Отзыв
научного руководителя
на диссертацию С.М. Теплякова
“Верхние оценки в задаче Эрдеша–Хайнала
и ее обобщениях”,
представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация С.М. Теплякова посвящена одной из классических проблем в экстремальной комбинаторике — проблеме Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов.

В 1961 году Эрдеш и Хайнал заметили, что если у n-однородного гиперграфа не больше чем 2^{n-1} ребер, то его хроматическое число равно двум. Можно сказать, что это своего рода достаточный признак двудольности гиперграфа. Несложно доказывается и необходимый признак, а именно бывают n-однородные гиперграфы с C_{2n-1}^{n} ребрами и хроматическим числом больше двойки. Однако зазор между оценками экспоненциален и встает вопрос: каково минимальное число $m(n)$, для которого существует n-однородный гиперграф с $m(n)$ ребрами и хроматическим числом 3 и выше? Сейчас известно, что

$$0.17\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} 2^n \le m(n) \le (1+o(1))\frac{e\ln 2}{4}n^2 2^n, \tag{1}$$

т.е. зазор уже не экспоненциальный, а полиномиальный.

Важным вариантом классической постановки задачи Эрдеша–Хайнала является вопрос о такой раскраске вершин гиперграфа в два цвета, при которой в каждом ребре разность чисел вершин первого и второго цвета мала по модулю. Это классическая задача об уклонении.

Естественная серия проблем, связывающих обе упомянутые выше задачи, состоит в отыскании для каждой пары чисел k, n с $k \le \frac{n}{2}$ величины $m_k(n)$, равной наименьшему числу m, при котором найдется n-однородный гиперграф с m ребрами, не допускающий такой раскраски своих вершин в два цвета, что в каждом ребре не менее k вершин каждого из цветов.

В **первой главе** диссертации получены новые верхние рекуррентные оценки для величин $m_k(n)$. Предложено сразу несколько методов, среди которых своего рода индуктивная склейка гиперграфов и метод, связанный с задачей вершинного покрытия. Все эти методы оказываются по-своему важными, и в итоге соискателю удается получить ряд серьезных улучшений для многих прежних оценок чисел $m_k(n)$ при конкретных k и n.

Для величин $m_k(n)$ известны и асимптотические границы, подобные неравенствам (1). Одна из лучших верхних оценок была найдена Д.А. Шабановым, который показал, что при $k = O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$ выполнено

$$m_k(n) \le (1+o(1))\frac{e\ln 2}{4}n^2\frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} C_n^i}.$$

Во **второй главе** диссертации с помощью нетривиального анализа показано, что тот же результат можно получить при всех $k = o(n)$. Отметим, что при $k = \Theta(n)$ асимптотика функции $m_k(n)$

принципиально меняется. Таким образом, диссертанту удалось закрыть существовавший пробел.

Разумеется, в контексте классической задачи об уклонении особый интерес представляют случаи, когда k совсем близко к $\frac{n}{2}$. В этих случаях естественно писать $m_k(2k+t)$, подразумевая, что t — либо константа при $k \to \infty$, либо функция от k, достаточно медленно возрастающая. Было известно, что $m_k(2k+t) = O\left((\ln k)^{t+1}\right)$. Однако при бесконечно многих k верхняя оценка и вовсе постоянна. Возникает вопрос, какова плотность таких k в натуральном ряде. На этот вопрос ответ получен в **третьей главе** диссертации, в которой найдены достаточно точные оценки плотности. В частности, они свидетельствуют о том, что для любой функции $f(k)$, стремящейся к бесконечности при неограниченном возрастании k, оценка $m_k(2k+t) \leq f(k)$ выполнена на множестве асимптотической плотности 1. Также в главе получены аналогичные результаты для случаев, когда вершины гиперграфов красятся в более чем два цвета.

Наконец, в диссертации имеется **заключение**, в котором кратко описаны направления дальнейших исследований, мотивированные диссертационной работой.

Диссертация представляет собой законченное исследование, результаты которого вносят серьезный вклад в современную теорию гиперграфов. Эти результаты полезны для специалистов МФТИ, МГУ им. М.В. Ломоносова, МИРАН им. В.А. Стеклова и многих других университетов и научно-исследовательских центров. Их также можно использовать при чтении курсов по различным областям дискретной математики.

Таким образом, диссертационная работа С.М. Теплякова полностью соответствует требованиям, предъявляемым Положением МГУ о присуждении ученых степеней к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а Сергей Михайлович Тепляков заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

17.10.2017

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Райгородский

Подпись А.М. Райгородского заверяю

Ученый секретарь МФТИ, доцент

Ю.И. Скалько

Почтовый адрес: 119991, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.
Телефон: 7 (495) 408-45-54.
Адрес электронной почты: mraigor@yandex.ru.