru

First-order perturbation in the rotation of the Earth caused by the gravitational moments from the Moon when describing the precision of its orbital motion

© Yu.V. Barkin[1], M.Yu. Barkin[2,3]

[1] Sternberg SAI, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia
[2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[3] Moscow Aviation Institute, Moscow, 12599, Russia

The article presents the analytical theory of a rotary motion (the theory of a precession, nutation and the compelled fluctuations of poles) developed for non-spherical Earth on the basis of the equations of a rotary motion in Anduaye's variables. We constructed perturbation of the first order in rotation of the planet under the influence of the gravitational moments from the Moon in the conditions of its real orbit set by the high-precision theory of EL 421. All calculations are executed in ecliptic system of coordinates of date and presented in the form convenient for the analysis. Tabulation of perturbations for all variables of Anduaye is executed.

Keywords: *action-angle variable, Liouville problem, Fourier series, elliptic integral.*

REFERENCES

[1] Barkin M.Yu. *Izuchenie vozmuschennykh vraschatelnykh dvizheniy nebesnogo tela s prilozheniem k teorii vrascheniya Zemli* [Study of perturbed rotational motions of the heavenly bodies with application to the theory of the Earth's rotation]. Ph.D. Thesis (Phys.&Math.). Moscow, 2014, pp. 154.

[2] Barkin Yu.V. Perturbated rotational motion of weakly deformable celestial bodies. *Astronomical and Astrophysical Transactions*, 2000, vol. 19, issue 1, pp. 19–65. DOI**:** 10.1080/10556790008241350.

[3] Barkin Yu.V., Kudrjavtsev C.M., Barkin M.Yu. Perturbations of the first order of the Moon rotation. *Proceedings of International Conference "Astronomy and World Heritage: across Time and Continents"*. Kazan, 2000, 19–24 August. KSU, pp. 161–164.

[4] Kinoshita H. Theory of Rotation of the Rigid Earth. *Celest. Mech*., 1977, vol. 15, pp.277–326.

[5] Kudryavtsev S.M. Long-term harmonic development of lunar ephemeris. *Astronomy & Astrophysics*. A&A 471, 1069–1075. DOI: 10.1051/0004-6361:20077568.

Barkin Yu.V., Dr. Sci. (Phys.&Math.), professor, leading researcher in Sternberg Astronomical Institute at Lomonosov Moscow State University. Sphere of scientific interests includes theoretical mechanics, celestial mechanics. e-mail: barkin@inbox.ru

Barkin M.Yu., assistant lecturer of the Theoretical Mechanics Department in Bauman Moscow State Technical University, assistant lecturer of the Theoretical Mechanics Department in the Moscow Aviation Institute (Technical University). Sphere of scientific interests includes theoretical mechanics, celestial mechanics. e-mail: barkin@yandex.ru