МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра теоретической механики и мехатроники

На правах рукописи
УДК 531.36

Кремнёв Андрей Викторович

Математические модели движения на роликовой доске (скейтборде)

Специальность 01.02.01. – теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание научной степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель –
к.ф.-м.н., доцент
А.С. Кулешов

Москва – 2009

Содержание.

Введение.

Механика неголономных систем оформилась как самостоятельный раздел аналитической механики в 1894 году в книге известного физика и механика Г. Герца [13]. Он подробно проанализировал понятие “возможных перемещений” и впервые указал на существование неинтегрируемых дифференциальных зависимостей между координатами системы, приводящих к зависимостям между возможными перемещениями. Ему принадлежат также и термины “голономная система” и “неголономная система”.

Круг задач, решаемых методами механики неголономных систем, довольно широк. К числу классических задач неголономной механики, прежде всего, следует отнести задачи о качении тел по твердой поверхности. Количество работ, посвященных этим задачам, не поддается описанию. Из русских ученых начала XX века, занимавшихся решением задачи о качении твердых тел, можно назвать С.А. Чаплыгина [60-64], П.В. Воронца [11, 12, 114-116], Г.К. Суслова [55, 56]. В более позднее время такие исследования проводили Х.М. Муштари [42], Е.И. Харламова [59], Ю.П. Бычков [7-10], В.В. Румянцев [46, 50, 51], а в настоящее время их активно проводят А.В. Карапетян [18-22, 24, 25], А.П. Маркеев [34-39], А.С. Сумбатов [53, 54], Я.В. Татаринов [57], А.В. Борисов и И.С. Мамаев [2, 3, 74, 75] и многие другие. Современное состояние этого вопроса и обширная библиография имеются в монографии А.П. Маркеева [39].

Теория движения неголономных систем успешно применялась и применяется при исследовании различных технических задач: в теории движения велосипеда и мотоцикла (К. Бурле [76], Ж. Буссинеск [77], Э. Карвалло [80], Ф. Уиппл [111], Дж. Раус [99], И.И. Метелицын [41], Е.Д. Дикарев, Н.А. Фуфаев [14]), в теории движения автомобиля

(Н.Е. Жуковский [15], П.С. Линейкин [30], Л.Г. Лобас [31], Е.А. Чудаков [66]), в теории движения колесных мобильных роботов (В.М. Буданов, Е.А. Девянин [5], Ю.Г. Мартыненко [17, 40, 43], Д.Е. Охоцимский [43]) и в целом ряде других областей техники. Таким образом, механика неголономных систем может быть применена при исследовании движения различных машин и механизмов, снабженных колесами. В частности, объектами такого типа являются спортивные средства передвижения и экстремального спорта, т.е. различные роликовые доски, скейтборды, снейкборды и прочее. Исследования динамики подобных средств передвижения необходимы для того, чтобы выработать некоторые общие принципы катания на таких объектах и представить полученные принципы в виде инструкции для начинающих спортсменов. Наличие некоторых общих рекомендаций о правильном пользовании досками привело бы к значительному уменьшению травматизма, вызванного падениями при катании.

В данной диссертации рассматривается задача о движении человека на скейтборде. Предполагается, что управление скейтбордом со стороны человека отсутствует. Строятся различные математические модели, описывающие динамику данной системы. Уравнения движения этих моделей представлены в форме уравнений Гиббса – Аппеля. Проводится анализ этих уравнений, в частности, исследуются вопросы интегрируемости полученных уравнений. Также изучается влияние различных параметров модели на ее динамику.

В первой главе рассматривается простейшая модель движения человека на скейтборде (в дальнейшем человека, катающегося на скейтборде, будем называть райдером). Предполагается, что райдер представляет собой твердое тело, остающееся ортогональным к плоскости доски во все время движения. В этом случае наклон доски и наклон райдера определяются одной обобщенной координатой.

Во введении к первой главе проводится обзор имеющейся литературы по исследуемой задаче, а затем дано краткое описание скейтборда и составляющих его частей. Основные системы координат, используемые при изучении движения системы, вводятся в первом параграфе. Второй параграф посвящен выводу кинематических соотношений, связывающих угол наклона доски с углами поворота колесных осей скейтборда. Последующие два параграфа посвящены выводу уравнений движения системы. Уравнения движения записываются в форме уравнений Гиббса – Аппеля. Доказывается, что полученные уравнения всегда обладают первым интегралом – интегралом энергии. В пятом параграфе проводится сравнение полученных уравнений движения с теми, что были выведены ранее в работах Хаббарда [92, 93] и Эстерлинга [96], и показывается, как свести найденные уравнения к уравнениям указанным в [92, 93, 96].

Уравнения движения скейтборда всегда имеют частное решение, которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда. Устойчивость этого движения исследуется в шестом параграфе. В этом параграфе получены условия устойчивости равномерного прямолинейного движения скейтборда, а также условия устойчивости равновесия, когда скейтборд неподвижно стоит на плоскости. Вопросу существования у полученных уравнений движения инвариантной меры с гладкой положительной плотностью посвящен седьмой параграф первой главы. В этом параграфе найдены условия, при которых инвариантная мера существует. Оказывается, при выполнении этих условий уравнения движения скейтборда можно полностью проинтегрировать при помощи квадратур. Качественный анализ данного интегрируемого случая приведен в восьмом параграфе. В девятом параграфе для интегрируемого случая движения данной системы проведен анализ устойчивости всех стационарных движений скейтборда, получены условия устойчивости стационарных движений, а все аналитические результаты подтверждены серией построенных численно бифуркационных диаграмм. В последнем, десятом параграфе первой главы, проводится анализ движения скейтборда вблизи положения равновесия. Уравнения движения приводятся к нормальному виду, и на основе нормальной формы делается вывод о том, как ведет себя система вблизи положения равновесия.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию более сложной модели скейтборда. Предполагается, что наклон доски и наклон райдера определяются двумя независимыми обобщенными координатами. В первых двух параграфах второй главы выводятся уравнения движения данной модели скейтборда, при этом снова используется метод Гиббса – Аппеля. Полученные уравнения сравниваются с теми, что были выведены ранее в работах Хаббарда [92, 93].

Как и в случае простейшей модели, уравнения движения данной модели скейтборда допускают частное решение, которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда. Устойчивость этого движения исследуется в третьем параграфе. Получены условия устойчивости равномерного прямолинейного движения, а также равновесия скейтборда. Четвертый параграф посвящен исследованию условий существования у уравнений движения инвариантной меры с гладкой положительной плотностью. Получены условия, при которых инвариантная мера в данной задаче может существовать, однако найти ее в явном виде не удалось. В пятом параграфе проводится анализ движения скейтборда вблизи положения равновесия, при этом снова используется метод нормальных форм.

Результаты диссертационной работы докладывались на многочисленных семинарах и конференциях, в частности:

1. на десятой Международной конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела», Донецк, Украина, 2008;
2. на шестой Международной конференции ENOC-2008, Санкт-Петербург, Россия, 2008;
3. на XXXVI Международной школе-конференции APM-2008, Санкт-Петербург, Россия, 2008;

4. на девятой Международной конференции MOVIC-2008, Мюнхен, Германия, 2008;
5. на десятом Международном семинаре «Устойчивость и Колебания Нелинейных Систем Управления» им. Е.С. Пятницкого, Москва, Россия, 2008.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [118-124].

Глава 1. Простейшая модель скейтборда.

Введение.

Катание на роликовой доске (скейтборде) стало в последнее время одним из самых популярных видов спорта [58]. Многие миллионы людей увлекаются скейтбордингом. По данным на 2003 год, в одних только Соединенных Штатах Америки насчитывалось более 11 миллионов любителей скейтбординга [102]. Это количество равнялось приблизительно числу тех, кто увлекается волейболом или большим теннисом. Начиная с 1993 года количество людей, увлекающихся скетбордингом, возросло почти вдвое [103].

Однако, несмотря на растущую популярность скейтбординга, количество публикаций, посвященных различным вопросам динамики скейтборда, сравнительно невелико. В конце 70-х – начале 80-х годов XX века появились две статьи Монта Хаббарда [92, 93], в которых были построены и исследованы две математические модели, описывающие движение человека на скейтборде. При этом для получения уравнений движения моделей использовались общие теоремы динамики. Модели, изучаемые в данной работе, представляют собой дальнейшее развитие моделей, предложенных Хаббардом.

В 1996 году появилась статья Ю.Г. Исполова и Б.А. Смольникова [94], в которой также обсуждались различные вопросы динамики скейтборда. В частности, исследовалась возможность разгона скейтборда с использованием реакций неголономных связей (неголономный разгон). Однако модель скейтборда, предложенная в [94], является двумерной, тогда как в работах [92, 93] рассматривались исключительно пространственные модели, представляющиеся, как кажется, больший интерес.

Результаты, изложенные в [94], существенно использовались авторами дипломной работы [68], в которой помимо исследования модели скейтборда, взятой из [94], изучались также модели одной из модификаций скейтборда, называемой снейкборд (см. например, [95, 98]).

В статье [85] исследовались упругие свойства доски скейтборда, сделанного из композитного материала, при постепенном увеличении нагрузки на доску (с 60 кг до 80 кг). Упругие свойства колес скейтборда и феноменологические модели для силы трения, возникающей при взаимодействии колес скейтборда с опорной поверхностью, обсуждались автором презентации [90].

В 2004 году студент университета в Эксетере (Великобритания) Андерс Эстерлинг представил свою курсовую работу [96], в которой при помощи общих теорем динамики исследовалась одна из моделей скейтборда, предложенных в [92, 93]. Наряду со статьями [92, 93], курсовая работа [96] представляет наибольший интерес с точки зрения построенной в ней модели скейтборда и методов ее изучения. В тексте данной работы еще не раз будут упоминаться статьи [92, 93] и курсовая работа [96] и сравниваться полученные в них результаты с теми, что были полученные в этой работе.

В недавней статье [112] был сделан краткий обзор основных результатов работ [92, 93], однако исследования, проведенные в [112], не касались напрямую изучения динамики скейтборда. Кроме того, результаты, полученные в [92, 93], использовались автором презентаций [104, 105] для численного моделирования движения скейтборда. Этим лишний раз можно подчеркнуть тот факт, что работы [92, 93] являются ключевыми работами по динамике скейтборда.

Приведенный список работ практически полностью отражает все полученные к настоящему времени результаты по динамике скейтборда.

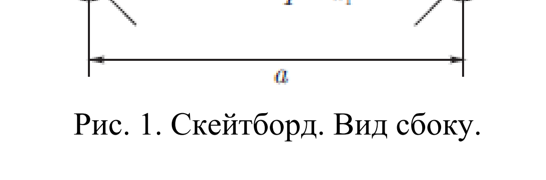


Рис. 1. Скейтборд. Вид сбоку.

Обычный скейтборд состоит из доски, двух подвесок, соединяющих колеса с доской, и четырех колес (Рис. 1-2). Современные доски обычно имеют размеры 78-83 см в длину, 17-21 см в ширину и толщиной в 1-2 см. Кроме этого доски различаются по конкейву (прогибу), которым определяется, для каких целей предназначен скейтборд. Если основная цель заключается в возможности исполнять сложные трюки, то лучше использовать более гибкую доску. Более жесткую доску следует использовать при катании на больших скоростях (например, при скатывании с горы).

Колеса скейтборда обычно изготавливаются из уретана, обеспечивающего хорошее взаимодействие с асфальтом даже при наличии выбоин. Колеса укреплены на осях при помощи подшипников с целью уменьшения трения качения [90].

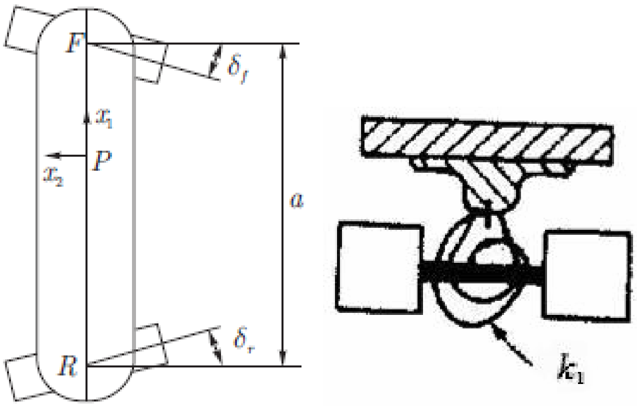


Рис. 2. Скейтборд. Вид сверху и сзади.

Наиболее существенными элементами скейтборда являются подвески, при помощи которых оси колес крепятся к доске. Вращение, как передней, так и задней колесной пары происходит вокруг соответствующих наклонных осей – пивотов (Рис. 1). Это приводит к тому, что всякий раз, когда доска не параллельна плоскости движения, колесные пары поворачиваются на соответствующие углы относительно вертикальной оси, ортогональной плоскости движения (Рис. 2). Управление скейтбордом происходит с использованием именно этой зависимости между углом наклона доски и углами поворота колесных пар.

В данной работе предполагается, что скейтборд движется по горизонтальной плоскости и при этом все четыре колеса опираются о плоскость. Тем самым исключаются из рассмотрения задачи, возникающие при исследовании прыжковой техники на скейтборде. Большинство авторов, изучающих данные вопросы, рассматривали в своих исследованиях так называемый прыжок “олли” (по имени райдера Аллана Олли Гельфанда, впервые его исполнившего) – стандартный прыжок на бордюр. Исследованию прыжка “олли” посвящены, в частности, работы [70, 71, 78, 79, 84, 86-88, 110].

Рис. 3. Современная модель подвески.

Предположим также, что в случае наклона доски скейтборда возникает восстанавливающий момент, который возвращает доску в первоначальное положение. Будем считать, что величина этого момента пропорциональна углу наклона доски. Такой момент может возникать, например, если доска соединена с колесами при помощи торсионных пружин (Рис. 2). Ранее такое же предположение о наличии восстанавливающего момента было сделано в работах [92, 93]. Данное предположение вполне обосновывается конструктивными особенностями современных подвесок. На рисунке 3 представлена подвеска скейтборда, производимая фирмой “Seismic”. Отчетливо видны пружины, создающие восстанавливающий момент, пропорциональный углу наклона доски.

1. Постановка задачи. Основные системы координат.

Предположим, что райдер, стоящий на скейтборде, представляет собой твердое тело, остающееся ортогональным к плоскости доски во все время движения. Следовательно, при наклоне доски на угол γ райдер отклоняется от вертикали на тот же угол (Рис. 4).

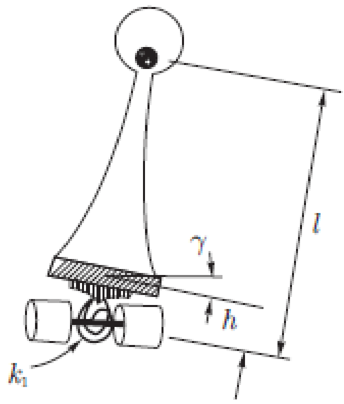


Рис. 4.

Введем неподвижную систему координат *OXYZ* с началом в некоторой точке *O* плоскости, по которой движется скейтборд, и осью *OZ*, ортогональной плоскости движения. Единичные векторы системы координат *OXYZ* обозначим соответственно $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$. Обозначим середины осей передних и задних колес скейтборда через *A* и *B* соответственно. Пусть расстояние *AB* равно *a* (Рис. 2). Положение отрезка *AB* относительно неподвижной системы координат *OXYZ* определяется координатами *X*, *Y* его середины *G* и углом θ, который данный отрезок образует с неподвижной осью *OX* (Рис. 5). Тогда для радиус-векторов $\overrightarrow{GA}$ и $\overrightarrow{GB}$ мы имеем следующие выражения:

$$\overrightarrow{GA} = \left(X + \frac{a}{2}\cos\theta \right)\mathbf{e}_x + \left(Y + \frac{a}{2}\sin\theta \right)\mathbf{e}_y,$$

$$\overrightarrow{GB} = \left(X - \frac{a}{2}\cos\theta \right)\mathbf{e}_x + \left(Y - \frac{a}{2}\sin\theta \right)\mathbf{e}_y.$$

Дифференцируя по времени радиус-векторы $\overrightarrow{GA}$ и $\overrightarrow{GB}$ и учитывая, что $OXYZ$ – неподвижная система координат, получаем выражение для абсолютных скоростей точек A и B:

$$\mathbf{v}_A = \left(\dot{X} - \frac{a}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\mathbf{e}_x + \left(\dot{Y} + \frac{a}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{v}_B = \left(\dot{X} + \frac{a}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\mathbf{e}_x + \left(\dot{Y} - \frac{a}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\mathbf{e}_y.$$

При наклоне доски на угол γ ось передней колесной пары поворачивается на угол δ_f по часовой стрелке, а ось задней колесной пары поворачивается на угол δ_r против часовой стрелки (Рис. 2, 5).

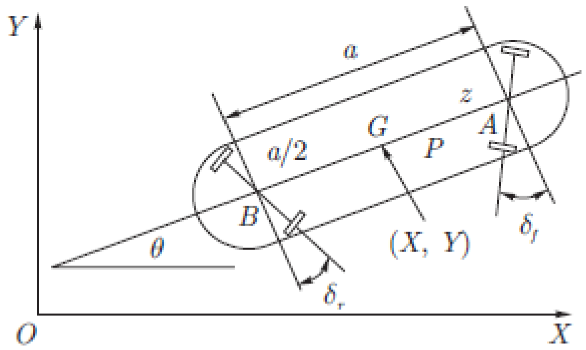


Рис. 5.

Предположим, что скейтборд движется таким образом, что его колеса не могут проскальзывать в направлении, перпендикулярном плоскости колеса. Рассмотрим переднюю колесную пару. Легко показать (Рис. 5, 6), что ось колес образует с осью OX угол $\pi/2-(\theta-\delta_f)$, а с OY – угол $\theta-\delta_f$. Следовательно, для передней пары колес условие проскальзывания имеет вид:

$$-\left(\dot{X} - \frac{a}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\theta-\delta_f\right)\right) + \left(\dot{Y} + \frac{a}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\cos\left(\theta-\delta_f\right) = 0.$$

Аналогично, рассмотрим заднюю колесную пару. Легко показать (Рис. 5, 6), что ось колес образует с осью OX угол $\pi/2-(\theta+\delta_r)$, а с OY – угол $\theta+\delta_r$. Следовательно, для задней пары колес условие проскальзывания имеет вид:

$$-\left(\dot{X} + \frac{a}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta+\delta_r)\right) + \left(\dot{Y} - \frac{a}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\cos\left(\theta+\delta_r\right) = 0.$$

Данные условия, после упрощения, можно записать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&-\dot{X}\sin\left(\theta-\delta_f\right)+\dot{Y}\cos\left(\theta-\delta_f\right)+\frac{a}{2}\dot{\theta}\cos\left(\delta_f\right)=0,\\
&-\dot{X}\sin\left(\theta+\delta_r\right)+\dot{Y}\cos\left(\theta+\delta_r\right)-\frac{a}{2}\dot{\theta}\cos\left(\delta_r\right)=0.
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

Мы можем разрешить уравнения связей (1.1.1) относительно $\dot{X}$ и $\dot{Y}$. Получим

$$
\begin{aligned}
\dot{X}&=-\frac{a\dot{\theta}}{2\sin\left(\delta_f+\delta_r\right)}\Big[\cos\left(\delta_f\right)\cos\left(\theta+\delta_r\right)+\cos\left(\delta_r\right)\cos\left(\theta-\delta_f\right)\Big],\\
\dot{Y}&=-\frac{a\dot{\theta}}{2\sin\left(\delta_f+\delta_r\right)}\Big[\cos\left(\delta_f\right)\sin\left(\theta+\delta_r\right)+\cos\left(\delta_r\right)\sin\left(\theta-\delta_f\right)\Big].
\end{aligned}
\tag{1.1.2}
$$

При выполнении условий (1.1.1) скорости точек *A* и *B* при этом будут направлены горизонтально и перпендикулярно осям колес. Покажем, что в этом случае на отрезке *AB* существует точка *P*, скорость которой направлена вдоль прямой *AB*. Для этого введем три единичных вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$: вектор $\mathbf{e}_1$ направлен по прямой *AB* в сторону движения, вектор $\mathbf{e}_3$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{e}_z$ неподвижной системы координат, а вектор $\mathbf{e}_2$ направлен ортогонально $\mathbf{e}_1$ так, чтобы векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образовывали правую тройку. Единичные вектора $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ неподвижной системы координат *OXYZ* выражаются через вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ по формулам:

$$
\mathbf{e}_x=\cos\theta\,\mathbf{e}_1-\sin\theta\,\mathbf{e}_2,\qquad \mathbf{e}_y=\sin\theta\,\mathbf{e}_1+\cos\theta\,\mathbf{e}_2.
$$

Следовательно, скорость точки *A* в разложении по векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_A&=\left(\dot{X}-\frac{a}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\left(\cos\theta\,\mathbf{e}_1-\sin\theta\,\mathbf{e}_2\right)+\left(\dot{Y}+\frac{a}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\left(\sin\theta\,\mathbf{e}_1+\cos\theta\,\mathbf{e}_2\right)=\\
&=\left(\dot{X}\cos\theta+\dot{Y}\sin\theta\right)\mathbf{e}_1+\left(\dot{Y}\cos\theta-\dot{X}\sin\theta+\frac{a}{2}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_2.
\end{aligned}
$$

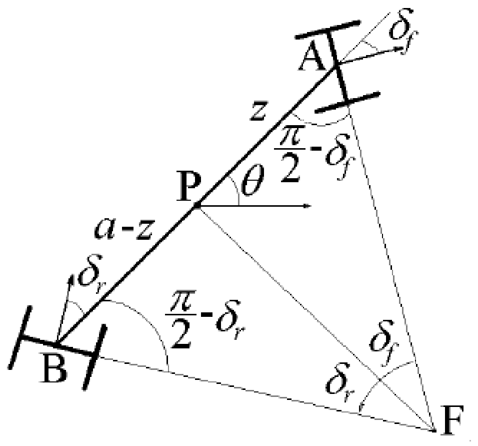


Рис. 6.

Пусть искомая точка P расположена на некотором расстоянии z от точки A, а величина ее скорости (направленной, по предположению, вдоль AB) равно u. Тогда по формуле Эйлера

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{PA}].$$

Учитывая, что угловая скорость репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ относительно репера $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ равна $\dot{\theta}\mathbf{e}_z = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$ и расписывая данную формулу более подробно, находим

$$\mathbf{v}_A = u\,\mathbf{e}_1 + [\dot{\theta}\mathbf{e}_3 \times z\,\mathbf{e}_1],$$

$$\left(\dot{X}\cos\theta + \dot{Y}\sin\theta\right)\mathbf{e}_1 + \left(\dot{Y}\cos\theta - \dot{X}\sin\theta + \frac{a}{2}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_2 = u\,\mathbf{e}_1 + \dot{\theta}\,z\,\mathbf{e}_2.$$

Отсюда следует, что

$$u = \dot{X}\cos\theta + \dot{Y}\sin\theta,$$

$$\dot{\theta}\,z = \dot{Y}\cos\theta - \dot{X}\sin\theta + \frac{a}{2}\dot{\theta}.$$

Подставляя в данные соотношения выражения (1.1.2) для $\dot{X}$ и $\dot{Y}$, окончательно получим

$$u = -\frac{a\dot{\theta}\cos\delta_f\cos\delta_r}{\sin\left(\delta_f + \delta_r\right)}, \quad \dot{\theta} = -\frac{u\sin\left(\delta_f + \delta_r\right)}{a\cos\delta_f\cos\delta_r}, \quad z = \frac{a\sin\delta_f\cos\delta_r}{\sin\left(\delta_f + \delta_r\right)}. \qquad (1.1.3)$$

Таким образом, мы показали, что между точками A и B действительно существует точка P, скорость которой направлена вдоль прямой AB. Поместим начала векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в точку P. Полученную таким образом систему координат обозначим $Px_1x_2x_3$. В дальнейшем все исследования динамики скейтборда будут проводиться относительно двух введенных систем координат – неподвижной $OXYZ$ и подвижной $Px_1x_2x_3$.

Существование точки P можно доказать и другим способом, опираясь, например, на понятие мгновенного центра скоростей [6, 55]. Поскольку отрезок AB совершает плоскопараллельное непоступательное движение в неподвижной плоскости OXY, то в этой плоскости в каждый момент времени существует точка F – мгновенный центр скоростей отрезка AB. Поскольку направления векторов скорости двух точек A и B отрезка AB нам известны, то, как следует из общих курсов теоретической механики [6, 55], мгновенный центр лежит на пересечении перпендикуляров к векторам скорости точек A и B, т.е. на пересечении осей колес (Рис. 6). Из точки F опустим перпендикуляр на отрезок AB. Полученная таким образом точка и будет точкой P. Это следует из определения мгновенного центра скоростей. Ее расстояние от точки A легко находится из геометрических соображений. Действительно, из треугольника $\vartriangle AFP$

$$FP = AP\frac{\cos\delta_f}{\sin\delta_f} = z\frac{\cos\delta_f}{\sin\delta_f},$$

а из треугольника $\vartriangle BFP$

$$FP = BP\frac{\cos\delta_r}{\sin\delta_r} = \left(a - z\right)\frac{\cos\delta_r}{\sin\delta_r}.$$

Приравнивая эти два выражения, получаем

$$z\frac{\cos\delta_f}{\sin\delta_f} = \left(a - z\right)\frac{\cos\delta_r}{\sin\delta_r},$$

откуда

$$z = \frac{a\sin\delta_f\cos\delta_r}{\sin\left(\delta_f + \delta_r\right)}.$$

Заметим, что пока не установлена зависимость между углом наклона доски γ и углами δ_f и δ_r, говорить что-либо о полученной формуле для z (т.е.

является ли z постоянным или может изменяться), не представляется возможным.

2. Кинематические связи.

Выведем теперь соотношения, связывающие угол наклона доски с углами поворота колесных осей. Для этого воспользуемся теорией конечных поворотов, изложенной, например, в книгах [29, 32]. Введем жестко связанную с доской систему координат $P\xi\eta\zeta$, получающуюся из системы $Px_1x_2x_3$ поворотом на угол γ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$. Таким образом, единичный вектор $\mathbf{e}_\zeta$ системы $P\xi\eta\zeta$ всегда перпендикулярен плоскости доски. Единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ связаны между собой соотношениями

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\xi, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\eta \cos\gamma - \mathbf{e}_\zeta \sin\gamma, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\eta \sin\gamma + \mathbf{e}_\zeta \cos\gamma.$$

Все рассуждения проведем для передней подвески скейтборда. Будем рассматривать ее движение относительно системы координат $P\xi\eta\zeta$. Пусть, ось колес имеет длину *2b*, тогда расстояния от точки *A* до точек прикрепления колес W_1 и W_2 равны соответственно, $AW_1 = AW_2 = b$. Относительно системы координат $P\xi\eta\zeta$ вектор $\overrightarrow{AW_1}$ имеет координаты $(0, b, 0)^{\mathrm{T}}$. Предположим, что мы осуществили поворот оси колес на угол η_f относительно наклонной оси – пивота. Единичный вектор $\mathbf{e}$ наклонной оси в разложении по векторам $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ имеет вид:

$$\mathbf{e} = -\cos\lambda_f\,\mathbf{e}_\xi - \sin\lambda_f\,\mathbf{e}_\zeta,$$

где λ_f – угол наклона передней подвески относительно горизонтали (Рис. 1). Как известно из теории конечных поворотов [29, 32], если некоторый вектор

$\boldsymbol{\rho}$ повернуть на угол χ вокруг оси с единичным направляющим вектором $\mathbf{i}$, то в результате поворота вектор $\boldsymbol{\rho}$ перейдет в вектор $\boldsymbol{\rho}'$, так что

$$\boldsymbol{\rho}' = (\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\rho})\mathbf{i} + \left(\boldsymbol{\rho} - (\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\rho})\mathbf{i}\right)\cos\chi + [\mathbf{i} \times \boldsymbol{\rho}]\sin\chi ,$$

где $(\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\rho})$ обозначает скалярное, а $[\mathbf{i} \times \boldsymbol{\rho}]$ – векторное произведение векторов $\mathbf{i}$ и $\boldsymbol{\rho}$. Следовательно, в результате поворота на угол η_f вокруг наклонной оси с единичным вектором $\mathbf{e} = \left(-\cos\lambda_f , 0, -\sin\lambda_f\right)^{\mathrm{T}}$ вектор $\overrightarrow{AW_1} = \left(0, b, 0\right)^{\mathrm{T}}$ перейдет в вектор

$$\left(\overrightarrow{AW_1}\right)_{\eta} = \overrightarrow{AW_1}' = \left(b\sin\eta_f \sin\lambda_f , b\cos\eta_f , -b\sin\eta_f \cos\lambda_f\right)^{\mathrm{T}}.$$

Углы γ и δ_f определяются следующим образом: если мы осуществим два последовательных поворота вектора $\overrightarrow{AW_1}$ – сначала на угол $-\gamma$ вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{e}_{\xi}$, а затем на угол $-\delta_f$ вокруг оси с единичным вектором таким, в который перейдет вектор $\mathbf{e}_3$ при первом повороте, то в результате этих двух поворотов вектор $\overrightarrow{AW_1}$ должен перейти в то же самое положение, что и при повороте на угол η_f относительно наклонной оси.

При повороте вектора $\overrightarrow{AW_1}$ на угол $-\gamma$ вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{e}_{\xi}$, он перейдет в вектор

$$\left(\overrightarrow{AW_1}\right)_{\gamma} = \overrightarrow{AW_1}'' = \left(0, b\cos\gamma , -b\sin\gamma\right)^{\mathrm{T}},$$

а вектор $\mathbf{e}_3$ при таком повороте перейдет в вектор

$$\mathbf{e}_3' = \left(0, \sin\gamma , \cos\gamma\right)^{\mathrm{T}}.$$

Далее, осуществляя поворот вектора $\overrightarrow{AW_1}''$ на угол $-\delta_f$ вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{e}_3'$, находим, что вектор $\overrightarrow{AW_1}''$ перейдет в вектор

$$\left(\overrightarrow{AW_1}\right)_{\gamma\delta} = \left(b\sin\delta_f , b\cos\gamma\cos\delta_f , -b\sin\gamma\cos\delta_f\right)^{\mathrm{T}}.$$

Приравнивания теперь соответствующие компоненты векторов $\left(\overrightarrow{AW_1}\right)_\eta$ и $\left(\overrightarrow{AW_1}\right)_{\gamma\delta}$ получаем следующую систему соотношений

$$\sin\eta_f \sin\lambda_f = \sin\delta_f ,$$

$$\cos\eta_f = \cos\gamma\cos\delta_f ,$$

$$\sin\eta_f \cos\lambda_f = \sin\gamma\cos\delta_f .$$

Выражая $\sin\eta_f$ из первого соотношения и подставляя в третье соотношение, окончательно получаем связь между углами γ и δ_f:

$$\mathrm{tg}\delta_f = \mathrm{tg}\lambda_f \sin\gamma . \qquad (1.2.1)$$

Аналогично для задней подвески имеем:

$$\mathrm{tg}\delta_r = \mathrm{tg}\lambda_r \sin\gamma . \qquad (1.2.2)$$

Впервые формулы (1.2.1)-(1.2.2) несколько иным способом были получены в курсовой работе Андерса Эстерлинга [96]. На одном из сайтов разработчиков подвесок [117] приведена техническая характеристика подвесок, в частности дана таблица, отображающая как повернутся оси колес при определенных значениях углов наклона подвесок и доски.

Static initial wheelbase (Inches)	38.5									
Front Axle Distance From Steering Axes (Inches)	0.5									
Rear Axle Distance From Steering Axes (Inches)	0.5									
Deck tilt (Degrees)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Front Steer Angle (Degrees)	45									
Rear Steer Angle (Degrees)	30									
Front Truck Arc Angle (Degrees)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	6.9	7.9	8.9	9.9
Rear Truck Arc Angle (Degrees)	0.0	0.6	1.2	1.7	2.3	2.9	3.5	4.0	4.6	5.2	5.7

Static initial wheelbase (Inches)	38.5									
Front Axle Distance From Steering Axes (Inches)	0.5									
Rear Axle Distance From Steering Axes (Inches)	0.5									
Deck tilt (Degrees)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Front Steer Angle (Degrees)	45									
Rear Steer Angle (Degrees)	30									
Front Truck Arc Angle (Degrees)	10.8	11.7	12.7	13.6	14.5	15.4	16.3	17.2	18.0	18.9
Rear Truck Arc Angle (Degrees)	6.3	6.8	7.4	8.0	8.5	9.0	9.6	10.1	10.6	11.2

Легко проверить, что значения, приведенные в таблице, полностью согласуются с величинами, которые можно получить по общим формулам (1.2.1)-(1.2.2). До этого, в работах Монта Хаббарда [92, 93] при выводе формул, связывающих угол наклона доски γ с углами поворота колесных осей δ_f и δ_r, предполагалось, что все эти углы являются малыми. В этом случае можно воспользоваться теорией бесконечно малых поворотов [32, 106].

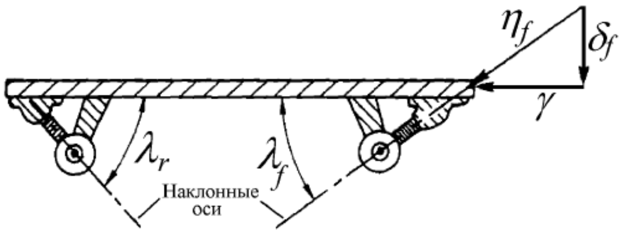


Рис. 7.

Действительно, предположим, что мы осуществили бесконечно малый поворот $\boldsymbol{\eta}_f$ оси колес относительно наклонной оси – пивота (Рис. 7). При этом ось колес повернется на угол $-\gamma$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$ и на угол $-\delta_f$ вокруг $\mathbf{e}_3$ так, как показано на рисунке. Учитывая, что бесконечно малые повороты складываются по обычному правилу сложения векторов, получаем:

$$\boldsymbol{\eta}_f = -\gamma\,\mathbf{e}_1 - \delta_f\,\mathbf{e}_3, \quad -\eta_f \cos\lambda_f\,\mathbf{e}_1 - \eta_f \sin\lambda_f\,\mathbf{e}_3 = -\gamma\,\mathbf{e}_1 - \delta_f\,\mathbf{e}_3 .$$

Из этого соотношения находим

$$\eta_f \cos\lambda_f = \gamma, \qquad \eta_f \sin\lambda_f = \delta_f$$

откуда

$$\delta_f = \gamma\,\mathrm{tg}\lambda_f .$$

Аналогично для задней подвески

$$\delta_r = \gamma\,\mathrm{tg}\lambda_r .$$

Впервые эти формулы были получены в работах [92, 93]. Легко видеть, что в предположении о малости углов γ, δ_f и δ_r данные формулы получаются предельным переходом из формул (1.2.1)-(1.2.2).

3. Вычисление абсолютной скорости центра масс доски и центра масс райдера.

В предыдущем пункте мы доказали, что угол γ наклона доски связан с углами δ_f и δ_r поворота колесных осей соотношениями (1.2.1)-(1.2.2). С учетом этих соотношений расстояние z от точки A до точки P будет равно

$$z = \frac{a \sin\delta_f \cos\delta_r}{\sin\left(\delta_f + \delta_r\right)} = \frac{a\,\mathrm{tg}\delta_f}{\mathrm{tg}\delta_f + \mathrm{tg}\delta_r} = \frac{a\,\mathrm{tg}\lambda_f}{\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r},$$

т.е. при выполнении условий (1.2.1)-(1.2.2) точка P всегда находится на постоянном расстоянии от точки A, зависящем от углов λ_f и λ_r наклона передней и задней подвесок к горизонтали. Это обстоятельство является одной из основных особенностей конструкции скейтборда, что было отмечено также и в курсовой работе [96]. По словам автора работы [96], данный факт может быть проверен опытным путем.

Предположим, что доска скейтборда расположена на высоте h от прямой AB. Поскольку при наклоне доски на угол γ происходит вращение всей конструкции (доски и стоящего на ней райдера) вокруг прямой AB, то наклон доски приводит также к смещению ее продольной оси относительно прямой AB. Радиус-вектор точки D на продольной оси доски, до наклона располагавшейся над точкой P, будет иметь вид:

$$\overrightarrow{PD} = h\cos\gamma\,\mathbf{e}_3 - h\sin\gamma\,\mathbf{e}_2.$$

Будем считать, что длина доски также равна a, центр масс C доски расположен на ее продольной оси посередине между точками крепления подвесок. Таким образом, если доска не наклонена, то центр масс C расположен на высоте h над точкой G – серединой отрезка AB. Точки на продольной оси доски, до наклона располагавшиеся над точками A и B, обозначим M и N. Найдем выражения для вектора $\overrightarrow{DC}$ из точки D в центр масс доски. Покажем, что это выражение не зависит от того, где расположена точка D относительно центра масс. Действительно, рассмотрим сначала случай, когда точка D лежит между точками M и C. Тогда

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = -\frac{a}{2}\mathbf{e}_1 - \left(-z\,\mathbf{e}_1\right) = \left(z - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_1.$$

В случае, когда точка D лежит между C и N, имеем:

$$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MD}, \quad \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MD},$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \left(z - \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_1.$$

Подставляя в данную формулу явное выражение для z, находим

$$\overrightarrow{DC} = \frac{a\sin\left(\delta_f - \delta_r\right)}{2\sin\left(\delta_f + \delta_r\right)}\mathbf{e}_1 = \frac{a}{2}\frac{\left(\operatorname{tg}\lambda_f - \operatorname{tg}\lambda_r\right)}{\left(\operatorname{tg}\lambda_f + \operatorname{tg}\lambda_r\right)}\mathbf{e}_1.$$

Для нахождения абсолютной скорости центра масс доски воспользуемся формулой сложения скоростей. Радиус-вектор точки C относительно системы координат $Px_1x_2x_3$ имеет вид:

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} = \frac{a}{2}\frac{\left(\operatorname{tg}\lambda_f - \operatorname{tg}\lambda_r\right)}{\left(\operatorname{tg}\lambda_f + \operatorname{tg}\lambda_r\right)}\mathbf{e}_1 - h\sin\gamma\,\mathbf{e}_2 + h\cos\gamma\,\mathbf{e}_3.$$

Переносная скорость точки C равна

$$\mathbf{v}_C^t = \mathbf{v}_P + [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{PC}].$$

Учитывая, что скорость точки P равна $\mathbf{v}_P = u\,\mathbf{e}_1$, а угловая скорость системы $Px_1x_2x_3$ равна

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_3 = -\frac{u\sin\left(\delta_f + \delta_r\right)}{a\cos\delta_f\cos\delta_r}\mathbf{e}_3 = -\frac{u\left(\operatorname{tg}\lambda_f + \operatorname{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma}{a}\mathbf{e}_3,$$

окончательно получаем:

$$\mathbf{v}_C^t = u\left(1 - \frac{\left(\operatorname{tg}\lambda_f + \operatorname{tg}\lambda_r\right)h}{a}\sin^2\gamma\right)\mathbf{e}_1 - \frac{u}{2}\left(\operatorname{tg}\lambda_f - \operatorname{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma\,\mathbf{e}_2.$$

Относительная скорость точки C равна

$$\mathbf{v}_C^r = -h\dot{\gamma}\cos\gamma\,\mathbf{e}_2 - h\dot{\gamma}\sin\gamma\,\mathbf{e}_3.$$

Таким образом, абсолютная скорость точки C равна

$$\mathbf{v}_C = u\left(1-\frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r\right)h}{a}\sin^2\gamma\right)\mathbf{e}_1 - \\ -\left(\frac{u}{2}\left(\mathrm{tg}\lambda_f-\mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma + h\dot{\gamma}\cos\gamma\right)\mathbf{e}_2 - h\dot{\gamma}\sin\gamma\,\mathbf{e}_3. \tag{1.3.1}$$

Переходим к вычислению скорости центра масс райдера. Для большей общности предположим, что райдер стоит не в центре доски, а на ее продольной оси в точке E на расстоянии d от переднего края доски. Пусть центр масс райдера находится в точке R, высота которой над точкой P равна l. Найдем выражение для вектора $\overrightarrow{DE}$ из точки D в точку, где стоит райдер. Покажем, что это выражение не зависит от того, где располагается точка D относительно точки E. Действительно, рассмотрим сначала случай, когда точка D лежит между точками M и E. Тогда

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DE},$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MD} = -d\,\mathbf{e}_1 - \left(-z\,\mathbf{e}_1\right) = \left(z-d\right)\mathbf{e}_1.$$

В случае, когда D лежит между E и N, имеем:

$$\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{MD}, \quad \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DE},$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MD} = \left(z-d\right)\mathbf{e}_1.$$

Подставляя в данную формулу явное выражение для z, находим

$$\overrightarrow{DE} = \frac{\left(a-d\right)\sin\delta_f\cos\delta_r - d\sin\delta_r\cos\delta_f}{\sin\left(\delta_f+\delta_r\right)}\mathbf{e}_1 = \frac{\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r}{\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r}\mathbf{e}_1.$$

Следовательно, радиус-вектор точки R имеет вид:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ER} = \frac{\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r}{\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r}\mathbf{e}_1 - l\sin\gamma\,\mathbf{e}_2 + l\cos\gamma\,\mathbf{e}_3.$$

Переносная скорость точки R равна

$$\mathbf{v}_R^t = \mathbf{v}_P + [\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{PR}],$$

или, в явном виде

$$\mathbf{v}_R^t = u\left(1-\frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r\right)l}{a}\sin^2\gamma\right)\mathbf{e}_1-\frac{u}{a}\Big(\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f-d\,\mathrm{tg}\lambda_r\Big)\sin\gamma\,\mathbf{e}_2\,.$$

Относительная скорость точки R равна

$$\mathbf{v}_R^r = -l\,\dot{\gamma}\cos\gamma\,\mathbf{e}_2 - l\,\dot{\gamma}\sin\gamma\,\mathbf{e}_3\,.$$

Окончательно, абсолютная скорость точки R равна

$$\begin{gathered}\mathbf{v}_R = u\left(1-\frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r\right)l}{a}\sin^2\gamma\right)\mathbf{e}_1 - l\,\dot{\gamma}\cos\gamma\,\mathbf{e}_2 - \\ -\frac{u}{a}\Big(\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f-d\,\mathrm{tg}\lambda_r\Big)\sin\gamma\,\mathbf{e}_2 - l\,\dot{\gamma}\sin\gamma\,\mathbf{e}_3\,.\end{gathered} \tag{1.3.2}$$

Угловая скорость райдера, согласно постановке задачи, совпадает с угловой скоростью доски; она равна

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\gamma}\,\mathbf{e}_1 + \dot{\theta}\,\mathbf{e}_3 = \dot{\gamma}\,\mathbf{e}_1 - \frac{u}{a}\Big(\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r\Big)\sin\gamma\,\mathbf{e}_3\,. \tag{1.3.3}$$

Таким образом, формулы для абсолютной скорости центра масс C доски и абсолютной скорости центра масс R райдера имеют вид (1.3.1)-(1.3.2). Формулой (1.3.3) определяется угловая скорость доски и райдера.

4. Уравнения движения.

Уравнения движения данной модели скейтборда построим в форме уравнений Гиббса – Аппеля. При этом в качестве псевдоскоростей выберем переменные u и $\dot{\gamma}$. Построим сначала функцию Аппеля (энергию ускорений) данной системы. Для этого воспользуемся формулой, приведенной в книгах [32, 69]

$$S = \frac{m}{2}\mathbf{w}_C^2 + \frac{1}{2}\Big(\dot{\mathbf{\Omega}}\cdot\mathbf{\Theta}_C\dot{\mathbf{\Omega}}\Big) + \Big(\dot{\mathbf{\Omega}}\cdot\left[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{\Theta}_C\mathbf{\Omega}\right]\Big). \tag{1.4.1}$$

Здесь $\mathbf{w}_C$ – ускорение центра масс тела, $\mathbf{\Theta}_C$ – тензор инерции тела относительно центра масс, $\mathbf{\Omega}$ и $\dot{\mathbf{\Omega}}$ – угловая скорость и угловое ускорение тела, соответственно.

Будем считать, что направление главных осей инерции, как доски, так и райдера определяются единичными векторами $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ системы координат $P\xi\eta\zeta$. Тензоры инерции доски и райдера в главных осях имеют вид:

$$\mathbf{\Theta}_b = \begin{pmatrix} I_{bx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{by} & 0 \\ 0 & 0 & I_{bz} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Theta}_r = \begin{pmatrix} I_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & I_{rz} \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (1.3.1), (1.3.2) для абсолютной скорости центра масс доски и центра масс райдера, можно вычислить абсолютные ускорения этих точек. Для абсолютного ускорения центра масс доски получаем следующее выражение:

$$\mathbf{w}_C = w_{C1}\,\mathbf{e}_1 + w_{C2}\,\mathbf{e}_2 + w_{C3}\,\mathbf{e}_3,$$

$$w_{C1} = \dot{u}\left(1 - \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)h}{a}\sin^2\gamma\right) - \frac{u^2\left(\mathrm{tg}^2\lambda_f - \mathrm{tg}^2\lambda_r\right)}{2a}\sin^2\gamma -$$
$$- \frac{3u\dot{\gamma}\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)h}{a}\sin\gamma\cos\gamma,$$

$$w_{C2} = h\left(\dot{\gamma}^2\sin\gamma - \ddot{\gamma}\cos\gamma\right) - \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f - \mathrm{tg}\lambda_r\right)}{2}\left(\dot{u}\sin\gamma + u\dot{\gamma}\cos\gamma\right) -$$
$$- \frac{u^2\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma}{a}\left(1 - \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)h}{a}\sin^2\gamma\right),$$

$$w_{C3} = -h\left(\ddot{\gamma}\sin\gamma + \dot{\gamma}^2\cos\gamma\right).$$

Аналогично для ускорения центра масс райдера получаем:

$$\mathbf{w}_R = w_{R1}\,\mathbf{e}_1 + w_{R2}\,\mathbf{e}_2 + w_{R3}\,\mathbf{e}_3,$$

$$w_{R1} = \dot{u}\left(1 - \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)l}{a}\sin^2\gamma\right) - \frac{3u\dot{\gamma}\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)l}{a}\sin\gamma\cos\gamma -$$

$$-\frac{u^2}{a^2}\left(\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right)\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin^2\gamma,$$

$$w_{R2} = l\left(\dot{\gamma}^2\sin\gamma - \ddot{\gamma}\cos\gamma\right) - \frac{\left(\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}\left(\dot{u}\sin\gamma + u\dot{\gamma}\cos\gamma\right) -$$

$$-\frac{u^2\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma}{a}\left(1 - \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)l}{a}\sin^2\gamma\right),$$

$$w_{R3} = -l\left(\ddot{\gamma}\sin\gamma + \dot{\gamma}^2\cos\gamma\right).$$

Угловое ускорение системы имеет вид:

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \ddot{\gamma}\,\mathbf{e}_1 - \frac{u\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}\dot{\gamma}\sin\gamma\,\mathbf{e}_2 - \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}\left(\dot{u}\sin\gamma + u\dot{\gamma}\cos\gamma\right)\mathbf{e}_3.$$

Используя формулы, связывающие векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с векторами главных осей $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$, получим для угловой скорости и углового ускорения следующие выражения:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\gamma}\,\mathbf{e}_\xi - \frac{u}{a}\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin^2\gamma\,\mathbf{e}_\eta - \frac{u}{a}\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma\cos\gamma\,\mathbf{e}_\zeta,$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \ddot{\gamma}\,\mathbf{e}_\xi - \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}\left(\dot{u}\sin\gamma + 2u\dot{\gamma}\cos\gamma\right)\sin\gamma\,\mathbf{e}_\eta -$$

$$-\frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}\left(\dot{u}\sin\gamma\cos\gamma + \left(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\right)u\dot{\gamma}\right)\mathbf{e}_\zeta.$$

Пусть m_b – масса доски, а m_r – масса райдера. Обозначим также

$$I_x = I_{bx} + I_{rx}, \qquad I_y = I_{by} + I_{ry}, \qquad I_z = I_{bz} + I_{rz}.$$

Подставляя выражения для ускорений центра масс доски и райдера и для углового ускорения системы в формулу (1.4.1), находим энергию ускорений системы:

$$S = \frac{1}{2}\left(\left(A_1 + \left(C_1 - 2D_1\right)\sin^2\gamma + F_1\sin^4\gamma\right)\dot{u}^2 + E_1\ddot{\gamma}^2\right) +$$

$$+\left(C_1 - 3D_1 + 3F_1\sin^2\gamma\right)\dot{u}\,u\,\dot{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma + \left(D_1 - F_1\sin^2\gamma\right)u^2\ddot{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma +$$

$$+B_1\left(\dot{u}\,\ddot{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma + u\,\ddot{\gamma}\,\dot{\gamma}\cos^2\gamma - \dot{u}\,\dot{\gamma}^2\sin^2\gamma\right).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_1 = m_b + m_r, \qquad B_1 = \frac{m_b h}{2}\left(\mathrm{tg}\lambda_f - \mathrm{tg}\lambda_r\right) + \frac{m_r l}{a}\left(\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right),$$

$$C_1 = \frac{m_b}{4}\left(\mathrm{tg}\lambda_f - \mathrm{tg}\lambda_r\right)^2 + \frac{I_z}{a^2}\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)^2 + \frac{m_r}{a^2}\left(\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right)^2,$$

$$D_1 = \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}\left(m_b h + m_r l\right), \qquad E_1 = I_x + m_b h^2 + m_r l^2,$$

$$F_1 = \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)^2}{a^2}\left(I_y - I_z + m_b h^2 + m_r l^2\right).$$

Потенциальная энергия системы состоит из потенциала сил тяжести доски и райдера и потенциала упругих сил, возникающего за счет наличия торсионной пружины, соединяющей оси колес с подвеской. Если обозначить через k_1 жесткость пружины, то тогда

$$V = \frac{k_1 \gamma^2}{2} + m_b g h \cos\gamma + m_r g l \cos\gamma .$$

Уравнения Гиббса – Аппеля, описывающие динамику данной модели скейтборда, имеют вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot u} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \ddot\gamma} = -\frac{\partial V}{\partial \gamma},$$

или, в явном виде

$$\begin{aligned}
&\left(A_1 + \left(C_1 - 2D_1\right)\sin^2\gamma + F_1 \sin^4\gamma\right)\dot u + B_1\left(\ddot\gamma\cos\gamma - \dot\gamma^2\sin\gamma\right)\sin\gamma + \\
&\qquad + \left(C_1 - 3D_1 + 3F_1\sin^2\gamma\right)u\,\dot\gamma\sin\gamma\cos\gamma = 0, \\
&E_1\ddot\gamma + \left(D_1 - F_1\sin^2\gamma\right)u^2\sin\gamma\cos\gamma + B_1\left(\dot u\sin\gamma + u\,\dot\gamma\cos\gamma\right)\cos\gamma + \\
&\qquad + k_1\gamma - \left(m_b h + m_r l\right)g\sin\gamma = 0.
\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Основным объектом дальнейшего исследования станет система уравнений (1.4.2). Покажем теперь, что при любом значении постоянных A_1, $B_1, \ldots,$ F_1 уравнения (1.4.2) имеют первый интеграл – интеграл энергии. Действительно, если умножить первое из уравнений (1.4.2) на u, а второе –

на $\dot{\gamma}$ и сложить, то после упрощения можно заметить, что полученное выражение является полной производной функции

$$
\begin{gathered}
H = \frac{A_1 + \left(C_1 - 2D_1\right)\sin^2\gamma + F_1\sin^4\gamma}{2}u^2 + B_1 u\dot{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma + \\
+\frac{E_1}{2}\dot{\gamma}^2 + \frac{k_1}{2}\gamma^2 + \left(m_b h + m_r l\right)g\cos\gamma = c_0 .
\end{gathered} \tag{1.4.3}
$$

Данная функция представляет собой полную механическую энергию системы. Таким образом, для интегрирования уравнений (1.4.2) недостает лишь одного дополнительного первого интеграла. Вопрос об интегрируемости уравнений движения (1.4.2) будет рассмотрен ниже.

5. Сравнение с известными результатами.

В начале данной главы уже упоминалось о том, что рассматриваемая модель скейтборда изучалась ранее в статьях [92, 93], а также в курсовой работе [96]. Однако в этих работах исследование модели проводилось при дополнительных упрощающих предположениях, поэтому построенные в них уравнения имеют более простой вид, чем полученные в предыдущем пункте уравнения (1.4.2). В этом пункте мы покажем, как из уравнений (1.4.2) при дополнительных упрощающих предположениях получаются уравнения, известные из [92, 93] и [96].

В курсовой работе [96] для получения уравнений движения скейтборда использовались общие теоремы динамики. При этом предполагалось, что подвески скейтборда симметричны $\left(\lambda_f = \lambda_r = \lambda\right)$, райдер стоит точно в центре доски $\left(d = a/2\right)$, масса доски равна нулю $\left(m_b = 0\right)$, а райдер представляет собой материальную точку, закрепленную на невесомом стержне на высоте l от точки P. Последние предположения означают, что

$$I_x = I_y = I_z = 0 .$$

Кроме того, предполагалось, что на доску не действует никакого восстанавливающего момента $(k_1 = 0)$. При этих предположениях постоянные A_1, $B_1,\ldots,$ F_1 запишутся следующим образом:

$$A_1 = m_r, \qquad B_1 = 0, \qquad C_1 = 0,$$

$$D_1 = \frac{2m_r l}{a}\operatorname{tg}\lambda = \frac{m_r l}{ac}, \qquad E_1 = m_r l^2,$$

$$F_1 = \frac{4m_r l^2 \operatorname{tg}^2\lambda}{a^2} = \frac{m_r l^2}{a^2 c^2}, \qquad c = \frac{1}{2\operatorname{tg}\lambda}.$$

Первое из уравнений (1.4.2) принимает вид

$$\left(m_r + \frac{m_r l^2}{a^2c^2}\sin^4\gamma - \frac{2m_r l}{ac}\sin^2\gamma\right)\dot{u} + \frac{3m_r l^2}{a^2c^2}u\dot{\gamma}\sin^3\gamma\cos\gamma - \frac{3m_r l}{ac}u\dot{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma = 0.$$

Можно привести его к форме

$$m_r\left(1 - \frac{l}{ac}\sin^2\gamma\right)^2\dot{u} - \frac{3m_r l}{ac}\left(1 - \frac{l}{ac}\sin^2\gamma\right)u\dot{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma = 0$$

или, окончательно,

$$\left(1 - \frac{l}{ac}\sin^2\gamma\right)\dot{u} - \frac{3l}{ac}u\dot{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с соответствующим уравнением работы [96], описывающем закон изменения u.

Второе уравнение из уравнений (1.4.2) при сделанных дополнительных предположениях перепишется в виде:

$$m_r l^2\ddot{\gamma} + \left(\frac{m_r l}{ac} - \frac{m_r l^2}{a^2c^2}\sin^2\gamma\right)u^2\sin\gamma\cos\gamma - m_r l g\sin\gamma = 0$$

или, после сокращения на $m_r l^2$:

$$\ddot{\gamma} + \left(\frac{1}{lac} - \frac{\sin^2\gamma}{a^2c^2}\right)u^2\sin\gamma\cos\gamma - \frac{g}{l}\sin\gamma = 0.$$

Данное уравнение совпадает с соответствующим уравнением работы [96]. Таким образом, показано, как получить из уравнений (1.4.2) уравнения, приведенные в работе [96].

В работах [92, 93] предполагалось, что угол γ наклона доски является малым. Поэтому мы можем легко получить уравнения движения данной модели скейтборда, указанные в работах [92, 93], если линеаризуем уравнения (1.4.2) по переменной γ. При этом уравнения (1.4.2) перепишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} &\dot{u} = 0, \\ &E_1 \ddot{\gamma} + B_1 u \dot{\gamma} + \left(D_1 u^2 + k_1 - \left(m_b h + m_r l\right) g\right)\gamma = 0. \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Уравнения (1.5.1) совпадают с уравнениями движения скейтборда, полученными в работах [92, 93]. Таким образом, в предположении что γ – малый угол, мы можем считать скорость u точки P постоянной и рассматривать ее как параметр во втором уравнении, описывающем закон изменения γ.

6. Устойчивость прямолинейного равномерного движения скейтборда.

Уравнения (1.4.2) допускают частное решение

$$u = u_0 = \mathrm{const}, \qquad \gamma = 0, \tag{1.6.1}$$

которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда. Рассмотрим задачу об устойчивости этого движения системы.

Полагая $u = u_0 + \xi$ и сохраняя для γ прежнее обозначение, выпишем уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} &E_1 \ddot{\gamma} + B_1 u_0 \dot{\gamma} + \left(D_1 u_0^2 + k_1 - \left(m_b h + m_r l\right) g\right)\gamma = \Gamma, \\ &\dot{\xi} = \Xi. \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Здесь Γ и Ξ – не зависящие от времени функции переменных γ, $\dot{\gamma}$ и ξ, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка. При этом имеют место соотношения (данный факт устанавливается прямой проверкой):

$$\Gamma(0,0,\xi) = \Xi(0,0,\xi) = 0.$$

Характеристическое уравнение, отвечающее системе (1.6.2) имеет вид:

$$s\left(E_1 s^2 + B_1 u_0 s + D_1 u_0^2 + k_1 - \left(m_b h + m_r l\right) g\right) = 0. \qquad (1.6.3)$$

При выполнении условий

$$E_1 > 0, \quad B_1 u_0 > 0, \quad D_1 u_0^2 + k_1 - \left(m_b h + m_r l\right) g > 0 \qquad (1.6.4)$$

уравнение (1.6.3) имеет один нулевой корень и два корня с отрицательной вещественной частью. Поскольку все нелинейности в системе (1.6.2) тождественно обращаются в нуль при $\gamma = 0$, $\dot{\gamma} = 0$, то при условиях (1.6.4) имеет место особенный случай одного нулевого корня [33, 65] и невозмущенное движение (1.6.1) устойчиво, причем асимптотически относительно переменных γ, $\dot{\gamma}$ и неасимптотически – относительно переменной u.

Поскольку условие $E_1 > 0$ выполняется при всех значениях параметров, то условия устойчивости (1.6.4) прямолинейного равномерного движения скейтборда окончательно могут быть записаны следующим образом:

$$\left[\frac{m_b h}{2}\left(\mathrm{tg}\lambda_f - \mathrm{tg}\lambda_r\right) + \frac{m_r l}{a}\left(\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right)\right] u_0 > 0, \qquad (1.6.5)$$

$$k_1 + \left(\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)\frac{u_0^2}{a} - g\right)\left(m_b h + m_r l\right) > 0 \qquad (1.6.6)$$

При строгом нарушении, по меньшей мере, одного из неравенств (1.6.5)-(1.6.6) уравнение (1.6.3) имеет корень с положительной вещественной частью и невозмущенное движение (1.6.1) неустойчиво.

Получим некоторые простейшие выводы об устойчивости прямолинейного движения скейтборда из анализа условий (1.6.5)–(1.6.6). Поскольку в условие (1.6.5) скорость u_0 входит как множитель, то можно сделать вывод, что устойчивость движения скейтборда зависит от направления его движения. Если в одном направлении движение скейтборда будет устойчивым, то в другом – обязательно неустойчивым. Такое поведение свойственно многим неголономным системам. В первую очередь здесь следует назвать задачу о движении кельтского камня (см., например, [1, 21, 24, 26, 37, 39, 73, 89, 108, 109]), в которой устойчивость вращения камня зависит от направления вращения.

Предположим, что $u_0 > 0$, $\lambda_f = \lambda_r = \lambda$ и неравенство (1.6.6) выполнено. Тогда, как следует из неравенства (1.6.5), устойчивость прямолинейного движения скейтборда зависит от того, где стоит райдер. Если он стоит ближе к передней подвеске $\left(d < a/2\right)$, то движение будет устойчивым, а если ближе к задней подвеске – то неустойчивым.

Выясним теперь, при каком условии будет устойчивым положение равновесия скейтборда, т.е. решение

$$u_0 = 0, \qquad \gamma = 0.$$

При $u_0 = 0$ характеристическое уравнение (1.6.3) будет иметь один нулевой корень и пару чисто мнимых корней при выполнении условия

$$k_1 - \left(m_b h + m_r l\right) g > 0. \tag{1.6.7}$$

Покажем, что при выполнении условия (1.6.7) положение равновесия скейтборда будет устойчивым. Заметим, что значение $\gamma = 0$ является критическим значением потенциальной энергии системы. Тогда, на основании результатов В.В. Румянцева об устойчивости равновесий неголономных систем [47, 48] (см. также [23, 49]) можно утверждать, что положение равновесия скейтборда будет устойчивым в первом приближении по отношению к γ, $\dot{\gamma}$, если вторая производная потенциальной энергии, вычисленная в положении равновесия, будет положительной. Данное условие как раз имеет вид неравенства (1.6.7). Следовательно, можно сделать вывод, что положение равновесия скейтборда будет устойчивым, если коэффициент упругости торсионной пружины достаточно велик, чтобы компенсировать дестабилизирующий эффект действия моментов сил тяжести доски и райдера.

Характеристическое уравнение (1.6.3) может иметь один нулевой корень и пару чисто мнимых корней еще в одном случае – когда $B_1 = 0$. Это условие выполняется, в частности, когда скейтборд симметричен $\left(\lambda_f = \lambda_r\right)$, а райдер стоит в центре доски $\left(d = a/2\right)$. Действительно, при $B_1 = 0$ характеристическое уравнение (1.6.3) принимает вид:

$$s\left(E_1 s^2 + D_1 u_0^2 + k_1 - \left(m_b h + m_r l\right) g\right) = 0.$$

Данное уравнение будет иметь один нулевой и два чисто мнимых корня при выполнении условия

$$D_1 u_0^2 + k_1 - \left(m_b h + m_r l\right) g > 0. \qquad (1.6.8)$$

Условие (1.6.8) является необходимым условием устойчивости стационарного движения (1.6.1) в случае $B_1 = 0$. Более строгие выводы об устойчивости стационарных движений в случае $B_1 = 0$ будут получены ниже, в отдельном параграфе, поскольку случай $B_1 = 0$ является особо замечательным и нуждается в отдельном рассмотрении.

7. Существование инвариантной меры.

В этом пункте рассматривается вопрос о существовании у системы уравнений (1.4.2) инвариантной меры с гладкой положительной плотностью. Поскольку фазовое пространство системы (1.4.2) является цилиндрическим, то для исследования существования инвариантной меры воспользуемся результатами работы [27, 28]. Изложим сначала некоторые факты из общей теории нахождения инвариантной меры, а затем применим их к системе (1.4.2).

Рассмотрим цилиндрическое фазовое пространство $\mathrm{M}^n = \mathbb{R}^k \times \mathrm{T}^{n-k}$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$, среди которых k линейных и $n-k$ угловых. Пусть

$\mathbf{v}$ – гладкое векторное поле на M^n. Ему отвечает дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \tag{1.7.1}$$

Рассмотрим задачу о существовании у системы (1.7.1) инвариантной меры

$$\operatorname{mes}(D) = \int_D \mu(\mathbf{x}) d^n x \tag{1.7.2}$$

с гладкой положительной плотностью μ: $\mathrm{M}^n \to \mathbb{R}$.

Критерием существования инвариантной меры (1.7.2) является уравнение Лиувилля $div(\mu \mathbf{v}) = 0$, которое с учетом положительности функции μ можно переписать в виде:

$$\dot{\varpi} = -\operatorname{div}\mathbf{v}, \quad \varpi = \ln \mu. \tag{1.7.3}$$

Ясно, что ϖ – гладкая функция на M^n.

Пусть точка $\mathbf{x} = 0$ является положением равновесия системы (1.7.1). В окрестности положения равновесия данная система может быть представлена в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda x} + \ldots, \tag{1.7.4}$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – матрица линейной части системы.

Теорема ([28]) *Пусть* $x = 0$ *равновесное решение нелинейной системы (1.7.4). Если* $tr\,\Lambda \neq 0$, *то эта система не имеет в окрестности точки* $x = 0$ *инвариантной меры с гладкой плотностью.*

Воспользуемся утверждением теоремы при рассмотрении нашей задачи. Положим

$$\gamma = x_1, \qquad \dot{\gamma} = x_2, \qquad u = u_0 + x_3,$$

и представим систему уравнений (1.4.2) в виде:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + \ldots.$$

При этом след матрицы $\mathbf{\Lambda} = \left(a_{ij} \right)$ записывается следующим образом:

$$\operatorname{tr}\mathbf{\Lambda} = -\frac{B_1 u_0}{E_1}.$$

Таким образом, инвариантная мера у системы (1.4.2) отсутствует во всех случаях, кроме случая $B_1 = 0$. Легко видеть, что в этом случае первое из уравнений (1.4.2) интегрируется отдельно и в результате удается проинтегрировать уравнения (1.4.2) до конца. Качественный анализ указанного интегрируемого случая приведен в следующем пункте.

8. Качественный анализ интегрируемого случая.

Из условия $B_1 = 0$ можно найти явное выражение для $\operatorname{tg}\lambda_r$ через другие параметры системы

$$\operatorname{tg}\lambda_r = \operatorname{tg}\lambda_f + \frac{2(a-2d)m_r l}{m_b h a + 2 m_r l d}\operatorname{tg}\lambda_f, \tag{1.8.1}$$

Подставляя найденное значение $\operatorname{tg}\lambda_r$ в выражения для A_1, $B_1, \ldots$, F_1, последовательно находим

$$A_1 = m_b + m_r, \qquad B_1 = 0,$$

$$C_1 = \frac{m_b m_r \left(m_b h^2 + m_r l^2\right)\left(a-2d\right)^2 + 4 I_z \left(m_b h + m_r l\right)^2}{\left(m_b h a + 2 m_r l d\right)^2}\operatorname{tg}^2\lambda_f,$$

$$D_1 = \frac{2\left(m_b h + m_r l\right)^2}{m_b h a + 2 m_r l d}\operatorname{tg}\lambda_f, \qquad E_1 = I_x + m_b h^2 + m_r l^2,$$

$$F_1 = \frac{4\left(m_b h + m_r l\right)^2\left(I_y - I_z + m_b h^2 + m_r l^2\right)}{\left(m_b h a + 2 m_r l d\right)^2}\operatorname{tg}^2\lambda_f.$$

Уравнения (1.4.2) запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}\left(A_1+\left(C_1-2D_1\right)\sin^2\gamma+F_1\sin^4\gamma\right)\dot{u}+\\+\left(C_1-3D_1+3F_1\sin^2\gamma\right)u\,\dot{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma=0,\\E_1\ddot{\gamma}+\left(D_1-F_1\sin^2\gamma\right)u^2\sin\gamma\cos\gamma+\\+k_1\gamma-\left(m_b h+m_r l\right)g\sin\gamma=0.\end{gathered}\tag{1.8.2}$$

Система уравнений (1.8.2) допускает интеграл энергии

$$\begin{gathered}H=\frac{A_1+\left(C_1-2D_1\right)\sin^2\gamma+F_1\sin^4\gamma}{2}u^2+\\+\frac{E_1}{2}\dot{\gamma}^2+\frac{k_1}{2}\gamma^2+\left(m_b h+m_r l\right)g\cos\gamma=c_0.\end{gathered}\tag{1.8.3}$$

Переходя в первом из уравнений (1.8.2) к новой независимой переменной – углу γ, можно записать данное уравнение в виде:

$$\frac{du}{d\gamma}=\frac{\left(3D_1-C_1-3F_1\sin^2\gamma\right)u\sin\gamma\cos\gamma}{\left(A_1+\left(C_1-2D_1\right)\sin^2\gamma+F_1\sin^4\gamma\right)}.\tag{1.8.4}$$

Уравнение (1.8.4) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, находим зависимость $u=u(\gamma)$. Подставляя найденную зависимость в интеграл энергии (1.8.3), получим дифференциальное уравнение для определения γ

$$\begin{gathered}\dot{\gamma}^2=\frac{2}{E_1}\left(c_0-\left(m_b h+m_r l\right)g\cos\gamma\right)-\frac{k_1}{E_1}\gamma^2-\\-\frac{\left(A_1+\left(C_1-2D_1\right)\sin^2\gamma+F_1\sin^4\gamma\right)}{E_1}u^2(\gamma).\end{gathered}\tag{1.8.5}$$

Уравнение (1.8.5) также является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, находим зависимость $\gamma=\gamma(t)$. Подставляя данную функцию в выражение для u, находим зависимость $u=u(\gamma(t))=u(t)$. После этого все оставшиеся неизвестные функции также могут быть выражены как функции времени. Действительно, для производной угла θ у нас имеется выражение

$$\dot{\theta}=-\frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}u\sin\gamma=-\frac{2\left(m_b h+m_r l\right)\mathrm{tg}\,\lambda_f}{m_b h a+2m_r l d}u\sin\gamma,$$

из которого, зная зависимости $u = u(t)$ и $\gamma = \gamma(t)$, однократным интегрированием находим

$$\theta = \theta_0 - \frac{2(m_b h + m_r l)\operatorname{tg}\lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d}\int_0^t u(\tau)\sin\gamma(\tau)d\tau . \tag{1.8.6}$$

Для производных $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ координат середины отрезка *AB*, соединяющего центры колесных пар скейтборда, имеем следующие выражения:

$$\dot{X} = u\cos\theta + \frac{(\operatorname{tg}\lambda_f - \operatorname{tg}\lambda_r)}{2}u\sin\gamma\sin\theta = u\cos\theta - \frac{(a-2d)m_r l\operatorname{tg}\lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d}u\sin\gamma\sin\theta,$$

$$\dot{Y} = u\sin\theta - \frac{(\operatorname{tg}\lambda_f - \operatorname{tg}\lambda_r)}{2}u\sin\gamma\cos\theta = u\sin\theta + \frac{(a-2d)m_r l\operatorname{tg}\lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d}u\sin\gamma\cos\theta.$$

откуда, имея явные выражения для функций $u = u(t)$, $\gamma = \gamma(t)$ и $\theta = \theta(t)$, находим

$$X = X_0 + \int_0^t u(\tau)\cos\theta(\tau)d\tau - \frac{(a-2d)m_r l\operatorname{tg}\lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d}\int_0^t u(\tau)\sin\gamma(\tau)\sin\theta(\tau)d\tau, \tag{1.8.7}$$

$$Y = Y_0 + \int_0^t u(\tau)\sin\theta(\tau)d\tau + \frac{(a-2d)m_r l\operatorname{tg}\lambda_f}{m_b h a + 2m_r l d}\int_0^t u(\tau)\sin\gamma(\tau)\cos\theta(\tau)d\tau. \tag{1.8.8}$$

Таким образом, при $B_1 = 0$ все неизвестные переменные задачи находятся при помощи квадратур (1.8.5)-(1.8.8). Однако и в этом случае дальнейшее исследование задачи остается весьма сложной задачей. Из уравнения (1.8.4) следует, что

$$u = u_0 \exp\big(G(\gamma) - G(\gamma_0)\big), \tag{1.8.9}$$

где положено

$$G(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^\gamma \frac{3D_1 - C_1 - 3F_1 \mathrm{w}}{A_1 + (C_1 - 2D_1)\mathrm{w}^2 + F_1\mathrm{w}^4}d\mathrm{w}, \quad \mathrm{w} = \sin^2\gamma . \tag{1.8.10}$$

Заметим интересную особенность полученного выражения для u. Если в начальный момент скорость $u_0 = 0$, то $u \equiv 0$. Таким образом, если начальная скорость скейтборда – нулевая, то сделать ее ненулевой только за счет изменения угла γ (т.е., другими словами, разогнать скейтборд за счет наклона доски и корпуса в поперечном направлении) невозможно.

Явное выражение интеграла (1.8.10) зависит от знака постоянной

$$4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2.$$

Если $4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2 < 0$, то

$$\begin{aligned} G(\gamma) = {} & \frac{C_1}{4\sqrt{\left(C_1 - 2D_1\right)^2 - 4A_1F_1}} \times \\ & \times \left(\ln\left| \frac{2F_1\sin^2\gamma + C_1 - 2D_1 - \sqrt{\left(C_1 - 2D_1\right)^2 - 4A_1F_1}}{2F_1\sin^2\gamma + C_1 - 2D_1 + \sqrt{\left(C_1 - 2D_1\right)^2 - 4A_1F_1}} \right| - \right. \\ & \left. - \ln\left| \frac{C_1 - 2D_1 - \sqrt{\left(C_1 - 2D_1\right)^2 - 4A_1F_1}}{C_1 - 2D_1 + \sqrt{\left(C_1 - 2D_1\right)^2 - 4A_1F_1}} \right| \right) - \\ & - \frac{3}{4}\ln\left| \frac{A_1 + \left(C_1 - 2D_1\right)\sin^2\gamma + F_1\sin^4\gamma}{A_1} \right|. \end{aligned} \qquad (1.8.11)$$

Если $4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2 > 0$, то

$$\begin{aligned} G(\gamma) = {} & \frac{C_1}{2\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}} \left(\operatorname{arctg}\frac{2F_1\sin^2\gamma + C_1 - 2D_1}{\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arctg}\frac{C_1 - 2D_1}{\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}} \right) - \frac{3}{4}\ln\left| \frac{A_1 + \left(C_1 - 2D_1\right)\sin^2\gamma + F_1\sin^4\gamma}{A_1} \right|. \end{aligned} \qquad (1.8.12)$$

Дискуссия о том, какой из этих случаев более соответствует реальной физической ситуации, содержится в Дополнении 1 к данной работе. Оказывается, реальной физической ситуации более соответствует случай, когда функция $G(\gamma)$ определяется формулой (1.8.12). В дальнейшем всюду предполагается, что функция $G(\gamma)$ определяется формулой (1.8.12).

Заметим, что явное выражение для функции $G(\gamma)$, а, следовательно, и явное выражения для $u(\gamma)$, является довольно сложным. Поэтому чтобы исследовать качественное поведение системы в интегрируемом случае, предположим, что угол γ является малым, так что приближенно можно считать

$$\sin\gamma \approx \gamma\,, \qquad \cos\gamma \approx 1-\frac{\gamma^2}{2}\,.$$

В результате первое уравнение системы (1.8.2) примет вид

$$\left(A_1+\left(C_1-2D_1\right)\gamma^2\right)\dot u+\left(C_1-3D_1\right)u\,\dot\gamma\,\gamma=0$$

или, разрешая уравнение относительно $\dot u$ и учитывая малость γ:

$$\dot u=\frac{\left(3D_1-C_1\right)u\,\dot\gamma\,\gamma}{A_1}\,.$$

Интегрируя данное уравнение, находим

$$u=K\exp\left(\frac{\left(3D_1-C_1\right)}{2A_1}\gamma^2\right).$$

Постоянную K находим из условия того, что в начальный момент $u=u_0$, а $\gamma=\gamma_0$. Тогда

$$u_0=K\exp\left(\frac{\left(3D_1-C_1\right)}{2A_1}\gamma_0^2\right)$$

откуда

$$u=u_0\exp\left(\frac{\left(3D_1-C_1\right)}{2A_1}\left(\gamma^2-\gamma_0^2\right)\right),$$

а с учетом малости γ окончательно имеем:

$$u=u_0+\frac{\left(3D_1-C_1\right)u_0}{2A_1}\left(\gamma^2-\gamma_0^2\right) \qquad (1.8.13)$$

Подставляя выражение (1.8.13) во второе уравнение для определения γ, находим, что γ будет удовлетворять уравнению

$$\ddot\gamma+\frac{D_1u_0^2+k_1-\left(m_b\,h+m_r\,l\right)g}{E_1}\gamma=0\,.$$

Будем считать, что мы имеем дело с ситуацией, когда

$$D_1u_0^2+k_1-\left(m_b\,h+m_r\,l\right)g>0\,.$$

Тогда, обозначая

$$\Omega^2 = \frac{D_1 u_0^2 + k_1 - \left(m_b h + m_r l\right) g}{E_1},$$

находим, что γ изменяется по закону

$$\gamma = \gamma_0 \cos\left(\Omega t\right) + \frac{\dot{\gamma}_0}{\Omega} \sin\left(\Omega t\right). \tag{1.8.14}$$

В дальнейшем дробь $\dot{\gamma}_0 / \Omega$ будем обозначать δ_0. Подставляя выражение (1.8.14) в формулу (1.8.13), находим зависимость u от времени:

$$\begin{aligned} u = u_0 + \frac{\left(3D_1 - C_1\right) u_0 \gamma_0 \delta_0}{2A_1} \sin\left(2\Omega t\right) + \\ + \frac{\left(3D_1 - C_1\right) u_0}{4A_1} \left(\gamma_0^2 - \delta_0^2\right)\left(\cos\left(2\Omega t\right) - 1\right). \end{aligned} \tag{1.8.15}$$

Уравнения для определения оставшихся неизвестных функций θ, X и Y имеют вид (1.8.6)-(1.8.8). Предположим, что начальные значения этих функций – нулевые, т.е.

$$\theta\left(0\right) = 0, \quad X\left(0\right) = 0, \quad Y\left(0\right) = 0. \tag{1.8.16}$$

Подставляя выражения (1.8.14)-(1.8.15) в формулу (1.8.6) и сохраняя только члены не выше второго порядка малости по γ_0 и δ_0, находим

$$\dot{\theta} = -\frac{2u_0 \left(m_b h + m_r l\right) \operatorname{tg} \lambda_f}{m_b h a + 2 m_r l d} \left(\gamma_0 \cos\left(\Omega t\right) + \delta_0 \sin\left(\Omega t\right)\right),$$

откуда с учетом начальных условий однократным интегрированием получаем

$$\theta = -\frac{2u_0 \left(m_b h + m_r l\right) \operatorname{tg} \lambda_f}{\left(m_b h a + 2 m_r l d\right)\Omega} \left(\gamma_0 \sin\left(\Omega t\right) + \delta_0 \left(1 - \cos\left(\Omega t\right)\right)\right). \tag{1.8.17}$$

Явные выражения для производных $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ имеют весьма громоздкий вид. Поэтому выпишем эти выражения только для двух случаев: когда $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$ и наоборот, когда $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$.

При $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$ выражение для $\dot{X}$ имеет вид

$$\dot{X} = u_0 + \frac{\left(3D_1 - C_1\right)u_0\delta_0^2}{4A_1}\left(1-\cos\left(2\Omega t\right)\right) +$$
$$+\frac{\left(m_b h + m_r l\right)\left(a-2d\right)m_r l u_0^2\delta_0^2 \operatorname{tg}^2\lambda_f}{\left(m_b h a + 2m_r l d\right)^2\Omega}\left(2\sin\left(\Omega t\right)-\sin\left(2\Omega t\right)\right)-$$
$$-\frac{\left(m_b h + m_r l\right)^2 u_0^3\delta_0^2 \operatorname{tg}^2\lambda_f}{\left(m_b h a + 2m_r l d\right)^2\Omega^2}\left(3+\cos\left(2\Omega t\right)-4\cos\left(\Omega t\right)\right).$$

Однократным интегрированием мы получаем, с учетом начальных условий (1.8.16), что координата X изменяется по закону

$$X = u_0 t + \frac{\left(3D_1 - C_1\right)u_0\delta_0^2}{4A_1}\left(t - \frac{\sin\left(2\Omega t\right)}{2\Omega}\right) +$$
$$+\frac{\left(m_b h + m_r l\right)\left(a-2d\right)m_r l u_0^2\delta_0^2 \operatorname{tg}^2\lambda_f}{2\left(m_b h a + 2m_r l d\right)^2\Omega^2}\left(3+\cos\left(2\Omega t\right)-4\cos\left(\Omega t\right)\right)- \quad (1.8.18)$$
$$-\frac{\left(m_b h + m_r l\right)^2 u_0^3\delta_0^2 \operatorname{tg}^2\lambda_f}{\left(m_b h a + 2m_r l d\right)^2\Omega^2}\left(3t+\frac{\sin\left(2\Omega t\right)}{2\Omega}-\frac{4}{\Omega}\sin\left(\Omega t\right)\right).$$

Выражение для $\dot{Y}$ при $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$ имеет вид

$$\dot{Y} = \frac{\left(a-2d\right)m_r l u_0\delta_0 \operatorname{tg}\lambda_f}{\left(m_b h a + 2m_r l d\right)}\sin\left(\Omega t\right) - \frac{2\left(m_b h + m_r l\right)u_0^2\delta_0 \operatorname{tg}\lambda_f}{\left(m_b h a + 2m_r l d\right)\Omega}\left(1-\cos\left(\Omega t\right)\right).$$

Отсюда с учетом начальных условий (1.8.16) мы получаем явное выражение для $Y(t)$:

$$Y = \frac{\left(a-2d\right)m_r l u_0\delta_0 \operatorname{tg}\lambda_f}{\left(m_b h a + 2m_r l d\right)\Omega}\left(1-\cos\left(\Omega t\right)\right)-$$
$$-\frac{2\left(m_b h + m_r l\right)u_0^2\delta_0 \operatorname{tg}\lambda_f}{\left(m_b h a + 2m_r l d\right)\Omega}\left(t-\frac{\sin\left(\Omega t\right)}{\Omega}\right). \quad (1.8.19)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что в случае $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$ при ненулевых начальных условиях $\left(u_0 \neq 0\right)$ координата $X(t)$ точки G – середины отрезка AB – линейно растет со временем. По координате $Y(t)$ также наблюдается линейный рост, однако коэффициент при t в выражении для $Y(t)$ имеет первый порядок малости. Поэтому линейный рост координаты $Y(t)$ является не столь значительным, как у $X(t)$.

Теперь укажем явные выражения для $X(t)$ и $Y(t)$ в случае, когда $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$. В этом случае выражение для $\dot{X}$ имеет вид

$$\dot{X} = u_0 - \frac{(3D_1 - C_1)u_0\gamma_0^2}{4A_1}(1-\cos(2\Omega t)) + \\ + \frac{(m_b h + m_r l)(a-2d)m_r l u_0^2 \gamma_0^2 \operatorname{tg}^2 \lambda_f}{(m_b h a + 2m_r l d)^2 \Omega}\sin(2\Omega t) - \\ - \frac{(m_b h + m_r l)^2 u_0^3 \gamma_0^2 \operatorname{tg}^2 \lambda_f}{(m_b h a + 2m_r l d)^2 \Omega^2}(1-\cos(2\Omega t)).$$

Таким образом, явное выражение для функции $X(t)$ при $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$ с учетом начальных условий (1.8.16) имеет вид:

$$X = u_0 t - \frac{(3D_1 - C_1)u_0\gamma_0^2}{4A_1}\left(t - \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega}\right) + \\ + \frac{(m_b h + m_r l)(a-2d)m_r l u_0^2 \gamma_0^2 \operatorname{tg}^2 \lambda_f}{2(m_b h a + 2m_r l d)^2 \Omega^2}(1-\cos(2\Omega t)) - \\ - \frac{(m_b h + m_r l)^2 u_0^3 \gamma_0^2 \operatorname{tg}^2 \lambda_f}{(m_b h a + 2m_r l d)^2 \Omega^2}\left(t - \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega}\right). \tag{1.8.20}$$

Выражение для $\dot{Y}$ при $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$ имеет вид

$$\dot{Y} = \frac{(a-2d)m_r l u_0 \gamma_0 \operatorname{tg}\lambda_f}{(m_b h a + 2m_r l d)}\cos(\Omega t) - \frac{2(m_b h + m_r l)u_0^2 \gamma_0 \operatorname{tg}\lambda_f}{(m_b h a + 2m_r l d)\Omega}\sin(\Omega t).$$

Тогда явное выражение для функции $Y(t)$ в случае $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$ может быть записано следующим образом:

$$Y = \frac{(a-2d)m_r l u_0 \gamma_0 \operatorname{tg}\lambda_f}{(m_b h a + 2m_r l d)\Omega}\sin(\Omega t) - \\ - \frac{2(m_b h + m_r l)u_0^2 \gamma_0 \operatorname{tg}\lambda_f}{(m_b h a + 2m_r l d)\Omega^2}(1-\cos(\Omega t)). \tag{1.8.21}$$

Анализ формул (1.8.20)-(1.8.21) позволяет сделать вывод, что в случае $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$ по координате $X(t)$ наблюдается линейный рост, тогда как координата $Y(t)$ изменяется периодически.

Система уравнений (1.8.2) исследовалась численно при следующих значениях параметров

$$m_b = 3 \text{ кг}, \quad m_r = 75.02 \text{ кг}, \quad h = 0.065 \text{ м}, \quad l = 1.037 \text{ м},$$

$$a = 0.78 \text{ м}, \quad d = a/2, \quad \operatorname{tg}\lambda_f = \operatorname{tg}\lambda_r = 1/3,$$

$$I_x = 11.64 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_y = 12.55 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_z = 1.32 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$k_1 = 510 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2.$$

Начальное значение скорости было выбрано равным

$$u_0 = 2 \text{ м/с}.$$

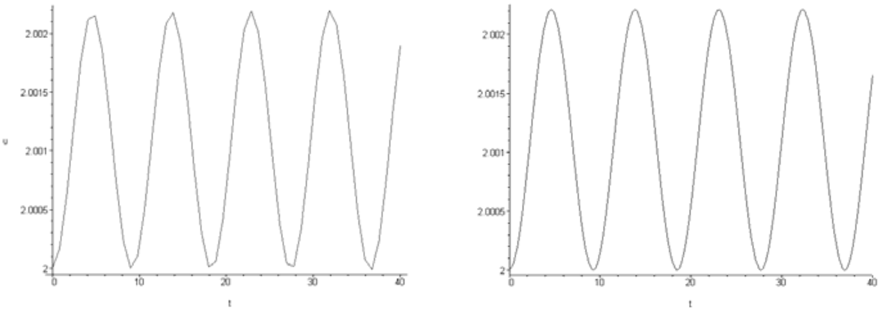
Начальные значения γ_0 и $\dot{\gamma}_0$ брались соответственно двум описанным выше случаям: в одном случае эти начальные величины были равны

$$\gamma_0 = 0 \text{ рад}, \quad \delta_0 = 0.01 \text{ рад},$$

а в другом случае были равны

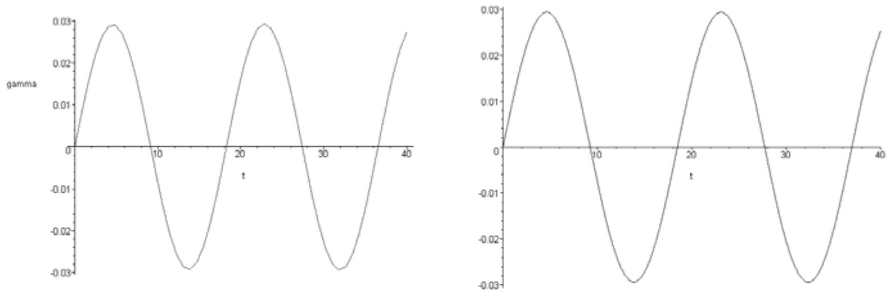
$$\gamma_0 = 0.05 \text{ рад}, \quad \delta_0 = 0 \text{ рад}.$$

При этом, помимо численного исследования, были построены графики всех неизвестных функций по найденным нами приближенным формулам (1.8.14)-(1.8.21). На приведенных ниже рисунках 8-17 слева представлены графики функций, построенные в результате численного исследования системы уравнений (1.8.2), а справа – графики тех же функций, построенные по соответствующим приближенным формулам. Из анализа графиков становится понятным, что приближенные формулы (1.8.14)-(1.8.21) хорошо аппроксимируют точное решение, как в случае $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$, так и в случае $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$.



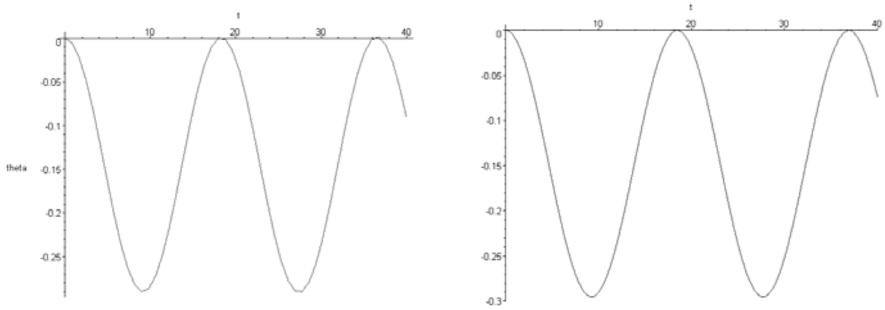
(а) (б)

Рис. 8. Зависимость скорости u от времени в случае $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$, полученная численно (а) и по приближенной формуле (б).



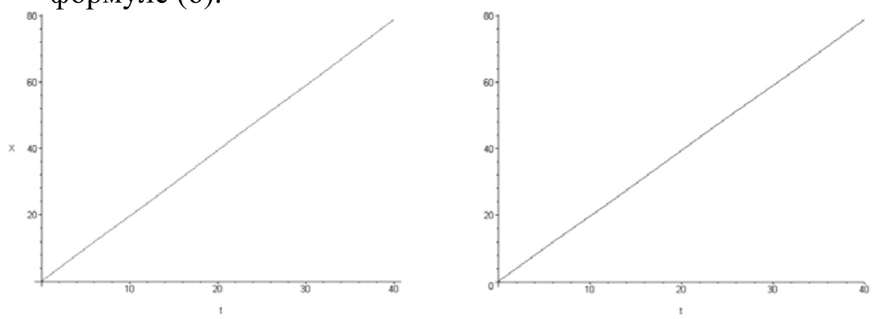
(а) (б)

Рис. 9. Зависимость угла γ от времени в случае $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$, полученная численно (а) и по приближенной формуле (б).



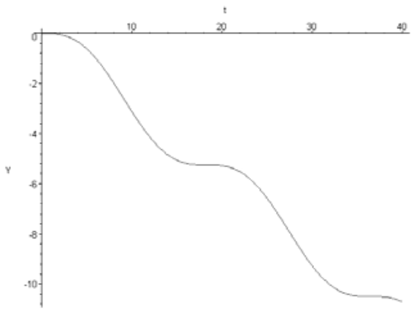
(а) (б)

Рис. 10. Зависимость угла θ от времени в случае $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$, полученная численно (а) и по приближенной формуле (б).



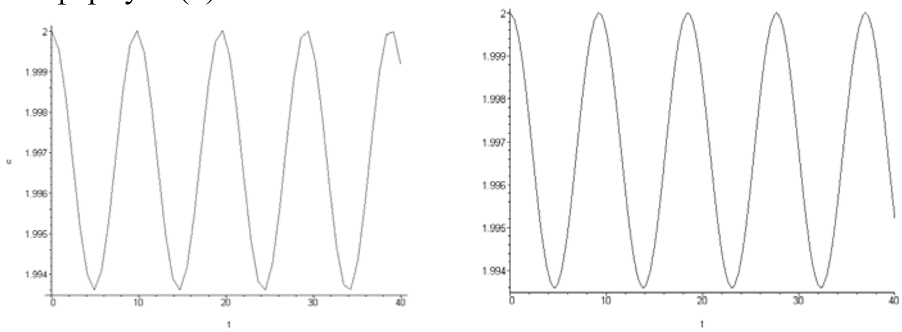
(а) (б)

Рис. 11. Зависимость координаты X от времени в случае $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$, полученная численно (а) и по приближенной формуле (б).



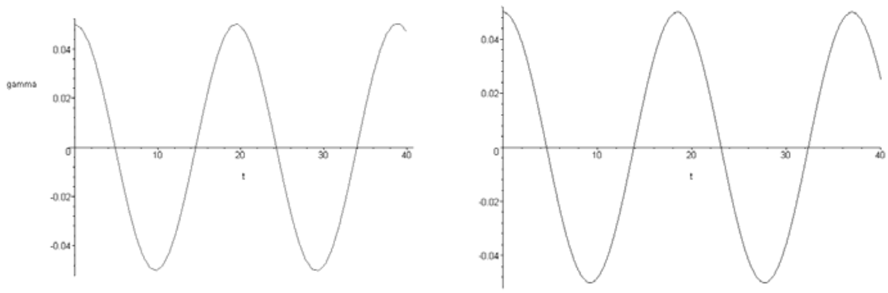
(а) (б)

Рис. 12. Зависимость координаты Y от времени в случае $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$, полученная численно (а) и по приближенной формуле (б).



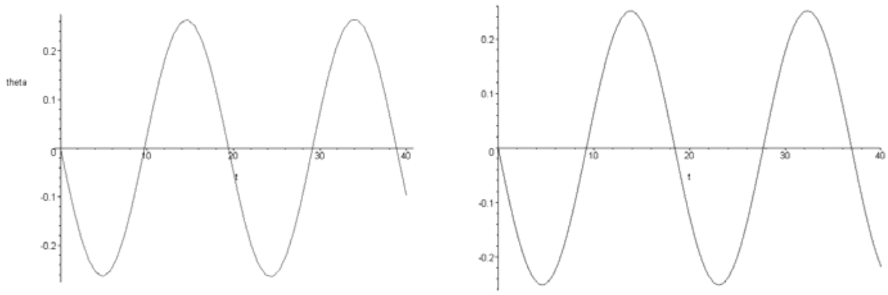
(а) (б)

Рис. 13. Зависимость скорости u от времени в случае $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$, полученная численно (а) и по приближенной формуле (б).



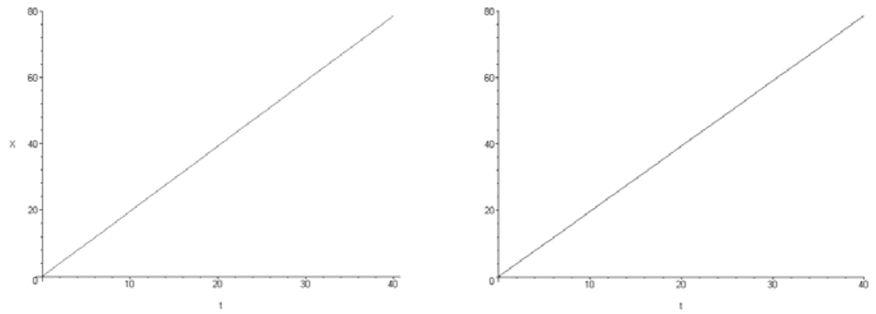
(а) (б)

Рис. 14. Зависимость угла γ от времени в случае $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$, полученная численно (а) и по приближенной формуле (б).



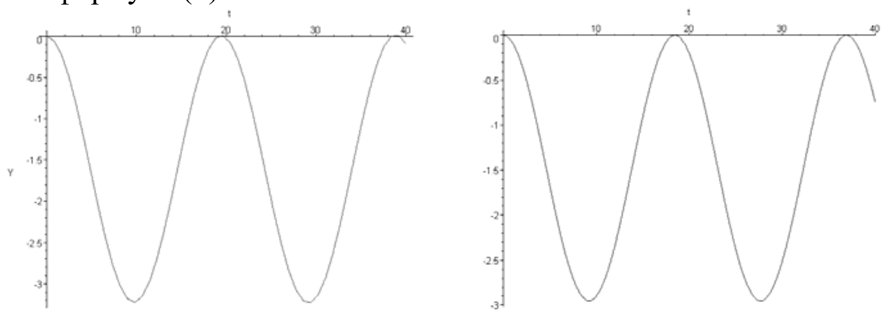
(а) (б)

Рис. 15. Зависимость угла θ от времени в случае $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$, полученная численно (а) и по приближенной формуле (б).



(а) (б)

Рис. 16. Зависимость координаты X от времени в случае $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$, полученная численно (а) и по приближенной формуле (б).



(а) (б)

Рис. 17. Зависимость координаты Y от времени в случае $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$, полученная численно (а) и по приближенной формуле (б).

В следующем пункте будет проведено исследование устойчивости стационарных движений системы в интегрируемом случае $B_1 = 0$.

9. Исследование устойчивости стационарных движений в интегрируемом случае.

В интегрируемом случае (при $B_1 = 0$) уравнения движения (1.8.2) допускают интеграл энергии (1.8.3), квадратичный по псевдоскоростям u и $\dot{\gamma}$, а также другой интеграл, существование которого следует из формулы (1.8.9). Этот интеграл может быть записан в виде

$$\begin{gathered}\left(A_1 + \left(C_1 - 2D_1\right)\sin^2\gamma + F_1 \sin^4\gamma\right)^{\frac{3}{4}} u \exp\left(-G_*\left(\gamma\right)\right) = j_1 , \\ G_*\left(\gamma\right) = \frac{C_1}{2\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}} \operatorname{arctg} \frac{2F_1 \sin^2\gamma + C_1 - 2D_1}{\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}}.\end{gathered} \tag{1.9.1}$$

Заметим, что интеграл (1.9.1) оказывается линейным относительно u. Этот факт существенно упрощает исследование устойчивости стационарных движений в данной задаче.

Действительно, в случае, когда неголономные системы допускают линейные по квазискоростям (обобщенным скоростям или псевдоскоростям) первые интегралы, известные в явном виде, исследование вопросов существования, устойчивости и ветвления стационарных движений таких систем основывается на модифицированной теории Рауса – Сальвадори, Пуанкаре – Четаева и Смейла [26, 33, 44, 45, 52, 65, 67, 97, 100, 101, 107]. Согласно этой теории, анализ вопросов существования, устойчивости и бифуркации стационарных движений неголономной системы сводится к анализу эффективного потенциала этой системы. В Дополнении 2 изложены основные положения данного подхода.

Пусть $W = W(\gamma)$ – минимум функции H (интеграла энергии (1.8.3)) по переменным $\dot{\gamma}$ и u на уровне j_1 интеграла, определяемого соотношением (1.9.1). Таким образом,

$$W(\gamma) = \min_{u,\dot{\gamma}} H = \frac{A_1 + (C_1 - 2D_1)\sin^2\gamma + F_1 \sin^4\gamma}{2} u^2(\gamma) + \\ + \frac{k_1}{2}\gamma^2 + (m_b h + m_r l) g \cos\gamma, \tag{1.9.2}$$

где функция $u(\gamma)$ определяется из соотношения (1.9.1). Из общей теории следует (см. Дополнение 2), что критическим точкам данного эффективного потенциала отвечают стационарные движения системы, причем точка минимума – устойчивые стационарные движения. Таким образом, стационарные движения, рассматриваемой системы определяются из условия

$$\left.\frac{dW}{d\gamma}\right|_{\gamma = \gamma_0} = 0,$$

при этом производная $du/d\gamma$ вычисляется по формуле (1.8.4). В явном виде это условие записывается следующим образом:

$$u_0^2\left(D_1 - F_1\sin^2\gamma_0\right)\sin\gamma_0\cos\gamma_0 + k_1\gamma_0 - \left(m_b\,h + m_r\,l\right)g\sin\gamma_0 = 0\,. \qquad (1.9.3)$$

Условие (1.9.3) может быть легко получено и из других соображений. Действительно, если положить $\gamma = \gamma_0 = \mathrm{const}$ во втором уравнении системы (1.8.2), то мы получим данное условие.

Соотношение (1.9.3) определяет однопараметрическое семейство стационарных движений системы – две постоянные

$$u = u_0 = \mathrm{const}\,, \qquad \gamma = \gamma_0 = \mathrm{const}$$

связаны одним соотношением.

Из условия (1.9.3) следует, что при любом значении параметра u_0 существует стационарное движение (см. формулу (1.6.1))

$$u = u_0 = \mathrm{const}\,, \qquad \gamma = 0\,,$$

которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда с постоянной скоростью. Устойчивость данного стационарного движения при $B_1 \neq 0$ (в общем случае) уже исследовалась нами выше в первом приближении путем анализа корней характеристического уравнения. Мы отмечали, что при $B_1 = 0$ характеристическое уравнение (1.6.3) имеет один нулевой и два чисто мнимых корня, если выполнены условия (1.6.8). Теперь мы можем дать строгие выводы об устойчивости данного стационарного движения при $B_1 = 0$.

Действительно, неравенство

$$\frac{d^2W}{d\gamma^2} > 0\,,$$

в которое подставлено значение $\gamma = 0$ дает необходимое и достаточное условие устойчивости стационарного движения (1.6.1) в виде

$$D_1 u_0^2 + k_1 - \left(m_b\,h + m_r\,l\right)g > 0\,.$$

Видно, что данное неравенство в точности совпадает с условием (1.6.8) – необходимым условием устойчивости стационарного движения (1.6.1).

Учитывая тот факт, как записывается постоянная D_1 при $B_1 = 0$, можно привести условие (1.6.8) к виду

$$\frac{2\left(m_b h + m_r l\right)^2}{m_b h a + 2 m_r l d} \operatorname{tg} \lambda_f u_0^2 + k_1 - \left(m_b h + m_r l\right) g > 0. \qquad (1.9.4)$$

Анализируя условие (1.9.4), можно сделать следующие выводы. Если скейтборд является статически устойчивым, т.е. выполняется условие (1.6.7), при котором устойчиво положение равновесия

$$u_0 = 0, \qquad \gamma = 0,$$

то, согласно условию (1.9.4), стационарное движение (1.6.1) будет устойчиво при любом значении скорости u_0. Если же условие статической устойчивости (1.6.7) не выполняется, то скейтборд может быть стабилизирован, если скорость u_0 превосходит некоторое критическое значение

$$u_0^2 > u_*^2 = \frac{\left(\left(m_b h + m_r l\right) g - k_1\right)\left(m_b h a + 2 m_r l d\right) \operatorname{ctg} \lambda_f}{2\left(m_b h + m_r l\right)^2}. \qquad (1.9.5)$$

В симметричном случае, когда $\lambda_f = \lambda_r = \lambda$, $d = a/2$ условие (1.9.5) может быть записано в виде

$$u_0^2 > u_*^2 = \frac{\left(\left(m_b h + m_r l\right) g - k_1\right) a \operatorname{ctg} \lambda_f}{2\left(m_b h + m_r l\right)}. \qquad (1.9.6)$$

Впервые неравенство (1.9.6) было получено в работе [92] в качестве условия устойчивости прямолинейного равномерного движения симметричной модели скейтборда.

При переходе через значение $u_0^2 = u_*^2$ меняется характер устойчивости стационарного движения (1.6.1). Это означает, что существуют и другие стационарные движения, отличные от прямолинейного равномерного движения скейтборда. Эти движения определяются соотношениями

$$u = u_0 = \text{const}, \qquad \gamma = \gamma_0 = \text{const} \qquad (1.9.7)$$

с $\gamma_0 \neq 0$. Стационарные движения (1.9.7) представляют собой движение скейтборда с постоянной скоростью u_0 по окружности, центр и радиус которой определяются начальными условиями. Условие устойчивости этих стационарных движений имеет вид

$$\left.\frac{d^2W}{d\gamma^2}\right|_{\gamma=\gamma_0} > 0,$$

или в явном виде

$$\frac{P_4\left(\sin^2\gamma_0\right)}{A_1 + \left(C_1 - 2D_1\right)\sin^2\gamma_0 + F_1\sin^4\gamma_0}u_0^2 + k_1 - \left(m_b h + m_r l\right)g\cos\gamma_0 > 0, \quad (1.9.8)$$

где $P_4\left(\sin^2\gamma\right)$ – полином 4-ой степени относительно $\sin^2\gamma$ с постоянными коэффициентами

$$P_4\left(\sin^2\gamma\right) = A_1D_1 + \left(4D_1^2 - C_1D_1 - 3A_1F_1 - 2A_1D_1\right)\sin^2\gamma +$$
$$+\left(4A_1F_1 - 5D_1F_1 - 2D_1^2 - C_1F_1\right)\sin^4\gamma + \left(3F_1 + 2C_1 + 2D_1\right)F_1\sin^6\gamma - 2F_1^2\sin^8\gamma.$$

Условие устойчивости (1.9.8) стационарного движения (1.9.7) скейтборда имеет довольно громоздкий вид. Поэтому детальное аналитическое исследование полученных условий существования и устойчивости стационарных движений системы представляет собой отдельную, весьма сложную задачу. В данной работе будут представлены только результаты численного анализа условий существования и устойчивости стационарных движений при изменении лишь одного параметра

$$\tilde{p} = \frac{\left(m_b h + m_r l\right)g}{k_1} -$$

отношения постоянной $\left(m_b h + m_r l\right)g$ момента силы тяжести к постоянной k_1 восстанавливающего момента.

Поскольку ранее мы предположили, что параметры системы связаны соотношением $4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2 > 0$, то из формулы (1.9.1) следует явное выражение скорости $u(\gamma)$ через постоянную j_1 дополнительного первого интеграла

$$u = \frac{j_1}{\left(A_1 + \left(C_1 - 2D_1\right)\sin^2\gamma + F_1\sin^4\gamma\right)^{3/4}} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{C_1}{2\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}} \operatorname{arctg}\frac{2F_1\sin^2\gamma + C_1 - 2D_1}{\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}}\right)$$

Подстановка данного выражения в условие (1.9.2) дает

$$\frac{j_1^2\sin\gamma\cos\gamma\left(D_1 - F_1\sin^2\gamma\right)}{\left(A_1 + \left(C_1 - 2D_1\right)\sin^2\gamma + F_1\sin^4\gamma\right)^{3/2}} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{C_1}{\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}} \operatorname{arctg}\frac{2F_1\sin^2\gamma + C_1 - 2D_1}{\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}}\right) + \qquad (1.9.9)$$
$$+ k_1\gamma - \left(m_b h + m_r l\right) g\sin\gamma = 0.$$

Запишем соотношение (1.9.9) в безразмерном виде. Введем безразмерные постоянные

$$\tilde{A}_1 = \frac{A_1}{\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}}, \qquad \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}},$$
$$\tilde{D}_1 = \frac{D_1}{\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}}, \qquad \tilde{F}_1 = \frac{F_1}{\sqrt{4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2}},$$
$$\tilde{p} = \frac{\left(m_b h + m_r l\right) g}{k_1}.$$

Разделим теперь соотношение (1.9.9) на k_1 и введем безразмерную постоянную s_1 первого интеграла по формуле

$$s_1 = \frac{j_1}{\left(4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2\right)^{1/8} k_1^{1/2}}.$$

Тогда соотношение (1.9.9) перепишется следующим образом:

$$\frac{s_1^2 \sin\gamma \cos\gamma \left(\tilde{D}_1 - \tilde{F}_1 \sin^2\gamma\right)}{\left(\tilde{A}_1 + \left(\tilde{C}_1 - 2\tilde{D}_1\right)\sin^2\gamma + \tilde{F}_1 \sin^4\gamma\right)^{3/2}} \times$$
$$\times \exp\left(\tilde{C}_1 \operatorname{arctg}\left(2\tilde{F}_1 \sin^2\gamma + \tilde{C}_1 - 2\tilde{D}_1\right)\right) + \gamma - \tilde{p}\sin\gamma = 0 \qquad (1.9.10)$$

Для численного исследования условия (1.9.10) выберем следующие значения параметров системы

$$m_b = 3 \text{ кг}, \quad m_r = 75.02 \text{ кг}, \quad h = 0.065 \text{ м}, \quad l = 1.037 \text{ м},$$

$$a = 0.78 \text{ м}, \quad d = a/2, \quad \operatorname{tg}\lambda_f = \operatorname{tg}\lambda_r = 1/3, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2,$$

$$I_x = 11.64 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_y = 12.55 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_z = 1.32 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Заметим, что условие (1.9.10) не меняет своего вида при замене $\gamma \to -\gamma$, $s_1 \to -s_1$. Поэтому будем исследовать данное соотношение только при $s_1 > 0$, $\gamma \in [0, \pi/2)$. Следует отметить, что выбор столь широкого промежутка изменения γ представляет лишь теоретический интерес. На практике угол γ не превосходит значения $\pi/6$. Безразмерные параметры задачи $\tilde{A}_1$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{D}_1$ и $\tilde{F}_1$ при этом будут равны

$$\tilde{A}_1 = 1.35, \quad \tilde{C}_1 = 0.016, \quad \tilde{D}_1 = 1.137, \quad \tilde{F}_1 = 1.145.$$

Легко видеть, что при таком выборе параметров выражение $\tilde{D}_1 - \tilde{F}_1 \sin^2\gamma$ на интервале $\gamma \in [0, \pi/2)$ меняет знак с положительного на отрицательный только один раз, при $\gamma = \gamma_*$ таком, что $\sin\gamma_* \approx 0.996$. Будем менять параметр $\tilde{p}$ и следить, как меняется на плоскости (s_1, γ) график функции, заданной неявно соотношением (1.9.10). Каждая точка этого графика определяет некоторое стационарное движение системы, и если мы обозначим на графике устойчивые и неустойчивые стационарные движения, то в результате получим бифуркационную диаграмму Пуанкаре – Четаева.

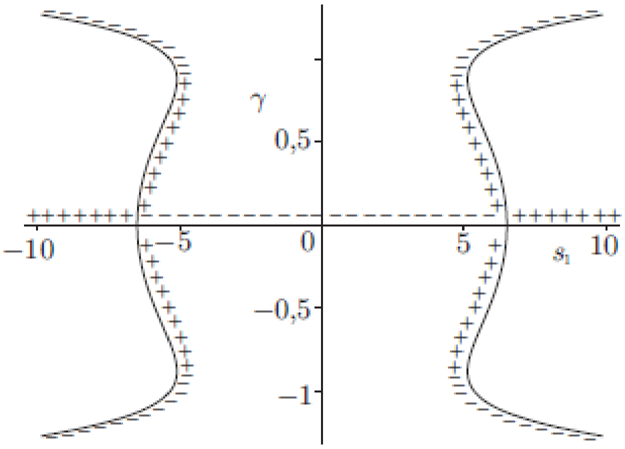


Рис 18. Бифуркационная диаграмма при $\tilde{p} > \pi/2$

Предположим сначала, сто параметр $\tilde{p}$ достаточно велик $\tilde{p} > \pi/2$, так что выражение $\gamma - \tilde{p}\sin\gamma$ будет отрицательным при всех значениях $\gamma \in (0, \pi/2)$. Тогда для любого $\gamma \in (0, \gamma_*)$ существует решение уравнения (1.9.10) в виде

$$s_1^2 = \frac{(\tilde{p}\sin\gamma - \gamma)\left(\tilde{A}_1 + (\tilde{C}_1 - 2\tilde{D}_1)\sin^2\gamma + \tilde{F}_1\sin^4\gamma\right)^{3/2}}{\sin\gamma\cos\gamma\left(\tilde{D}_1 - \tilde{F}_1\sin^2\gamma\right)} \times$$
$$\times \exp\left(-\tilde{C}_1 \operatorname{arctg}\left(2\tilde{F}_1\sin^2\gamma + \tilde{C}_1 - 2\tilde{D}_1\right)\right).$$

При $\gamma \in [\gamma_*, \pi/2)$ решение уравнения (1.9.10) не существует. На плоскости (s_1, γ) график неявной функции, заданной соотношением (1.9.10), имеет в этом случае вид Рис. 18.

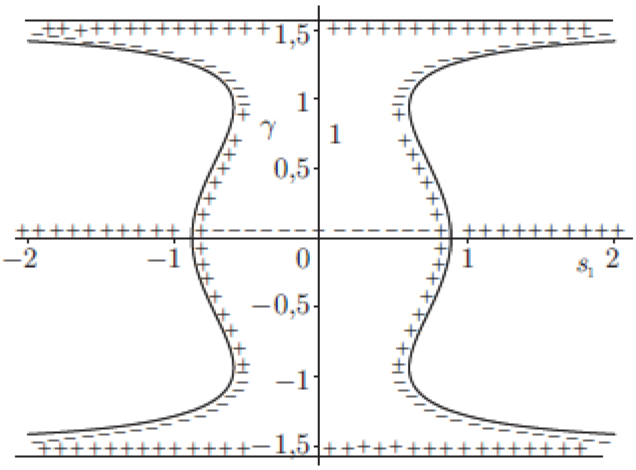
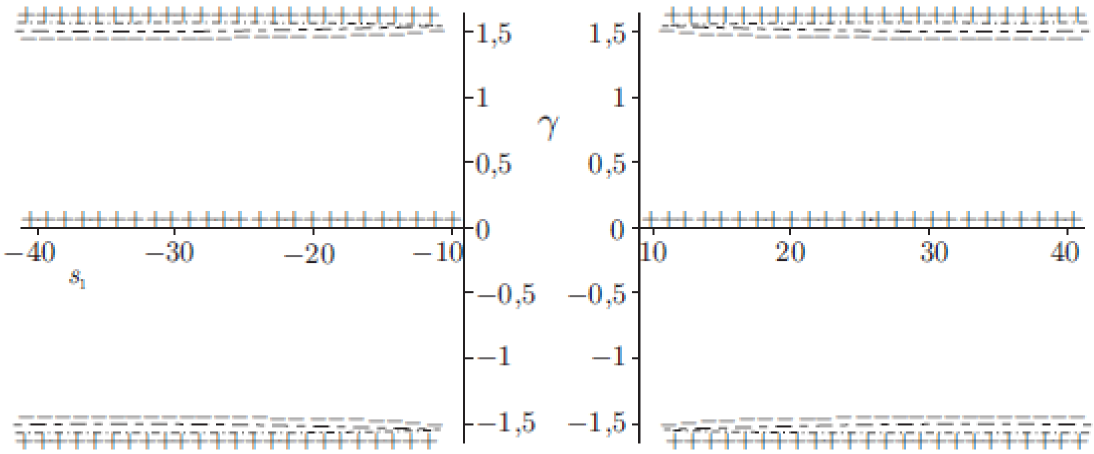


Рис 19. Бифуркационная диаграмма при $\sqrt{\frac{\tilde{F}_1}{\tilde{D}_1}} \arcsin\sqrt{\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{F}_1}} \le \tilde{p} \le \frac{\pi}{2}$

Предположим теперь, что

$$\sqrt{\frac{\tilde{F}_1}{\tilde{D}_1}}\arcsin\sqrt{\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{F}_1}} \le \tilde{p} \le \frac{\pi}{2}.$$

В этом случае выражение $\gamma - \tilde{p}\sin\gamma$ на интервале $\gamma \in [0, \pi/2)$ меняет знак с отрицательного на положительный один раз, причем значение γ_{**}, при котором это происходит, будет больше значения γ_*. Тогда решение уравнения (1.9.10) существует при $\gamma \in [0, \gamma_*)$ и при $\gamma \in (\gamma_{**}, \pi/2)$. Соответствующий график на плоскости (s_1, γ) имеет вид Рис. 19.



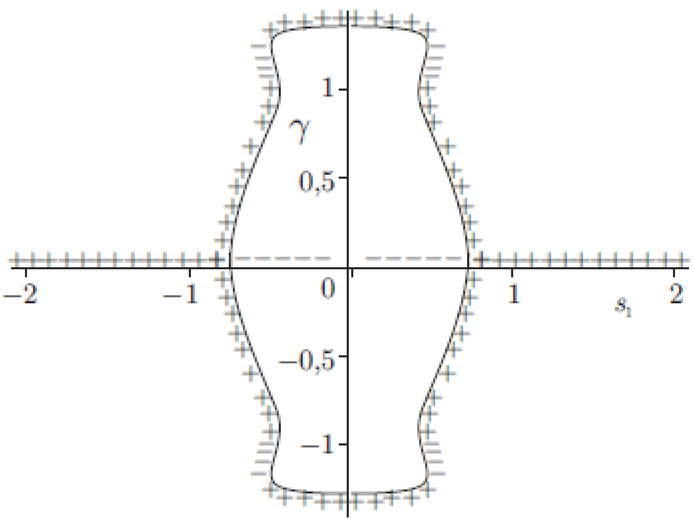


Рис 20. Бифуркационная диаграмма при $1 \le \tilde{p} \le \sqrt{\frac{\tilde{F}_1}{\tilde{D}_1}}\arcsin\sqrt{\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{F}_1}}$

Пусть теперь параметр $\tilde{p}$ изменяется в пределах

$$1 \le \tilde{p} \le \sqrt{\frac{\tilde{F}_1}{\tilde{D}_1}}\arcsin\sqrt{\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{F}_1}}.$$

В этом случае выражение $\gamma - \tilde{p}\sin\gamma$ при $\gamma \in [0, \pi/2)$ меняет знак с отрицательного на положительный один раз, причем значение γ_{**}, при котором это происходит, будет меньше значения γ_*. Тогда решение уравнения (1.9.10) существует при $\gamma \in [0, \gamma_{**}]$ и при $\gamma \in (\gamma_*, \pi/2)$. Соответствующий график на плоскости (s_1, γ) имеет вид Рис. 20.

Рассмотрим, наконец, последнюю возможность: $\tilde{p} \le 1$. В этом случае выражение $\gamma - \tilde{p}\sin\gamma$ положительно при всех $\gamma \in (0, \pi/2)$. Поэтому существует два вида решений – нулевое решение $\gamma = 0$ и решение при $\gamma \in (\gamma_*, \pi/2)$. Соответствующий график имеет вид Рис. 21.

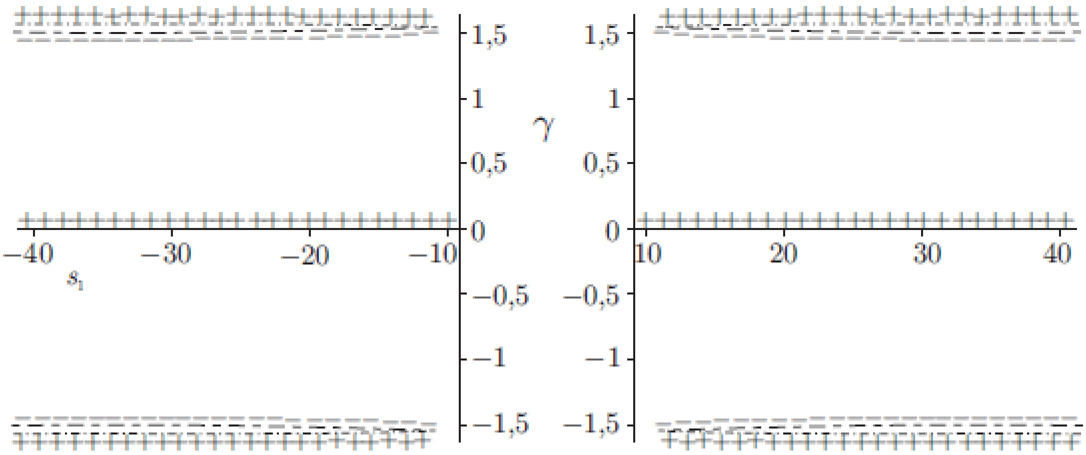


Рис 21. Бифуркационная диаграмма при $\tilde{p} \le 1$

Таким образом, мы дали полное численное исследование существования у данной системы различных стационарных движений. Как уже говорилось, подробное аналитическое исследование устойчивости и ветвления этих движений представляет собой отдельную, весьма громоздкую задачу.

В следующем пункте изучается поведение системы вблизи положения равновесия $u_0 = 0$, $\gamma = 0$ в общем случае, при $B_1 \ne 0$.

10. Анализ движения системы вблизи положения равновесия.

Пусть в стационарном движении (1.6.1) скорость $u_0 = 0$, т.е. скейтборд стоит на плоскости неподвижно. Необходимым и достаточным условием устойчивости этого положения равновесия будет, согласно результатам, полученным выше, выполнение неравенства (1.6.7). Пусть это условие выполняется. Рассмотрим движение системы вблизи положения равновесия. Для этого разрешим сначала уравнения (1.4.2) относительно $\dot{u}$ и $\ddot{\gamma}$. Тогда эти уравнения примут вид

$$
\begin{aligned}
\dot{u} = {} & \frac{\left(E_1\dot{\gamma}^2 + \left(D_1 - F_1\sin^2\gamma\right)u^2\cos^2\gamma\right)B_1\sin^2\gamma}{Q} + \\
& + \frac{\left(k_1\gamma - \left(m_b h + m_r l\right)g\sin\gamma\right)B_1\sin\gamma\cos\gamma}{Q} + \\
& + \frac{\left(3D_1E_1 - C_1E_1 + B_1^2 - \left(3F_1E_1 + B_1^2\right)\sin^2\gamma\right)u\dot{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma}{Q}, \\
\ddot{\gamma} = {} & -\frac{B_1^2\dot{\gamma}^2\sin^3\gamma\cos\gamma + \left(A_1 + D_1\sin^2\gamma - 2F_1\sin^4\gamma\right)B_1 u\dot{\gamma}\cos^2\gamma}{Q} - \\
& - \frac{\left(A_1 + \left(C_1 - 2D_1\right)\sin^2\gamma + F_1\sin^4\gamma\right)}{Q}\times \\
& \times\left(\left(D_1 - F_1\sin^2\gamma\right)u^2\sin\gamma\cos\gamma + k_1\gamma - \left(m_b h + m_r l\right)g\sin\gamma\right).
\end{aligned}
\tag{1.10.1}
$$

Здесь через Q обозначено следующее выражение

$$
Q = A_1E_1 + \left(\left(C_1 - 2D_1\right)E_1 - B_1^2\right)\sin^2\gamma + \left(B_1^2 + F_1E_1\right)\sin^4\gamma .
$$

Заметим, что система уравнений (1.10.1) инвариантна относительно замены $B_1 \to -B_1$, $u \to -u$. Поэтому в дальнейшем будем для определенности считать, что $B_1 > 0$ (случай $B_1 < 0$ исследуется аналогично). В этом случае значение $u_0 > 0$ определяет устойчивое направление движения, а значение $u_0 < 0$ – неустойчивое направление движения.

Полагая теперь u и γ малыми величинами, выпишем уравнения возмущенного движения системы с учетом членов до второго порядка малости включительно:

$$\dot{u} = \frac{B_1\left(k_1 - \left(m_b h + m_r l\right)g\right)}{A_1 E_1}\gamma^2,$$

$$\ddot{\gamma} + \frac{k_1 - \left(m_b h + m_r l\right)g}{E_1}\gamma = -\frac{B_1 u \dot{\gamma}}{E_1}.$$

Вводя обозначение

$$\Omega_1^2 = \frac{k_1 - \left(m_b h + m_r l\right)g}{E_1},$$

окончательно приведем уравнения возмущенного движения к виду

$$\begin{aligned} &\dot{u} = \frac{B_1\Omega_1^2}{A_1}\gamma^2, \\ &\ddot{\gamma} + \Omega_1^2\gamma = -\frac{B_1 u \dot{\gamma}}{E_1}. \end{aligned} \tag{1.10.2}$$

Заметим, что линейная часть второго уравнения системы (1.10.2) уже приведена к виду, соответствующему нормальным колебаниям. Для исследования нелинейной системы (1.10.2) приведем ее к нормальной форме [4, 16, 39]. Подробности того, как приводить систему дифференциальных уравнений к нормальной форме, изложены в Дополнении 3. Нормализующая замена переменных позволяет оставить в уравнениях движения только те из нелинейных членов, которые определяют качественный характер движения и исключить несущественные члены. Для получения нормальной формы (1.10.2) удобно сначала сделать замену переменных, вводящую пару комплексно сопряженных переменных z_1 и z_2:

$$\gamma = \frac{z_1 - z_2}{2i}, \quad \dot{\gamma} = \frac{z_1 + z_2}{2}\Omega_1, \quad u = z_3.$$

В переменных z_1, z_2, z_3 система уравнений (1.10.2) примет вид

$$\dot{z}_1 = i\Omega_1 z_1 - \frac{B_1}{2E_1}\left(z_1 + z_2\right) z_3,$$

$$\dot{z}_2 = -i\Omega_1 z_2 - \frac{B_1}{2E_1}\left(z_1 + z_2\right) z_3, \tag{1.10.3}$$

$$\dot{z}_3 = -\frac{B_1}{4A_1}\left(z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2\right).$$

Заметим, что линейная часть системы (1.10.3) имеет диагональную форму, и получение нормальной формы сводится к выделению резонансных членов в правых частях системы (1.10.3).

Заменой переменных

$$y_1 = z_1 + \frac{iB_1}{4\Omega_1 E_1} z_2 z_3, \quad y_2 = z_2 - \frac{iB_1}{4\Omega_1 E_1} z_1 z_3, \quad y_3 = z_3 + \frac{iB_1\Omega_1}{8A_1}\left(z_2^2 - z_1^2\right),$$

или (с точностью до членов порядка малости выше второго)

$$z_1 = y_1 - \frac{iB_1}{4\Omega_1 E_1} y_2 y_3, \quad z_2 = y_2 + \frac{iB_1}{4\Omega_1 E_1} y_1 y_3, \quad z_3 = y_3 + \frac{iB_1\Omega_1}{8A_1}\left(y_1^2 - y_2^2\right),$$

система уравнений (1.10.3) приводится к системе

$$\dot{y}_1 = i\Omega_1 y_1 - \frac{B_1}{2E_1} y_1 y_3,$$

$$\dot{y}_2 = -i\Omega_1 y_2 - \frac{B_1}{2E_1} y_2 y_3, \tag{1.10.4}$$

$$\dot{y}_3 = \frac{B_1\Omega_1^2}{2A_1} y_1 y_2.$$

Вводя вещественные полярные координаты согласно формулам

$$y_1 = \rho_1\left(\cos\sigma_1 + i\sin\sigma_1\right), \quad y_2 = \rho_1\left(\cos\sigma_1 - i\sin\sigma_1\right), \quad y_3 = \rho_2$$

из системы (1.10.4) получим нормализованную систему уравнений возмущенного движения, которая распадается на две независимые подсистемы:

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{B_1}{2E_1}\rho_1\rho_2, \quad \dot{\rho}_2 = \frac{B_1\Omega_1^2}{2A_1}\rho_1^2, \tag{1.10.5}$$

$$\dot{\sigma}_1 = \Omega_1. \tag{1.10.6}$$

В (1.10.5) отброшены члены выше второго порядка, а в (1.10.6) – выше первого порядка относительно ρ_1, ρ_2.

В ε-окрестности положения равновесия правые части уравнений (1.10.5) и (1.10.6) отличаются от отвечающих им правых частей точных уравнений возмущенного движения на величины порядка ε^3 и ε^2 соответственно. Решения точных уравнений аппроксимируются решениями системы (1.10.5)-(1.10.6) с погрешностью ε^2 для ρ_1, ρ_2 и порядка ε для σ_1 на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. Ограничиваясь этой точностью, будем вместо полных уравнений возмущенного движения рассматривать приближенную систему (1.10.5)-(1.10.6).

Уравнение (1.10.6) сразу интегрируется. Получаем

$$\sigma_1 = \Omega_1 t + \sigma_0 .$$

Система (1.10.5) описывает эволюцию амплитуды ρ_1 колебаний доски и скорости ρ_2 прямолинейного движения скейтборда. Легко показать, что данная система имеет первый интеграл

$$E_1 \rho_1^2 + \frac{A_1}{\Omega_1^2} \rho_2^2 = A_1 n_1^2 , \qquad (1.10.7)$$

где n_1 – постоянная, определяемая начальными условиями.

Действительно, если умножить первое уравнение системы (1.10.5) на $2E_1 \rho_1$, а второе – на $2A_1 \rho_2 / \Omega_1^2$ и сложить, то в результате получим

$$2E_1 \rho_1 \dot{\rho}_1 + \frac{2A_1}{\Omega_1^2} \rho_2 \dot{\rho}_2 = 0 ,$$

откуда следует, что у системы (1.10.5) существует первый интеграл (1.10.7). Воспользуемся этим интегралом для решения системы уравнений (1.10.5) и получения явных зависимостей $\rho_1 = \rho_1(t)$ и $\rho_2 = \rho_2(t)$. Из интеграла (1.10.7) находим

$$\rho_1^2 = \frac{A_1}{\Omega_1^2 E_1} \left(\Omega_1^2 n_1^2 - \rho_2^2 \right) . \qquad (1.10.8)$$

Подставляя данное выражение во второе уравнение системы (1.10.5) получаем дифференциальное уравнение для определения ρ_2:

$$\dot{\rho}_2 = \frac{B_1}{2E_1}\left(\Omega_1^2 n_1^2 - \rho_2^2\right). \tag{1.10.9}$$

Уравнение (1.10.9) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Его интегрирование дает явный вид функции ρ_2 в зависимости от времени

$$\rho_2(t) = \frac{\Omega_1 n_1\left(1 - n_2 \exp\left(-\frac{B_1 \Omega_1 n_1}{E_1}t\right)\right)}{\left(1 + n_2 \exp\left(-\frac{B_1 \Omega_1 n_1}{E_1}t\right)\right)}, \tag{1.10.10}$$

где n_2 – неотрицательная произвольная постоянная.

Подставим выражение (1.10.10) в (1.10.8), производя упрощения и извлекая корень, получим явный вид функции ρ_1 в зависимости от времени

$$\rho_1(t) = 2\sqrt{\frac{A_1 n_1^2 n_2}{E_1}}\frac{\exp\left(-\frac{B_1 \Omega_1 n_1}{2E_1}t\right)}{\left(1 + n_2 \exp\left(-\frac{B_1 \Omega_1 n_1}{E_1}t\right)\right)}. \tag{1.10.11}$$

Остановимся подробно на свойствах решений (1.10.10), (1.10.11) системы (1.10.5) и их связи с характером движения скейтборда. Система (1.10.5) имеет положение равновесия

$$\rho_1 = 0, \qquad \rho_2 = \Omega_1 n_1 \tag{1.10.12}$$

(эти частные решения могут быть получены из общих зависимостей (1.10.10)-(1.10.11) если положить в них $n_2 = 0$). При этом произвольная постоянная n_1 может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Положительные значения постоянной n_1 соответствует прямолинейному движению скейтборда с малой скоростью в устойчивом направлении, а отрицательные – в неустойчивом. Действительно, линеаризованные в окрестности равновесия (1.10.12) уравнения (1.10.5) дают

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{B_1}{2E_1}\Omega_1 n_1 \rho_1, \qquad \dot{\rho}_2 = 0.$$

Таким образом, при $n_1 > 0$ положение равновесия устойчиво, а при $n_1 < 0$ – неустойчиво.

Зависимости функций ρ_1 и ρ_2 от времени дают полное представление о характере движения скейтборда при малых скоростях. Будем считать, что мы находимся в окрестности устойчивого равновесия $(n_1 > 0)$, и в начальный момент времени $\rho_2(0) > 0$, т.е. $n_2 < 1$ (случай $n_1 > 0$, $n_2 > 1$ аналогичен случаю $n_1 < 0$, $n_2 < 1$, который будет рассмотрен ниже). Эти условия соответствует тому, что в начальный момент скейтборд получил малую скорость

$$\rho_2(0) = \Omega_1 n_1 \frac{1-n_2}{1+n_2}$$

в устойчивом направлении. Тогда с течением времени амплитуды колебаний доски ρ_1 монотонно убывают от ее начального значения

$$\rho_1(0) = \frac{2n_1}{1+n_2}\sqrt{\frac{A_1 n_2}{E_1}}$$

до нуля (Рис. 22), а скорость движения скейтборда ρ_2 возрастает по модулю. В пределе скейтборд движется в устойчивом направлении с постоянной скоростью $\Omega_1 n_1$ (Рис. 23).

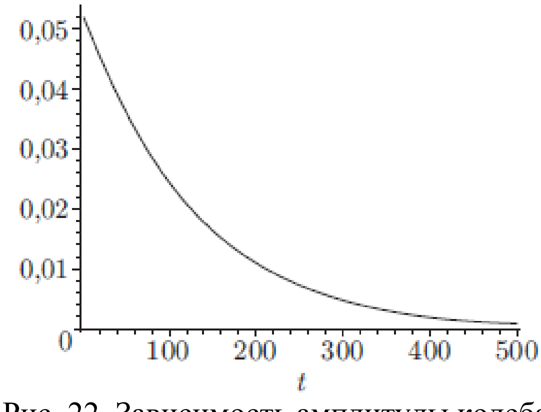


Рис. 22. Зависимость амплитуды колебаний ρ_1 от времени в случае $n_1 > 0$, $n_2 < 1$.

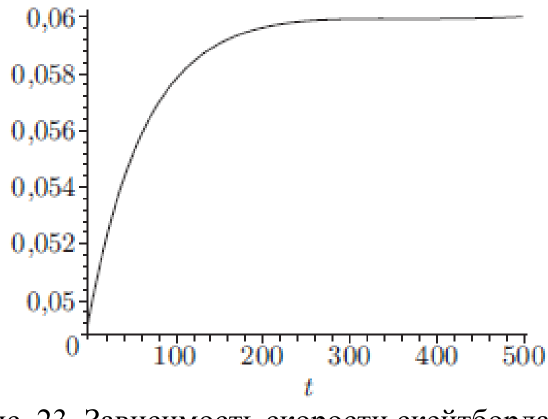


Рис. 23. Зависимость скорости скейтборда ρ_2 от времени в случае $n_1 > 0$, $n_2 < 1$.

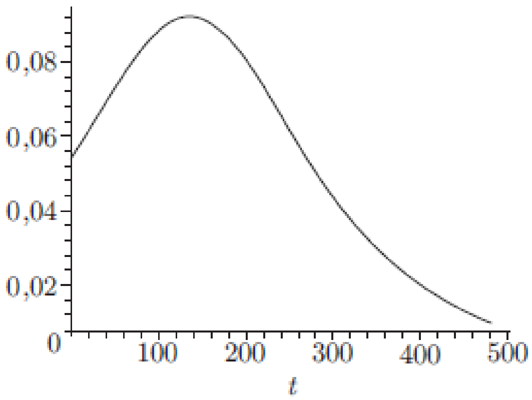


Рис. 24. Зависимость амплитуды колебаний ρ_1 от времени в случае $n_1 < 0$, $n_2 < 1$.

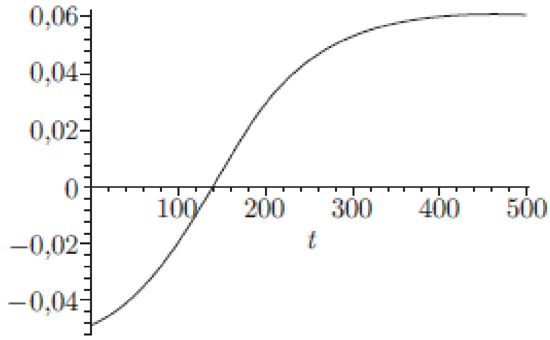


Рис. 25. Зависимость скорости скейтборда ρ_2 от времени в случае $n_1 < 0$, $n_2 < 1$.

Пусть теперь мы находимся в окрестности неустойчивого равновесия $(n_1 < 0)$. Предположим снова, что в начальный момент времени $n_2 < 1$, т.е. $\rho_2(0) < 0$ (случай $n_1 < 0$, $n_2 > 1$ аналогичен разобранному выше случаю $n_1 > 0$, $n_2 < 1$). Эти условия соответствуют тому, что в начальный момент времени скейтборд получил малую скорость

$$\rho_2(0) = \Omega_1 n_1 \frac{1 - n_2}{1 + n_2}$$

в неустойчивом направлении. В том случае движение системы будет таким же, как при $\rho_2(0) > 0$, но эволюция движения существенно иная. При

$$0 < t < t_* = \frac{E_1 \ln(n_2)}{B_1 \Omega_1 n_1}$$

амплитуда колебаний ρ_1 монотонно возрастает, а скейтборд движется в неустойчивом направлении со все уменьшающейся по модулю скоростью. В момент $t = t_*$ скорость скейтборда обращается в нуль, а амплитуда колебаний ρ_1 достигает своего максимального значения

$$\rho_1(t_*) = \sqrt{\frac{A_1 n_1^2}{E_1}}.$$

При $t > t_*$ скейтборд движется уже в устойчивом направлении с возрастающей скоростью, а амплитуда колебаний монотонно убывает (Рис. 24-25). Таким образом, при $\rho_2(0) < 0$ за время эволюции движения один раз происходит смена направления прямолинейного движения скейтборда с постоянной скоростью. Аналогичные нелинейные эффекты (в частности, смена направления движения) наблюдались раньше и в других задачах неголономной механики (например, в классической задаче о движении кельтского камня [1, 21, 24, 26, 37, 39, 73, 89, 108, 109]). Этим еще раз можно подчеркнуть связь рассматриваемой задачи с классическими задачами неголономных систем.

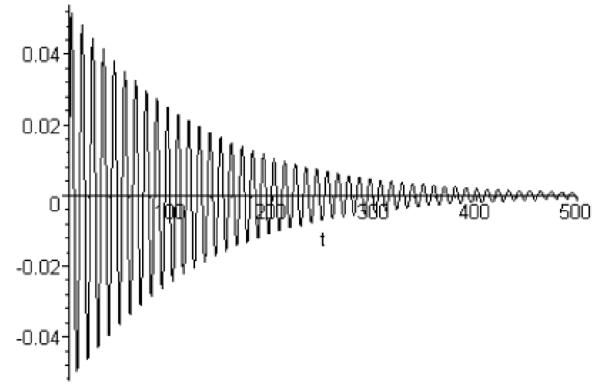


Рис. 26. Зависимость угла наклона доски γ от времени в случае $n_1 > 0$, $n_2 < 1$.

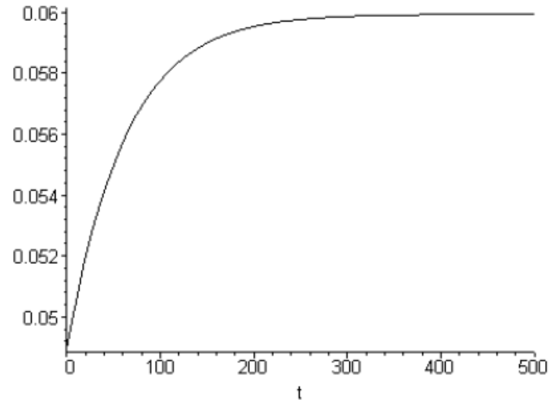


Рис. 27. Зависимость скорости скейтборда u от времени в случае $n_1 > 0$, $n_2 < 1$.

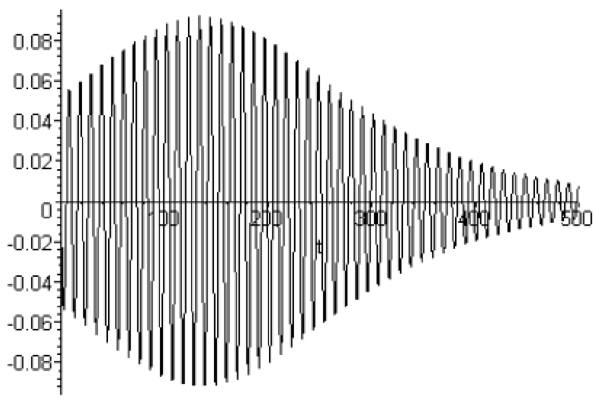


Рис. 28. Зависимость угла наклона доски γ от времени в случае $n_1 < 0$, $n_2 < 1$.

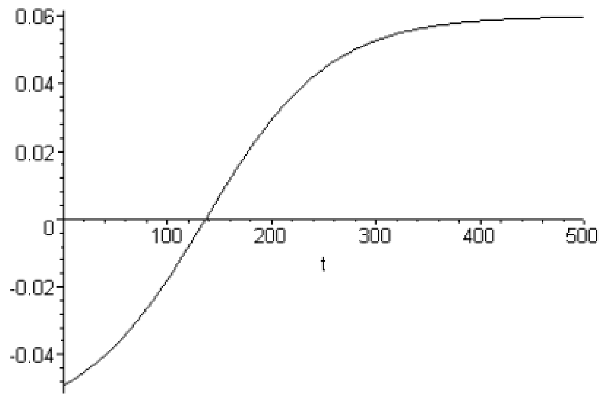


Рис. 29. Зависимость скорости скейтборда u от времени в случае $n_1 < 0$, $n_2 < 1$.

Возвращаясь к исходным переменным γ, $\dot{\gamma}$, u, можем написать

$$\gamma = \rho_1 \left(\sin\sigma_1 - \frac{B_1}{4 E_1 \Omega_1} \rho_2 \cos\sigma_1 \right),$$

$$\dot{\gamma} = \Omega_1 \rho_1 \left(\cos\sigma_1 - \frac{B_1}{4 E_1 \Omega_1} \rho_2 \sin\sigma_1 \right),$$

$$u = \rho_2 - \frac{B_1 \Omega_1}{2 A_1} \rho_1^2 \sin\sigma_1 \cos\sigma_1 .$$

Эти формулы, а так же графики зависимости γ и u от времени (Рис. 26-29), еще раз подтверждают сделанные выводы о характере движения скейтборда с малой скоростью в устойчивом и неустойчивом направлениях.

Таковы основные свойства рассмотренной простейшей модели скейтборда со стоящим на нем райдером при движении по горизонтальной плоскости. В следующей главе будет рассмотрена более сложная модель скейтборда со стоящим на нем райдером.

Глава 2. Модель скейтборда с тремя степенями свободы.

1. Постановка задачи. Уравнения движения.

При рассмотрении простейшей модели скейтборда предполагалось, что райдер стоит неподвижно, так что при наклоне на угол γ райдер отклоняется от вертикали на тот же угол. Теперь будем предполагать, что наклон доски и наклон райдера определяются двумя независимыми координатами – углами γ и φ. Предположим, также, что райдер соединен с доской при помощи торсионной пружины, которая создает восстанавливающий момент, по величине равный $k_2(\gamma-\varphi)$, где k_2 – жесткость пружины (Рис. 30). Поскольку исследуется случай, когда управление скейтбордом со стороны райдера отсутствует, то можно принять именно такой принцип взаимодействия райдера с доской.

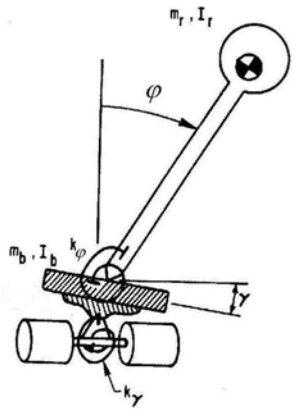


Рис.30. Модель с тремя степенями свободы

Как и ранее, уравнения движения будем строить в форме уравнений Гиббса – Аппеля. Выше, в Главе 1, уже были найдены формулы для ускорения центра масс доски и угловой скорости доски (формулы (1.3.1) и (1.3.3)). Вычислим теперь ускорение центра масс райдера и его угловую скорость в данной модели скейтборда. Как и ранее, будем предполагать, что райдер стоит не в центре доски, а на ее продольной оси в точке E на расстоянии d от переднего края доски. Пусть центр масс райдера находится в точке R, высота которой над точкой E равна l. Радиус-вектор из точки P в центр масс райдера R имеет вид:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ER} =$$
$$= \frac{(a-d)\,\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r}{\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r}\mathbf{e}_1 - (h\sin\gamma + l\sin\varphi)\mathbf{e}_2 + (h\cos\gamma + l\cos\varphi)\mathbf{e}_3 .$$

Относительная скорость точки R равна

$$\mathbf{v}_R^r = -(h\dot\gamma\cos\gamma + l\dot\varphi\cos\varphi)\mathbf{e}_2 - (h\dot\gamma\sin\gamma + l\dot\varphi\sin\varphi)\mathbf{e}_3 .$$

Переносная скорость точки R равна

$$\mathbf{v}_R^t = \mathbf{v}_P + [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{PR}],$$

или, в явном виде

$$\mathbf{v}_R^t = u\left(1 - \frac{(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r)(h\sin\gamma + l\sin\varphi)}{a}\sin\gamma\right)\mathbf{e}_1 - \frac{u}{a}\left((a-d)\,\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma\,\mathbf{e}_2 .$$

Окончательно, абсолютная скорость точки R равна

$$\mathbf{v}_R = u\left(1 - \frac{(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r)(h\sin\gamma + l\sin\varphi)}{a}\sin\gamma\right)\mathbf{e}_1 - (h\dot\gamma\cos\gamma + l\dot\varphi\cos\varphi)\mathbf{e}_2 -$$
$$- \frac{u}{a}\left((a-d)\,\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma\,\mathbf{e}_2 - (h\dot\gamma\sin\gamma + l\dot\varphi\sin\varphi)\mathbf{e}_3 . \tag{2.1.1}$$

Для абсолютного ускорения центра масс райдера получаем следующее выражение:

$$\mathbf{w}_R = w_{R1}\,\mathbf{e}_1 + w_{R2}\,\mathbf{e}_2 + w_{R3}\,\mathbf{e}_3 ,$$

$$w_{R1} = \dot u\left(1 - \frac{(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r)(h\sin\gamma + l\sin\varphi)}{a}\sin\gamma\right) -$$
$$- \frac{u^2}{a^2}\left((a-d)\,\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right)\left(tg\lambda_f + tg\lambda_r\right)\sin^2\gamma -$$
$$- \frac{u(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r)}{a}(3h\dot\gamma\sin\gamma\cos\gamma + 2l\dot\varphi\sin\gamma\cos\varphi + l\dot\gamma\cos\gamma\sin\varphi),$$

$$w_{R2}=h\dot{\gamma}^2\sin\gamma+l\dot{\varphi}^2\sin\varphi-h\,\ddot{\gamma}\cos\gamma-l\,\ddot{\varphi}\cos\varphi-$$
$$-\frac{\left((a-d)\operatorname{tg}\lambda_f-d\operatorname{tg}\lambda_r\right)}{a}(\dot{u}\sin\gamma+u\dot{\gamma}\cos\gamma)-$$
$$-\frac{u^2\left(\operatorname{tg}\lambda_f+\operatorname{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma}{a}\left(1-\frac{\left(\operatorname{tg}\lambda_f+\operatorname{tg}\lambda_r\right)(h\sin\gamma+l\sin\varphi)}{a}\sin\gamma\right),$$

$$w_{R3}=-h\ddot{\gamma}\sin\gamma-l\ddot{\varphi}\sin\varphi-h\dot{\gamma}^2\cos\gamma-l\dot{\varphi}^2\cos\varphi.$$

Угловая скорость доски имеет вид

$$\mathbf{\Omega}_b=\dot{\gamma}\,\mathbf{e}_1+\dot{\theta}\mathbf{e}_3=\dot{\gamma}\,\mathbf{e}_1-\frac{u}{a}\left(\operatorname{tg}\lambda_f+\operatorname{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma\,\mathbf{e}_3.$$

Дифференцируя данную формулу, найдем выражение для углового ускорения доски

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_b=\ddot{\gamma}\mathbf{e}_1-\frac{u\left(\operatorname{tg}\lambda_f+\operatorname{tg}\lambda_r\right)}{a}\dot{\gamma}\sin\gamma\,\mathbf{e}_2-\frac{\left(\operatorname{tg}\lambda_f+\operatorname{tg}\lambda_r\right)}{a}\left(\dot{u}\sin\gamma+u\,\dot{\gamma}\cos\gamma\right)\mathbf{e}_3. \qquad (2.1.2)$$

Используя соотношения, связывающие векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с векторами главных осей инерции доски $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$, получим для $\mathbf{\Omega}_b$ и $\dot{\mathbf{\Omega}}_b$ следующие выражения:

$$\mathbf{\Omega}_b=\dot{\gamma}\,\mathbf{e}_\xi-\frac{u}{a}\left(\operatorname{tg}\lambda_f+\operatorname{tg}\lambda_r\right)\sin^2\gamma\,\mathbf{e}_\eta-\frac{u}{a}\left(\operatorname{tg}\lambda_f+\operatorname{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma\cos\gamma\,\mathbf{e}_\zeta,$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_b=\ddot{\gamma}\mathbf{e}_\xi-\frac{\left(\operatorname{tg}\lambda_f+\operatorname{tg}\lambda_r\right)}{a}(\dot{u}\sin\gamma+2u\,\dot{\gamma}\cos\gamma)\sin\gamma\,\mathbf{e}_\eta-$$
$$-\frac{\left(\operatorname{tg}\lambda_f+\operatorname{tg}\lambda_r\right)}{a}\left(\dot{u}\sin\gamma\cos\gamma+\left(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma\right)u\dot{\gamma}\right)\mathbf{e}_\zeta.$$

Как и раньше, считаем, что тензор инерции доски в главных осях инерции имеет вид:

$$\mathbf{\Theta}_b=\begin{pmatrix} I_{bx} & 0 & 0\\ 0 & I_{by} & 0\\ 0 & 0 & I_{bz}\end{pmatrix}$$

Угловая скорость райдера, согласно постановке задачи, уже не совпадает с угловой скоростью доски, как в случае, исследованном в Главе 1. В данном случае она равна

$$\mathbf{\Omega}_r = \dot{\varphi}\,\mathbf{e}_1 + \dot{\theta}\mathbf{e}_3 = \dot{\varphi}\,\mathbf{e}_1 - \frac{u}{a}\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma\,\mathbf{e}_3 .$$

Угловое ускорение райдера равно

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_r = \ddot{\varphi}\mathbf{e}_1 - \frac{u\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}\dot{\varphi}\sin\gamma\,\mathbf{e}_2 - \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}\left(\dot{u}\sin\gamma + u\,\dot{\gamma}\cos\gamma\right)\mathbf{e}_3 . \qquad (2.1.3)$$

Пусть направления главных осей инерции райдера определяются единичными векторами $\mathbf{e}'_\xi$, $\mathbf{e}'_\eta$, $\mathbf{e}'_\zeta$ системы координат $R\xi'\eta'\zeta'$ с началом в центре масс райдера. Эти векторы связаны с единичными векторами системы координат $Px_1x_2x_3$ соотношениями

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_\xi , \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_\eta \cos\varphi - \mathbf{e}'_\zeta \sin\varphi , \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_\eta \sin\varphi + \mathbf{e}'_\zeta \cos\varphi .$$

Таким образом, направление главных центральных осей инерции райдера достигаются поворотом осей $Px_1x_2x_3$ на угол φ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$. Тензор инерции райдера в главных центральных осях $R\xi'\eta'\zeta'$ имеет вид:

$$\mathbf{\Theta}_r = \begin{pmatrix} I_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & I_{rz} \end{pmatrix}.$$

Используя формулы, связывающие векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с векторами главных осей инерции райдера $\mathbf{e}'_\xi$, $\mathbf{e}'_\eta$, $\mathbf{e}'_\zeta$, получим для $\mathbf{\Omega}_r$ и $\dot{\mathbf{\Omega}}_r$ следующие выражения:

$$\mathbf{\Omega}_r = \dot{\varphi}\,\mathbf{e}'_\xi - \frac{u}{a}\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma\sin\varphi\mathbf{e}'_\eta - \frac{u}{a}\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)\sin\gamma\cos\varphi\mathbf{e}'_\zeta ,$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_r = \ddot{\varphi}\mathbf{e}'_\xi - \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}\left(\dot{u}\sin\gamma\sin\varphi + u\,\dot{\varphi}\sin\gamma\cos\varphi + u\,\dot{\gamma}\cos\gamma\sin\varphi\right)\mathbf{e}'_\eta -$$
$$- \frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}\left(\dot{u}\sin\gamma\cos\varphi - u\,\dot{\varphi}\sin\gamma\sin\varphi + u\,\dot{\gamma}\cos\gamma\cos\varphi\right)\mathbf{e}'_\zeta .$$

Подставляя выражения для ускорений центров масс доски и райдера, а также для угловых ускорений доски и райдера в формулу (1.4.1), находим функцию Аппеля системы:

$$S=\frac{1}{2}\Big(A_1+\big(C_1-2D_1\big)\sin^2\gamma+F_1\sin^4\gamma-2L_1\sin\gamma\sin\varphi+$$

$$+2G_1\sin^3\gamma\sin\varphi+H_1\sin^2\gamma\sin^2\varphi\Big)\dot u^2+\frac{E_1}{2}\ddot\gamma^2+\frac{N_1}{2}\ddot\varphi^2+$$

$$+B_1\left(\dot u\,\ddot\gamma\sin\gamma\cos\gamma-\dot u\,\dot\gamma^2\sin^2\gamma+u\,\dot\gamma\,\ddot\gamma\cos^2\gamma\right)+$$

$$+K_1\left(\dot u\,\ddot\varphi\sin\gamma\cos\varphi-\dot u\,\dot\varphi^2\sin\gamma\sin\varphi+u\,\dot\gamma\,\ddot\varphi\cos\gamma\cos\varphi\right)+$$

$$+J_1\left(\ddot\gamma\,\ddot\varphi\cos(\varphi-\gamma)-\ddot\gamma\,\dot\varphi^2\sin(\varphi-\gamma)+\dot\gamma^2\,\ddot\varphi\sin(\varphi-\gamma)\right)+$$

$$+2\left(G_1\sin^2\gamma-L_1+H_1\sin\gamma\sin\varphi\right)u\,\dot u\,\dot\varphi\sin\gamma\cos\varphi+$$

$$+\left(D_1-F_1\sin^2\gamma-G_1\sin\gamma\sin\varphi\right)u^2\,\ddot\gamma\sin\gamma\cos\gamma+$$

$$+\left(L_1-H_1\sin\gamma\sin\varphi-G_1\sin^2\gamma\right)u^2\,\ddot\varphi\sin\gamma\cos\varphi+$$

$$+\Big(\big(C_1-3D_1\big)\sin\gamma-L_1\sin\varphi+3F_1\sin^3\gamma+$$

$$+H_1\sin\gamma\sin^2\varphi+4G_1\sin^2\gamma\sin\varphi\Big)u\,\dot u\,\dot\gamma\cos\gamma.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_1=m_b+m_r,\qquad B_1=\left(\frac{m_b}{2}\left(\mathrm{tg}\lambda_f-\mathrm{tg}\lambda_r\right)+\frac{m_r}{a}\left(\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f-d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right)\right)h,$$

$$C_1=\frac{m_b}{4}\left(\mathrm{tg}\lambda_f-\mathrm{tg}\lambda_r\right)^2+\frac{I_{bz}+I_{rz}}{a^2}\left(\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r\right)^2+\frac{m_r}{a^2}\left(\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f-d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right)^2,$$

$$D_1=\frac{\left(m_b+m_r\right)\left(\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r\right)h}{a},\qquad E_1=I_{bx}+m_b h^2+m_r l^2,$$

$$F_1=\frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r\right)^2}{a^2}\left(\left(m_b+m_r\right)h^2+I_{by}-I_{bz}\right),\qquad G_1=\frac{m_r\,h\,l\left(tg\lambda_f+tg\lambda_r\right)^2}{a^2},$$

$$H_1=\frac{\left(\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r\right)^2}{a^2}\left(I_{ry}-I_{rz}+m_r l^2\right),\quad J_1=m_r\,h\,l,\quad N_1=I_{rx}+m_r l^2,$$

$$K_1=\frac{m_r\,l}{a}\left(\left(a-d\right)\mathrm{tg}\lambda_f-d\,\mathrm{tg}\lambda_r\right),\qquad L_1=\frac{m_r\,l\left(\mathrm{tg}\lambda_f+\mathrm{tg}\lambda_r\right)}{a}.$$

Потенциальная энергия системы состоит из потенциала сил тяжести доски и райдера и потенциала упругих сил, возникающего за счет наличия двух торсионных пружин: торсионной пружины, соединяющей оси колес с подвеской, и торсионной пружины, соединяющего райдера с доской

$$V=\frac{k_1\gamma^2}{2}+\frac{k_2(\varphi-\gamma)^2}{2}+m_b\,g\,h\cos\gamma+m_r\,g\left(h\cos\gamma+l\cos\varphi\right).$$

Уравнения Гиббса – Аппеля, описывающие динамику данной модели скейтборда, имеют вид:

$$\frac{\partial S}{\partial\dot u}=0,\qquad \frac{\partial S}{\partial\ddot\gamma}=-\frac{\partial V}{\partial\gamma},\qquad \frac{\partial S}{\partial\ddot\varphi}=-\frac{\partial V}{\partial\varphi}.$$

или, в явном виде

$$\begin{aligned}
&\Big(A_1+\left(C_1-2D_1\right)\sin^2\gamma+F_1\sin^4\gamma-2L_1\sin\gamma\sin\varphi+2G_1\sin^3\gamma\sin\varphi+\\
&\quad+H_1\sin^2\gamma\sin^2\varphi\Big)\dot u+B_1\left(\ddot\gamma\sin\gamma\cos\gamma-\dot\gamma^2\sin^2\gamma\right)+\\
&\quad+K_1\left(\ddot\varphi\sin\gamma\cos\varphi-\dot\varphi^2\sin\gamma\sin\varphi\right)+\Big(\left(C_1-3D_1\right)\sin\gamma-L_1\sin\varphi+\\
&\quad+3F_1\sin^3\gamma+H_1\sin\gamma\sin^2\varphi+4G_1\sin^2\gamma\sin\varphi\Big)\,u\,\dot\gamma\cos\gamma+\\
&\quad+2\left(G_1\sin^2\gamma-L_1+H_1\sin\gamma\sin\varphi\right)u\,\dot\varphi\sin\gamma\cos\varphi=0,\\
&E_1\ddot\gamma+J_1\left(\ddot\varphi\cos(\varphi-\gamma)-\dot\varphi^2\sin(\varphi-\gamma)\right)+\\
&\quad+B_1\left(\dot u\sin\gamma\cos\gamma+u\,\dot\gamma\cos^2\gamma\right)+\\
&\quad+\left(D_1-F_1\sin^2\gamma-G_1\sin\gamma\sin\varphi\right)u^2\sin\gamma\cos\gamma+\\
&\quad+\left(k_1+k_2\right)\gamma-k_2\varphi-\left(m_b+m_r\right)g\,h\sin\gamma=0,\\
&N_1\ddot\varphi+K_1\left(\dot u\sin\gamma\cos\varphi+u\,\dot\gamma\cos\gamma\cos\varphi\right)+\\
&\quad+J_1\left(\ddot\gamma\cos(\varphi-\gamma)-\dot\gamma^2\sin(\varphi-\gamma)\right)+\\
&\quad+\left(L_1-H_1\sin\gamma\sin\varphi-G_1\sin^2\gamma\right)u^2\sin\gamma\cos\varphi-\\
&\quad+k_2\left(\varphi-\gamma\right)-m_r\,g\,l\sin\varphi=0.
\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

Основным объектом дальнейшего исследования станет система уравнений (2.1.4). Покажем теперь, что при любом значении постоянных A_1, $B_1,\ldots,$ N_1 уравнения (2.1.4) имеют первый интеграл – интеграл энергии. Действительно, если умножить первое из уравнений (2.1.4) на u, второе – на $\dot\gamma$, а третье – на $\dot\varphi$ и сложить, то после упрощения можно заметить, что полученное выражение является полной производной функции

$$
\begin{aligned}
U_0 = \big(& A_1 + (C_1 - 2D_1)\sin^2\gamma + F_1 \sin^4\gamma - 2L_1 \sin\gamma \sin\varphi + \\
& +2G_1 \sin^3\gamma \sin\varphi + H_1 \sin^2\gamma \sin^2\varphi \big)\frac{u^2}{2} + \frac{E_1}{2}\dot\gamma^2 + \frac{N_1}{2}\dot\varphi^2 + \\
& + B_1 u \dot\gamma \sin\gamma\cos\gamma + K_1 u \dot\varphi \sin\gamma \cos\varphi + J_1 \dot\gamma\dot\varphi \cos(\gamma - \varphi) + \\
& + \frac{k_1}{2}\gamma^2 + \frac{k_2}{2}(\gamma-\varphi)^2 + (m_b + m_r) g h \cos\gamma + m_r g l \cos\varphi = c_0 = \text{const}
\end{aligned}
\tag{2.1.5}
$$

Данная функция представляет собой полную механическую энергию системы. Таким образом, для интегрирования уравнений (2.1.4) необходимо найти еще три независимых первых интеграла. Вопросы интегрируемости полученной системы уравнений и, в частности, исследование того, когда система уравнений (2.1.4) допускает инвариантную меру, рассмотрены ниже.

2. Сравнение с известными результатами.

Исследуемая модель скейтборда впервые была предложена в статьях [92, 93]. В этих работах предполагалось, что углы γ и φ наклона доски и наклона райдера являются малыми. При этом предположении на основании общих теорем были получены дифференциальные уравнения движения скейтборда. Покажем, что в предположении малости углов γ и φ, полученные нами уравнения движения (2.1.4) перейдут в уравнения, известные из [92, 93]. Действительно, если линеаризовать (2.1.4), то они запишутся следующим образом:

$$
\begin{aligned}
& \dot u = 0, \\
& E_1\ddot\gamma + J_1\ddot\varphi + B_1 u\dot\gamma + D_1 u^2\gamma + (k_1+k_2)\gamma - k_2\varphi - (m_b+m_r) g h \gamma = 0, \\
& N_1\ddot\varphi + J_1\ddot\gamma + K_1 u\dot\gamma + L_1 u^2\gamma - k_2\gamma + (k_2 - m_r g l)\varphi = 0.
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

Уравнения (2.2.1) совпадают с уравнениями движения скейтборда, полученными в работах [92, 93]. Таким образом, в предположении, что γ и φ – малые углы, мы можем считать скорость u точки P постоянной и рассматривать ее как параметр во втором и третьем уравнении, которые описывают закон изменения углов γ и φ.

3. Устойчивость прямолинейного равномерного движения скейтборда.

Уравнения (2.1.4) допускают частное решение

$$u = u_0 = \mathrm{const}, \qquad \gamma = 0, \qquad \varphi = 0, \tag{2.3.1}$$

которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда. Рассмотрим задачу об устойчивости этого движения системы.

Полагая $u = u_0 + \xi$ и сохраняя для γ и φ прежнее обозначение, выпишем уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} & E_1 \ddot{\gamma} + J_1 \ddot{\varphi} + B_1 u_0 \dot{\gamma} + \left(D_1 u_0^2 + \Pi_{11}\right)\gamma + \Pi_{12}\varphi = \Gamma, \\ & N_1 \ddot{\varphi} + J_1 \ddot{\gamma} + K_1 u_0 \dot{\gamma} + \left(L_1 u_0^2 + \Pi_{12}\right)\gamma + \Pi_{22}\varphi = \Phi, \\ & \dot{\xi} = \Xi. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

$$\Pi_{11} = k_1 + k_2 - \left(m_b + m_r\right) g\, h, \quad \Pi_{12} = -k_2, \quad \Pi_{22} = k_2 - m_r\, g\, l.$$

Здесь Γ, Φ и Ξ – не зависящие от времени функции переменных γ, $\dot{\gamma}$, φ, $\dot{\varphi}$ и ξ, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка. При этом имеют место соотношения (данный факт устанавливается прямой проверкой):

$$\Gamma\left(0,0,0,0,\xi\right) = \Phi\left(0,0,0,0,\xi\right) = \Xi\left(0,0,0,0,\xi\right) = 0.$$

Характеристическое уравнение, отвечающее системе (2.3.2) имеет вид:

$$s\left(b_0 s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4\right) = 0. \tag{2.3.3}$$

$$b_0 = E_1 N_1 - J_1^2, \qquad b_1 = \left(B_1 N_1 - J_1 K_1\right) u_0,$$

$$b_2 = \left(D_1 N_1 - J_1 L_1\right) u_0^2 + \Pi_{11} N_1 + \Pi_{22} E_1 - 2\Pi_{12} J_1,$$

$$b_3 = \left(B_1 \Pi_{22} - K_1 \Pi_{12}\right) u_0, \quad b_4 = \left(D_1 \Pi_{22} - L_1 \Pi_{12}\right) u_0^2 + \Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}^2.$$

При выполнении условий критерия Рауса – Гурвица

$$b_0 > 0, \qquad b_1 > 0, \qquad b_2 > 0, \qquad b_3 > 0, \qquad b_4 > 0,$$

$$\begin{gathered} b_1 b_2 b_3 - b_0 b_3^2 - b_4 b_1^2 = u_0^2 \left(J_1 \Pi_{22} - N_1 \Pi_{12} \right) \left[B_1 K_1 N_1 \Pi_{11} + \right. \\ + B_1^2 J_1 \Pi_{22} - J_1 K_1^2 \Pi_{11} - B_1 E_1 K_1 \Pi_{22} + E_1 K_1^2 \Pi_{12} - \\ \left. - B_1^2 N_1 \Pi_{12} + \left(B_1 N_1 - J_1 K_1 \right) \left(K_1 D_1 - L_1 B_1 \right) u_0^2 \right] > 0, \end{gathered} \tag{2.3.4}$$

уравнение (2.3.3) имеет один нулевой и четыре корня с отрицательной вещественной частью. Поскольку все нелинейности в системе (2.3.2) тождественно обращаются в нуль при $\gamma = 0$, $\dot{\gamma} = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, то при условиях (2.3.4) имеет место особенный случай одного нулевого корня [33, 65] и невозмущенное движение (2.3.1) устойчиво, причем асимптотически относительно переменных γ, $\dot{\gamma}$, φ, $\dot{\varphi}$ и неасимптотически – относительно переменной u.

Заметим, что структура коэффициентов b_1 и b_3 позволяет сделать вывод, что устойчивость движения скейтборда будет зависеть от направления движения. Ранее подобный вывод был сделан в работах [92, 93].

Первое из условий (2.3.4) – условие $b_0 > 0$ всегда выполняется, действительно

$$b_0 = E_1 N_1 - J_1^2 = \left(I_{bx} + m_b h^2 \right) \left(I_{rx} + m_r l^2 \right) + I_{rx} m_r h^2 > 0 .$$

Оставшиеся пять условий в явном виде записываются следующим образом:

$$b_1 = \left(\left(I_{rx} + m_r l^2 \right) \left(\mathrm{tg}\lambda_f - \mathrm{tg}\lambda_r \right) \frac{m_b h}{2} + \left((a - d) \mathrm{tg}\lambda_f - d \, \mathrm{tg}\lambda_r \right) \frac{I_{rx} m_r h}{a} \right) u_0 > 0,$$

$$\begin{gathered} b_2 = \left(m_b m_r l^2 + \left(m_b + m_r \right) I_{rx} \right) \left(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r \right) \frac{h}{a} u_0^2 + 2 k_2 m_r h l + \\ + \left(I_{bx} + \left(m_b + m_r \right) h^2 \right) \left(k_2 - m_r g l \right) + \left(I_{rx} + m_r l^2 \right) \left(k_1 + k_2 - \left(m_b + m_r \right) g h \right) > 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} b_3 = \left(\frac{m_r}{a} \left((a - d) \mathrm{tg}\lambda_f - d \, \mathrm{tg}\lambda_r \right) \left((l + h) k_2 - m_r g h l \right) + \right. \\ \left. + \frac{m_b h}{2} \left(\mathrm{tg}\lambda_f - \mathrm{tg}\lambda_r \right) \left(k_2 - m_r g l \right) \right) u_0 > 0, \end{gathered}$$

$$b_4 = \Big(\big(m_b + m_r\big)\big(k_2 - m_r\, g\, l\big)h + m_r\, l\, k_2\Big)\Big(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\Big)\frac{u_0^2}{a} +$$

$$+\Big(k_1 + k_2 - \big(m_b + m_r\big)g\, h\Big)\big(k_2 - m_r\, g\, l\big) - k_2^2 > 0,$$

$$\frac{b_1 b_2 b_3 - b_0 b_3^2 - b_4 b_1^2}{u_0^2} = \Big(\big(I_{rx} + m_r\, l^2\big)k_2 + \big(k_2 - m_r\, g\, l\big)m_r\, h l\Big)\Bigg[\frac{m_b\, m_r\, l\, h^2\big(a - 2d\big)u_0^2}{2a^2} \times$$

$$\times\Big(\mathrm{tg}\lambda_f + \mathrm{tg}\lambda_r\Big)^2\left(\frac{m_b}{2}\big(I_{rx} + m_r\, l^2\big)\Big(\mathrm{tg}\lambda_f - \mathrm{tg}\lambda_r\Big) + \frac{I_{rx}\, m_r}{a}\Big(\big(a-d\big)\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\Big)\right) +$$

$$+\frac{m_b^2\, h^2}{4}\Big[\Big(\big(l+h\big)k_2 - m_r\, g\, h l\Big)m_r\, l + I_{rx}\, k_2\Big]\Big(\mathrm{tg}\lambda_f - \mathrm{tg}\lambda_r\Big)^2 +$$

$$+\frac{m_b\, m_r\, h}{2a}\Big(\mathrm{tg}\lambda_f - \mathrm{tg}\lambda_r\Big)\Big(\big(a-d\big)\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\Big) \times$$

$$\times\Big[\Big(I_{rx}\, h - I_{bx}\, l - m_b\, h^2\, l + m_r\big(l+h\big)h l\Big)\big(k_2 - m_r\, g\, l\big) +$$

$$+\Big(I_{rx} + m_r\, l^2\Big)\Big(\big(l+h\big)k_2 + l\, k_1 - m_b\, g\, h l\Big)\Big] +$$

$$+\frac{m_r^2}{a^2}\Big(\big(a-d\big)\mathrm{tg}\lambda_f - d\,\mathrm{tg}\lambda_r\Big)^2\Big[\big(k_1 - m_b\, g\, h\big)I_{rx}\, h l +$$

$$+\Big(I_{rx}\, h - I_{bx}\, l - m_b\, h^2\, l\Big)\Big(\big(l+h\big)k_2 - m_r\, g\, h l\Big)\Big]\Bigg] > 0.$$

При строгом нарушении, по меньшей мере, одного из данных неравенств уравнение (2.3.3) имеет корень с отрицательной вещественной частью и невозмущенное движение (2.3.1) неустойчиво.

Полученные условия устойчивости равномерного прямолинейного движения скейтборда имеют очень громоздкий вид. Они несколько упрощаются, если предположить, что скейтборд симметричен $\big(\lambda_f = \lambda_r = \lambda\big)$. Тогда данные условия запишутся следующим образом:

$$\frac{I_{rx}\, m_r\, h}{a}\big(a - 2d\big)u_0\,\mathrm{tg}\lambda > 0,$$

$$\frac{2 h u_0^2}{a}\Big(m_b\, m_r\, l^2 + \big(m_b + m_r\big)I_{rx}\Big)\mathrm{tg}\lambda + \Big(I_{bx} + \big(m_b + m_r\big)h^2\Big)\big(k_2 - m_r\, g\, l\big) +$$

$$+2k_2\, m_r\, h l + \Big(I_{rx} + m_r\, l^2\Big)\Big(k_1 + k_2 - \big(m_b + m_r\big)g\, h\Big) > 0,$$

$$\frac{m_r}{a}\big(a - 2d\big)\Big(\big(l+h\big)k_2 - m_r\, g\, h l\Big)u_0\,\mathrm{tg}\lambda > 0, \qquad (2.3.5)$$

$$\frac{2u_0^2}{a}\Big(\big(m_b+m_r\big)\big(k_2-m_r\,g\,l\big)h+m_r\,l\,k_2\Big)\mathrm{tg}\lambda+$$
$$+\Big(k_1+k_2-\big(m_b+m_r\big)g\,h\Big)\big(k_2-m_r\,g\,l\big)-k_2^2>0,$$
$$\Big(\big(I_{rx}+m_r\,l^2\big)k_2+\big(k_2-m_r\,g\,l\big)m_r\,h\,l\Big)\Bigg[\frac{2I_{rx}m_b\,l\,h^2u_0^2\,\mathrm{tg}\lambda}{a}+$$
$$+\big(k_1-m_b\,g\,h\big)I_{rx}\,h\,l+\Big(I_{rx}\,h-I_{bx}\,l-m_b\,h^2\,l\Big)\Big(\big(l+h\big)k_2-m_r\,g\,h\,l\Big)\Bigg]>0.$$

Анализ первого и третьего из условий (2.3.5) позволяет сделать вывод, что если

$$\big(l+h\big)k_2-m_r\,g\,h\,l<0\,,$$

то движение скейтборда будет неустойчивым. Следовательно, неустойчивость имеет место, если коэффициент упругости k_2 торсионной пружины не превосходит некоторого критического значения. С физической точки зрения это означает, что движение будет неустойчивым в том случае, когда райдер нетвердо стоит на скейтборде.

Выясним теперь, при каком условии будет устойчивым положение равновесия скейтборда, т.е. решение

$$u_0=0\,,\qquad \gamma=0\,,\qquad \varphi=0\,.$$

При $u_0=0$ характеристическое уравнение (2.3.3) будет иметь один нулевой корень и две пары чисто мнимых корней при выполнении условий

$$\Pi_{11}N_1+\Pi_{22}E_1-2\Pi_{12}J_1>0\,,\qquad \Pi_{11}\Pi_{22}-\Pi_{12}^2>0,$$
$$\big(\Pi_{11}N_1+\Pi_{22}E_1-2\Pi_{12}J_1\big)^2-4\big(E_1N_1-J_1^2\big)\big(\Pi_{11}\Pi_{22}-\Pi_{12}^2\big)>0\,.$$

Последнее условие можно записать следующим образом:

$$\left(\Pi_{11}N_1-\Pi_{22}E_1-2\Pi_{12}J_1+\frac{2\Pi_{22}J_1^2}{N_1}\right)^2+4\big(E_1N_1-J_1^2\big)\left(\Pi_{12}-\frac{\Pi_{22}J_1}{N_1}\right)^2>0\,,$$

и, следовательно, данное условие выполняется всегда. Два других в явном виде можно записать так:

$$\left(I_{bx}+\left(m_b+m_r\right)h^2\right)\left(k_2-m_r\,g\,l\right)+2k_2\,m_r\,h\,l+$$
$$+\left(I_{rx}+m_r\,l^2\right)\left(k_1+k_2-\left(m_b+m_r\right)g\,h\right)>0, \qquad (2.3.6)$$
$$\left(k_1+k_2-\left(m_b+m_r\right)g\,h\right)\left(k_2-m_r\,g\,l\right)-k_2^2>0.$$

Покажем, что при выполнении условий (2.3.6) положение скейтборда будет устойчивым. Заметим, что точка $\gamma=0$, $\varphi=0$ является критической точкой потенциальной энергии системы. Тогда, на основании результатов В.В. Румянцева об устойчивости равновесий неголономных систем [47, 48] (см. также [23, 49]) можно утверждать, что положение равновесия скейтборда будет устойчивым в первом приближении по отношению к γ, $\dot{\gamma}$, φ, $\dot{\varphi}$ если матрица вторых производных потенциальной энергии, вычисленная в положении равновесия, будет положительно определенной. Условия положительной определенности этой матрицы имеют вид:

$$\left(k_1+k_2-\left(m_b+m_r\right)g\,h\right)>0,$$
$$\left(k_1+k_2-\left(m_b+m_r\right)g\,h\right)\left(k_2-m_r\,g\,l\right)-k_2^2>0. \qquad (2.3.7)$$

Можно показать, что системы неравенств (2.3.6) и (2.3.7) эквивалентны одна другой. Действительно, вторые неравенства в системах (2.3.6) и (2.3.7) имеют одинаковый вид. Предположим, что выполнено первое из условий (2.3.6). Тогда из второго условия следует, что $k_2-m_r\,g\,l>0$ (в противном случае система (2.3.7) была бы несовместной). Следовательно, будет выполняться и первое из неравенств (2.3.6), поскольку в левой его части будет стоять положительное выражение. Итак, из выполнения условий (2.3.7) следует выполнение условий (2.3.6). Пусть теперь выполнены условия (2.3.6). Предположим, что при выполнении условий (2.3.6) первое из неравенств (2.3.7) не выполняется, т.е.

$$\left(k_1+k_2-\left(m_b+m_r\right)g\,h\right)<0. \qquad (2.3.8)$$

Тогда, очевидно, для выполнения второго из неравенств (2.3.6) должно быть $k_2-m_r\,g\,l<0$. Расписывая второе из неравенств (2.3.6) более подробно, находим, что оно сводится к неравенству

$$k_2 < k_2^* = m_r\, g\, l + \left(m_b + m_r\right) g\, h - k_1\,.$$

С другой стороны, из первого неравенства системы (2.3.6) следует, что

$$k_2 > k_2^{**} = \frac{\left(I_{bx} + \left(m_b + m_r\right) h^2\right) m_r\, g\, l + \left(I_{rx} + m_r\, l^2\right)\left(\left(m_b + m_r\right) g\, h - k_1\right)}{I_{bx} + I_{rx} + m_b\, h^2 + m_r \left(l + h\right)^2}.$$

Но поскольку $k_2^{**} - k_2^* > 0$, то данные неравенства несовместны. Следовательно, при выполнении неравенства (2.3.8) система неравенств (2.3.6) несовместна. Таким образом, для того, чтобы неравенства (2.3.6) были совместны, первое из неравенств (2.3.7) должно быть выполнено. Это и доказывает эквивалентность двух систем неравенств (2.3.6) и (2.3.7).

В дальнейшем будем говорить, что скейтборд является статически устойчивым, если выполняются неравенства (2.3.7).

Заметим, что в последнем слагаемом последнего из неравенств (2.3.5) фигурирует выражение $I_{rx}\, h - I_{bx}\, l - m_b\, h^2\, l$. Оказывается, что реальной физической ситуации соответствует случай, когда данное выражение является положительным

$$I_{rx}\, h - I_{bx}\, l - m_b\, h^2\, l > 0\,. \qquad (2.3.9)$$

В дальнейшем будем считать неравенство (2.3.9) выполненным. Детальное обсуждение справедливости этого предположения содержится в Дополнении 1 к данной работе.

4. Существование инвариантной меры.

Для нахождения необходимых условий существования инвариантной меры в данной задаче, воспользуемся теоремой, сформулированной в пункте 7 первой главы. Положим

$$\gamma = x_1, \qquad \dot{\gamma} = x_2, \qquad \varphi = x_3, \qquad \dot{\varphi} = x_4, \qquad u = u_0 + x_5,$$

и представим систему уравнений (2.1.4) в виде:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_j + \dots .$$

При этом след матрицы $\mathbf{\Lambda} = \left(a_{ij} \right)$ записывается следующим образом:

$$\operatorname{tr} \mathbf{\Lambda} = -\frac{\left(B_1 N_1 - J_1 K_1\right) u_0}{E_1 N_1 - J_1^2} = -\frac{b_1}{b_0}.$$

Таким образом, инвариантная мера может существовать только в случае, когда $B_1 N_1 - J_1 K_1 = 0$. Это условие выполняется, в частности, когда скейтборд симметричен $\left(\lambda_f = \lambda_r = \lambda\right)$, а райдер стоит точно в центре скейтборда $\left(a = 2d\right)$. Если мера действительно существует в этом случае, то интересно было бы получить ее явное выражение.

В следующем пункте изучается поведение системы вблизи положения равновесия $u_0 = 0$, $\gamma = 0$, $\varphi = 0$.

5. Анализ движения системы вблизи положения равновесия.

Пусть в стационарном движении (2.3.1) скорость $u_0 = 0$, т.е. скейтборд стоит на плоскости неподвижно. Необходимым и достаточным условием устойчивости этого положения равновесия будет, согласно результатам, полученным выше, выполнение неравенств (2.3.7). Пусть эти условия выполнены. Кроме того, будем предполагать, что

$$\operatorname{tg}\lambda_f \geq \operatorname{tg}\lambda_r, \qquad a > 2d .$$

При выполнении этих условий можно сделать вывод, что стационарное движение (2.3.1) будет устойчивым, если $u_0 > 0$, и неустойчивым, если $u_0 < 0$. Рассмотрим движение системы вблизи положения равновесия. Для этого разрешим сначала уравнения (2.1.4) относительно $\dot{u}$, $\ddot{\gamma}$ и $\ddot{\varphi}$ и разложим правые части полученных уравнений в ряд по u, γ и φ до квадратичных членов включительно. В результате получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\dot{u} = c_{11}\gamma^2 + c_{12}\gamma\varphi, \\
&\ddot{\gamma} = c_{21}\gamma + c_{22}\varphi + c_{23}u\dot{\gamma}, \\
&\ddot{\varphi} = c_{31}\gamma + c_{32}\varphi + c_{33}u\dot{\gamma}.
\end{aligned} \tag{2.5.1}
$$

Здесь обозначено

$$
c_{11} = \frac{\left(B_1N_1 - J_1K_1\right)\Pi_{11} - \left(B_1J_1 - K_1E_1\right)\Pi_{12}}{A_1\left(E_1N_1 - J_1^2\right)},
$$

$$
c_{12} = \frac{\left(B_1N_1 - J_1K_1\right)\Pi_{12} - \left(B_1J_1 - K_1E_1\right)\Pi_{22}}{A_1\left(E_1N_1 - J_1^2\right)},
$$

$$
c_{21} = \frac{J_1\Pi_{12} - N_1\Pi_{11}}{E_1N_1 - J_1^2}, \quad c_{22} = \frac{J_1\Pi_{22} - N_1\Pi_{12}}{E_1N_1 - J_1^2}, \quad c_{23} = \frac{J_1K_1 - B_1N_1}{E_1N_1 - J_1^2},
$$

$$
c_{31} = \frac{J_1\Pi_{11} - E_1\Pi_{12}}{E_1N_1 - J_1^2}, \quad c_{32} = \frac{J_1\Pi_{12} - E_1\Pi_{22}}{E_1N_1 - J_1^2}, \quad c_{33} = \frac{B_1J_1 - K_1E_1}{E_1N_1 - J_1^2}.
$$

Сделанные предположения позволяют точно определить знаки всех коэффициентов c_{ij}:

$$
\begin{aligned}
&c_{11} > 0, \qquad c_{12} < 0, \qquad c_{21} < 0, \qquad c_{22} > 0, \\
&c_{23} < 0, \qquad c_{31} > 0, \qquad c_{32} < 0, \qquad c_{33} < 0.
\end{aligned}
$$

Сделаем в системе (2.5.1) замену переменных $\gamma, \varphi, u \to y_1, y_2, y_3$, приводящую линеаризованные второе и третье ее уравнения к виду, ответствующему нормальным колебаниям.

Линеаризованные второе и третье уравнения системы (2.5.1) можно записать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\gamma} - c_{21}\gamma - c_{22}\varphi = 0, \\
&\ddot{\varphi} - c_{31}\gamma - c_{32}\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{2.5.2}
$$

Собственные частоты системы (2.5.2) определяются из уравнения

$$
\Omega^4 + \left(c_{21} + c_{32}\right)\Omega^2 + \left(c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}\right) = 0.
$$

Учитывая знаки коэффициентов c_{ij}, а также тот факт, что

$$c_{21}c_{32}-c_{22}c_{31}=\frac{C_1G_1-H_1^2}{A_1F_1-E_1^2}=\frac{\left(k_1+k_2-\left(m_b+m_r\right)g\,h\right)\left(k_2-m_r\,g\,l\right)-k_2^2}{A_1\,I_{rx}+\left(I_{bx}+m_b\,h^2\right)m_r\,l^2}>0\,,$$

можно сделать вывод, что данное характеристическое уравнение имеет два действительных положительных корня Ω_1^2 и Ω_2^2 $\left(\Omega_1^2>\Omega_2^2\right)$:

$$\Omega_1^2=\frac{-\left(c_{21}+c_{32}\right)+\sqrt{\left(c_{21}-c_{32}\right)^2+4c_{22}\,c_{31}}}{2}\,,$$

$$\Omega_2^2=\frac{-\left(c_{21}+c_{32}\right)-\sqrt{\left(c_{21}-c_{32}\right)^2+4c_{22}\,c_{31}}}{2}\,.$$

Соответствующие данным собственным частотам собственные векторы имеют вид:

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}-c_{22}\,\mu_1\\ \left(c_{21}+\Omega_1^2\right)\mu_1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}-c_{22}\,\mu_2\\ \left(c_{21}+\Omega_2^2\right)\mu_2\end{pmatrix}.$$

Постоянные μ_1 и μ_2 выберем из условия, что соответствующие собственные векторы должны быть единичными. Тогда

$$\mu_i=\frac{1}{\sqrt{\left(c_{21}+\Omega_i^2\right)^2+c_{22}^2}}\,,\quad i=1,\,2.$$

Окончательно, можно сделать вывод, что приведение к нормальным координатам осуществляется при помощи замены переменных

$$\begin{aligned}&\gamma=-c_{22}\,\mu_1\,y_1-c_{22}\,\mu_2\,y_2\,,\\ &\varphi=\left(c_{21}+\Omega_1^2\right)\mu_1\,y_1+\left(c_{21}+\Omega_2^2\right)\mu_2\,y_2\,,\\ &u=y_3\,.\end{aligned}\qquad(2.5.3)$$

В переменных y_1, y_2, y_3 система уравнений (2.5.1) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned}&\ddot{y}_1+\Omega_1^2\,y_1+Q_1\,\dot{y}_1\,y_3+Q_2\,\dot{y}_2\,y_3=0\,,\\ &\ddot{y}_2+\Omega_2^2\,y_2+Q_3\,\dot{y}_1\,y_3+Q_4\,\dot{y}_2\,y_3=0\,,\\ &\dot{y}_3=Q_5\,y_1^2+Q_6\,y_1\,y_2+Q_7\,y_2^2\,.\end{aligned}\qquad(2.5.4)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$Q_1 = \frac{c_{22}c_{33} + c_{21}c_{23} + c_{23}\Omega_2^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}, \qquad Q_2 = \frac{\left(c_{22}c_{33} + c_{21}c_{23} + c_{23}\Omega_2^2\right)\mu_2}{\left(\Omega_1^2 - \Omega_2^2\right)\mu_1},$$

$$Q_3 = \frac{\left(c_{22}c_{33} + c_{21}c_{23} + c_{23}\Omega_1^2\right)\mu_1}{\left(\Omega_2^2 - \Omega_1^2\right)\mu_2}, \qquad Q_4 = \frac{c_{22}c_{33} + c_{21}c_{23} + c_{23}\Omega_1^2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2},$$

$$Q_5 = c_{22}\left(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} - c_{12}\Omega_1^2\right)\mu_1^2,$$

$$Q_6 = c_{22}\left(2c_{11}c_{22} - 2c_{12}c_{21} - c_{12}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right)\right)\mu_1\mu_2,$$

$$Q_7 = c_{22}\left(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} - c_{12}\Omega_2^2\right)\mu_2^2.$$

Как и в (2.5.1), в системе (2.5.4) отброшены члены выше второго порядка относительно возмущений. Для исследования нелинейной системы (2.5.4) приведем ее к нормальной форме [4, 16, 37, 39]. Сначала сделаем замену переменных

$$y_1 = \frac{z_1 - z_3}{2i}, \quad y_2 = \frac{z_2 - z_4}{2i}, \quad \dot{y}_1 = \frac{z_1 + z_3}{2}\Omega_1, \quad \dot{y}_2 = \frac{z_2 + z_4}{2}\Omega_2, \quad y_3 = z_5.$$

В переменных z_k, k =1, 2,…,5 система уравнений (2.5.4) примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= i\Omega_1 z_1 - \frac{Q_1}{2}\left(z_1 + z_3\right)z_5 - \frac{\Omega_2 Q_2}{2\Omega_1}\left(z_2 + z_4\right)z_5, \\
\dot{z}_2 &= i\Omega_2 z_2 - \frac{Q_4}{2}\left(z_2 + z_4\right)z_5 - \frac{\Omega_1 Q_3}{2\Omega_2}\left(z_1 + z_3\right)z_5, \\
\dot{z}_3 &= -i\Omega_1 z_3 - \frac{Q_1}{2}\left(z_1 + z_3\right)z_5 - \frac{\Omega_2 Q_2}{2\Omega_1}\left(z_2 + z_4\right)z_5, \\
\dot{z}_4 &= -i\Omega_2 z_4 - \frac{Q_4}{2}\left(z_2 + z_4\right)z_5 - \frac{\Omega_1 Q_3}{2\Omega_2}\left(z_1 + z_3\right)z_5, \\
\dot{z}_5 &= -\frac{Q_5}{4}\left(z_1 - z_3\right)^2 - \frac{Q_6}{4}\left(z_1 - z_3\right)\left(z_2 - z_4\right) - \frac{Q_7}{4}\left(z_2 - z_4\right)^2,
\end{aligned} \qquad (2.5.5)$$

т.е. линейная часть системы (2.5.5) имеет диагональную форму, и получение нормальной формы сводится к выделению резонансных членов в правых частях системы (2.5.5). Учитывая это, получаем следующую нормальную форму системы (2.5.5), записанную в комплексных переменных:

$$\dot z_1 = i\Omega_1 z_1 - \frac{Q_1}{2} z_1 z_5, \qquad \dot z_2 = i\Omega_2 z_2 - \frac{Q_4}{2} z_2 z_5,$$

$$\dot z_3 = -i\Omega_1 z_3 - \frac{Q_1}{2} z_3 z_5, \quad \dot z_4 = -i\Omega_2 z_4 - \frac{Q_4}{2} z_4 z_5, \tag{2.5.6}$$

$$\dot z_5 = \frac{Q_5}{2} z_1 z_3 + \frac{Q_7}{2} z_2 z_4 .$$

Вводя теперь вещественные полярные координаты согласно формулам

$$z_1 = \rho_1\left(\cos\sigma_1 + i\sin\sigma_1\right), \quad z_2 = \rho_2\left(\cos\sigma_2 + i\sin\sigma_2\right),$$

$$z_3 = \rho_1\left(\cos\sigma_1 - i\sin\sigma_1\right), \quad z_4 = \rho_2\left(\cos\sigma_2 - i\sin\sigma_2\right), \quad z_5 = \rho_3,$$

запишем систему (2.5.6) в переменных ρ_1, ρ_2, ρ_3, σ_1, σ_2. В результате получим нормализованную систему уравнений возмущенного движения, которая распадается на две независимые подсистемы:

$$\dot\rho_1 = -\frac{Q_1}{2}\rho_1\rho_3, \quad \dot\rho_2 = -\frac{Q_4}{2}\rho_2\rho_3, \quad \dot\rho_3 = \frac{Q_5}{2}\rho_1^2 + \frac{Q_7}{2}\rho_2^2, \tag{2.5.7}$$

$$\dot\sigma_1 = \Omega_1, \qquad \dot\sigma_2 = \Omega_2 . \tag{2.5.8}$$

В (2.5.7) отброшены члены выше второго порядка, а в (2.5.8) – выше первого порядка относительно ρ_k, $k = 1, 2, 3$.

В ε-окрестности положения равновесия первые части уравнений (2.5.7) и (2.5.8) отличаются от отвечающих им правых частей точных уравнений возмущенного движения на величины порядка ε^3 и ε^2 соответственно. Решения точных уравнений аппроксимируются решениями системы (2.5.7)-(2.5.8) с погрешностью порядка ε^2 для ρ_k и порядка ε для σ_j на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. Ограничиваясь этой точностью, будем вместо полных уравнений возмущенного движения рассматривать приближенную систему (2.5.7)-(2.5.8).

Для описания характера движения скейтборда выясним, прежде всего, какой знак имеют коэффициенты Q_1, Q_4, Q_5, Q_7. Начнем с определения знаков постоянных Q_5 и Q_7. Поскольку $c_{22} > 0$, $c_{12} < 0$ и

$$c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=\frac{\left(\Pi_{11}\Pi_{22}-\Pi_{12}^2\right)K_1}{\left(E_1N_1-J_1^2\right)A_1}>0,$$

то можно делать вывод, что

$$Q_5>0, \qquad Q_7>0.$$

Таким образом, переменная ρ_3, которая представляет собой малую скорость прямолинейного движения скейтборда, имеет положительную производную и, следовательно, является возрастающей функцией времени.

Теперь определим знак постоянных Q_1 и Q_4. Учитывая, что знаменатель у Q_1 положителен, а у Q_4 – отрицателен, то фактически нам нужно определить знак числителей этих выражений. Числитель постоянной Q_1 имеет вид:

$$c_{22}c_{33}+c_{21}c_{23}+c_{23}\Omega_2^2$$

или, подставляя явное выражение для Ω_2^2:

$$c_{22}c_{33}+\frac{c_{21}c_{23}}{2}-\frac{c_{23}c_{32}}{2}-\frac{c_{23}}{2}\sqrt{\left(c_{21}-c_{23}\right)^2+4c_{22}c_{31}}. \tag{2.5.9}$$

Поскольку согласно принятым предположениям коэффициент $c_{23}<0$, то

$$-\frac{c_{23}}{2}\sqrt{\left(c_{21}-c_{23}\right)^2+4c_{22}c_{31}}>0.$$

Таким образом, если

$$c_{22}c_{33}+\frac{c_{21}c_{23}}{2}-\frac{c_{23}c_{32}}{2}>0,$$

то числитель у постоянной Q_1 положителен. Выясним, какой знак будет иметь числитель Q_1 в случае, если

$$c_{22}c_{33}+\frac{c_{21}c_{23}}{2}-\frac{c_{23}c_{32}}{2}<0.$$

В этом случае оба выражения

$$-\frac{c_{23}}{2}\sqrt{\left(c_{21}-c_{23}\right)^2+4c_{22}c_{31}}>0, \tag{2.5.10}$$

$$\frac{c_{23}}{2}\left(c_{32}-c_{21}\right)-c_{22}c_{33}>0 \tag{2.5.11}$$

положительны, следовательно, знак разности квадратов этих выражений совпадает со знаком разности самих выражений. Таким образом, возводя оба выражения в квадрат и вычитая первое из второго, получим выражение

$$c_{23}^2 c_{31} + c_{23} c_{32} c_{33} - c_{21} c_{23} c_{33} - c_{22} c_{33}^2,$$

имеющее вид дроби, знаменатель которой положителен, а числитель имеет вид:

$$B_1^2 J_1 \Pi_{22} + B_1 K_1 N_1 \Pi_{11} - J_1 K_1^2 \Pi_{11} - B_1 E_1 K_1 \Pi_{22} + E_1 K_1^2 \Pi_{12} - B_1^2 N_1 \Pi_{12}.$$

Данное выражение уже возникало при выписывании условий устойчивости (2.3.4) равномерного прямолинейного движения скейтборда (2.3.1). При выполнении принятых предположений оно будет положительным. Тем самым мы доказали, что выражение (2.5.10) по модулю больше выражения (2.5.11). Следовательно, независимо от того, какой знак имеет выражение (2.5.11) общее выражение (2.5.9) будет положительным. Другими словами, при сделанных предположениях числитель постоянной Q_1 будет положительным и, следовательно, эта постоянная будет положительной. Рассуждая аналогично, можно показать, что числитель постоянной Q_4 будет отрицателен, но так как отрицателен и знаменатель постоянной Q_4, то эта постоянная также оказывается положительной. Окончательно заключаем, что

$$Q_1 > 0, \qquad Q_4 > 0.$$

Зная теперь, какой знак имеют постоянные Q_1, Q_4, Q_5, Q_7 мы можем произвести интегрирование уравнений (2.5.7)-(2.5.8).

Уравнения (2.5.8) сразу интегрируются. Получаем

$$\sigma_j(t) = \Omega_j t + \sigma_j(0), \quad j = 1, 2.$$

Система (2.5.7) описывает эволюцию амплитуды ρ_1 высокочастотных колебаний, амплитуды ρ_2 низкочастотных колебаний и скорости ρ_3 прямолинейного движения скейтборда. Легко показать, что данная система имеет два дополнительных интеграла

$$\rho_1^{-\kappa_1}\,\rho_2 = n_2, \qquad \left(\kappa_1 = \frac{Q_4}{Q_1} > 0\right) \tag{2.5.12}$$

$$\kappa_2\,\rho_1^2 + \kappa_3\,\rho_2^2 + \rho_3^2 = n_1^2, \quad \left(\kappa_2 = \frac{Q_5}{Q_1} > 0\,,\, \kappa_3 = \frac{Q_7}{Q_4} > 0\right) \tag{2.5.13}$$

где n_1, n_2 – постоянные, определяемые начальными условиями.

Траектория системы (2.5.7) представлена на Рис. 31 в пространстве ρ_1, ρ_2, ρ_3. Они расположены в области $\rho_1 \ge 0$, $\rho_2 \ge 0$ и представляют собой кривые, являющиеся пересечением поверхности эллипсоида (2.5.13) и цилиндрической поверхности (2.5.12). Направления движения по траекториям показано стрелками.

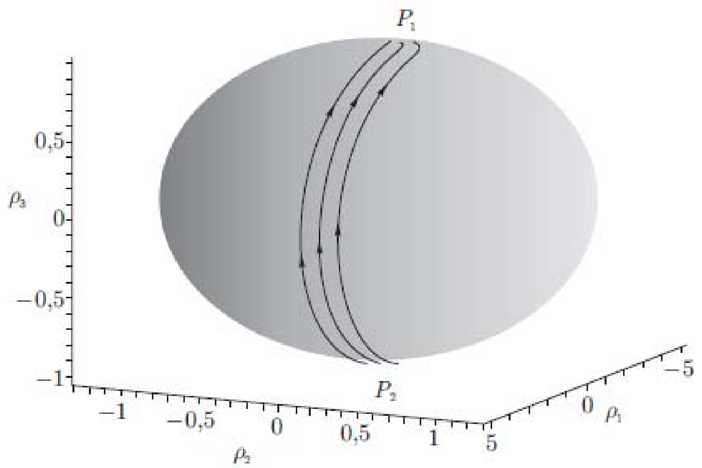


Рис. 31.

Остановимся на свойствах решений системы (2.5.7) и их связи с характером движения скейтборда. Точками $P_1 = (0, 0, n_1)$ и $P_2 = (0, 0, -n_1)$ на рисунке отмечены положения равновесия системы (2.5.7). Им отвечают равномерные прямолинейные движения скейтборда в устойчивом и неустойчивом направлениях. Линеаризуя уравнения (2.5.7) в окрестности указанных положений равновесия, получим

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{Q_1}{2} n_1\,\rho_1, \quad \dot{\rho}_2 = -\frac{Q_4}{2} n_1\,\rho_2, \quad \dot{\rho}_3 = 0\,,$$

т.е. если $n_1 > 0$, то положение равновесия $(0, 0, n_1)$ будет устойчивым, а положение равновесия $(0, 0, -n_1)$ будет, соответственно, неустойчивым.

Если $n_1 < 0$, то наоборот, положение $(0, 0, n_1)$ будет неустойчивым, а положение $(0, 0, -n_1)$ – устойчивым.

Система уравнений (3.5.7) имеет следующие два частных решения, в которых ρ_1 или ρ_2 тождественно равны нулю:

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 2\sqrt{\frac{Q_4}{Q_7} n_1^2 n_3} \frac{\exp\left(-\frac{Q_4 n_1}{2} t\right)}{1 + n_3 \exp\left(-Q_4 n_1 t\right)}, \quad \rho_3 = n_1 \frac{1 - n_3 \exp\left(-Q_4 n_1 t\right)}{1 + n_3 \exp\left(-Q_4 n_1 t\right)}; \quad (2.5.14)$$

$$\rho_1 = 2\sqrt{\frac{Q_1}{Q_5} n_1^2 n_4} \frac{\exp\left(-\frac{Q_1 n_1}{2} t\right)}{1 + n_4 \exp\left(-Q_1 n_1 t\right)}, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = n_1 \frac{1 - n_4 \exp\left(-Q_1 n_1 t\right)}{1 + n_4 \exp\left(-Q_1 n_1 t\right)}. \quad (2.5.15)$$

Здесь n_3 и n_4 – неотрицательные произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Решение (2.5.14) отвечает таким движениям скейтборда, когда в процессе прямолинейного движения система совершает низкочастотные колебания с амплитудой $\rho_2(t)$. Зависимость функций ρ_2 и ρ_3 от времени дают полное представление о характере движения скейтборда в этом частном случае. Будем считать, что мы находимся в окрестности устойчивого равновесия $(n_1 > 0)$ и в начальный момент времени $\rho_3(0) > 0$, т.е. $n_3 < 1$ (случай $n_1 > 0$, $n_3 > 1$ аналогичен случаю $n_1 < 0$, $n_3 < 1$, который будет рассмотрен ниже). Эти условия соответствуют тому, что в начальный момент скейтборд получил малую скорость

$$\rho_3 = n_1 \frac{1 - n_3}{1 + n_3}$$

в устойчивом направлении. Тогда с течением времени амплитуда низкочастотных колебаний ρ_2 монотонно убывает от ее начального значения

$$\rho_2 = \frac{2 n_1}{1 + n_3} \sqrt{\frac{Q_4}{Q_7} n_3}$$

до нуля (Рис. 32), а скорость движения скейтборда ρ_3 возрастает по модулю. В пределе скейтборд движется в устойчивом направлении с постоянной скоростью n_1 (Рис. 33).

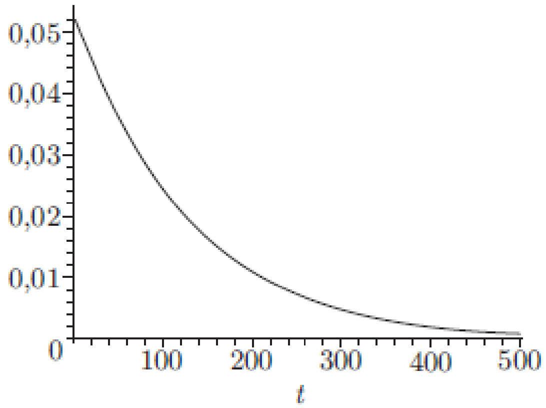


Рис. 32. Зависимость амплитуды низкочастотных колебаний ρ_2 от времени для частного решения (2.5.14) в случае $n_1 > 0$, $n_3 < 1$.

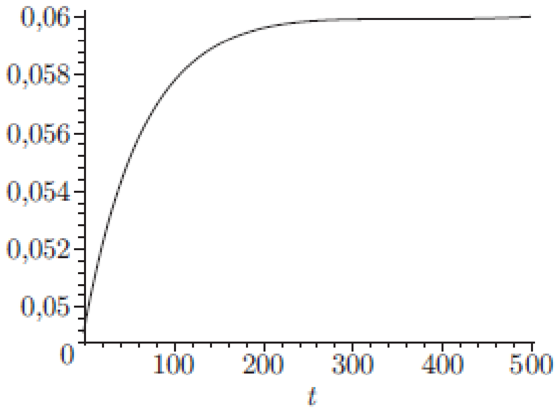


Рис. 33. Зависимость скорости скейтборда ρ_3 от времени для частного решения (2.5.14) в случае $n_1 > 0$, $n_3 < 1$.

Пусть теперь мы находимся в окрестности неустойчивого равновесия $n_1 < 0$. Предположим снова, что в начальный момент времени $n_3 < 1$, т.е. $\rho_3(0) < 0$ (случай $n_1 < 0$, $n_3 > 1$ аналогичен разобранному выше случаю $n_1 > 0$, $n_3 < 1$). Эти условия соответствуют тому, что в начальный момент скейтборд получил малую скорость

$$\rho_3 = n_1 \frac{1 - n_3}{1 + n_3}$$

в неустойчивом направлении. В этом случае предельное движение системы будет таким же, как и при $\rho_3(0) > 0$, но эволюция движения существенно иная. При

$$0 < t < t_* = \frac{\ln(n_3)}{Q_4 n_1}$$

амплитуда низкочастотных колебаний ρ_2 монотонно возрастает, а скейтборд движется в неустойчивом направлении со все уменьшающейся по модулю скоростью. В момент времени $t = t_*$ скорость скейтборда обращается в нуль, а амплитуда колебаний ρ_2 достигает своего максимального значения

$$\rho_2(t_*) = \sqrt{\frac{Q_4}{Q_7} n_1^2}\ .$$

При $t > t_*$ скейтборд движется уже в устойчивом направлении с возрастающей по модулю скоростью, а амплитуда низкочастотных колебаний монотонно убывает (Рис. 34). Таким образом, при $\rho_3(0) < 0$ за время эволюции движения один раз происходит смена направления прямолинейного движения скейтборда с постоянной скоростью (Рис. 35). Ранее аналогичный эффект был получен для более простой модели скейтборда (см. пункт 10 Главы 1), известен он также и в других задачах неголономной механики (например, в классической задаче о движении кельтского камня [1, 21, 24, 26, 37, 39, 73, 89, 108, 109]).

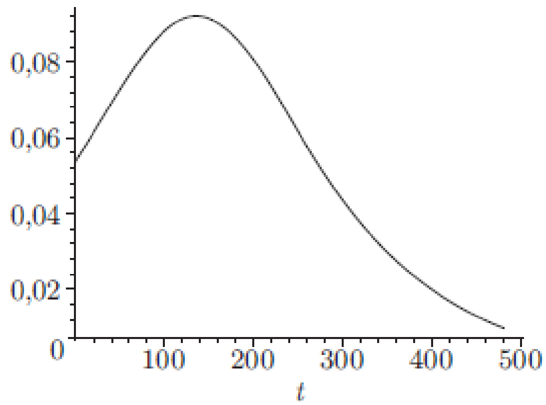


Рис. 34. Зависимость амплитуды низкочастотных колебаний ρ_2 от времени для частного решения (2.5.14) в случае $n_1 < 0$, $n_3 < 1$.

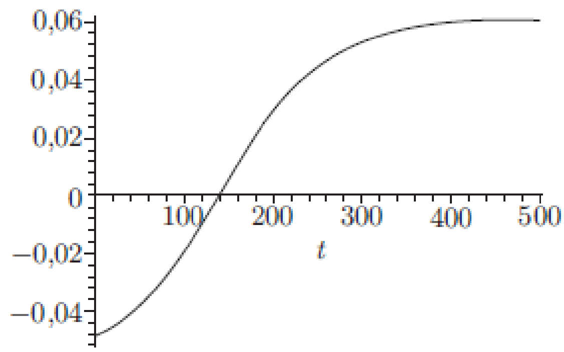


Рис.35. Зависимость скорости скейтборда ρ_3 от времени для частного решения (2.5.14) в случае $n_1 < 0$, $n_3 < 1$.

Если теперь вернутся к нормальным координатам y_1, y_2, y_3, в которых уравнения движения имеют вид (2.5.4), то они выражаются через переменные ρ_1, ρ_2, ρ_3, σ_1, σ_2 по формулам

$$y_1 = \rho_1 \sin\sigma_1 - \frac{Q_1}{4\Omega_1}\rho_1\rho_3\cos\sigma_1 + \frac{\Omega_2 Q_2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}\rho_2\rho_3\cos\sigma_2,$$

$$y_2 = \rho_2 \sin\sigma_2 - \frac{Q_4}{4\Omega_2}\rho_2\rho_3\cos\sigma_2 - \frac{\Omega_1 Q_3}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}\rho_1\rho_3\cos\sigma_1,$$

$$y_3 = \rho_3 - \frac{Q_5}{2\Omega_1}\rho_1^2\sin\sigma_1\cos\sigma_1 - \frac{Q_6}{2(\Omega_2 - \Omega_1)}\rho_1\rho_2\sin(\sigma_1 - \sigma_2) - \\ - \frac{Q_6}{2(\Omega_2 + \Omega_1)}\rho_1\rho_2\sin(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{Q_7}{2\Omega_2}\rho_2^2\sin\sigma_2\cos\sigma_2,$$

а выражения для углов γ и φ через нормальные координаты даются формулами (2.5.3). На Рис. 36-39 представлены графики зависимости углов γ

и φ от времени для частного решения (2.5.14) в устойчивом и неустойчивом случаях.

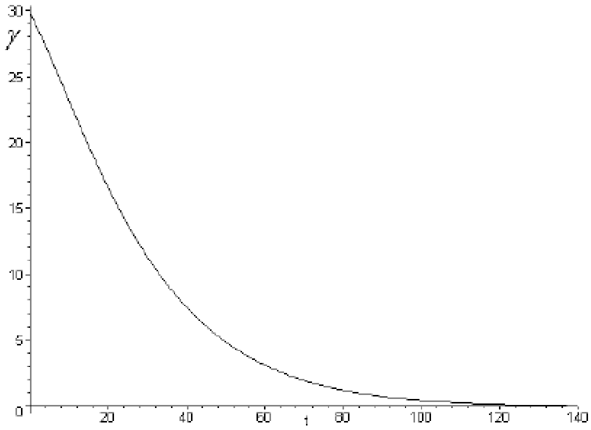


Рис. 36. Зависимость угла наклона доски γ от времени для частного решения (2.5.14) в случае $n_1 > 0$, $n_3 < 1$.

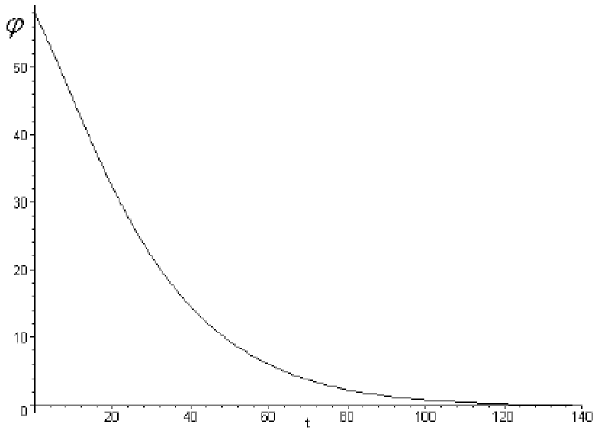


Рис.37. Зависимость угла наклона райдера φ от времени для частного решения (2.5.14) в случае $n_1 > 0$, $n_3 < 1$.

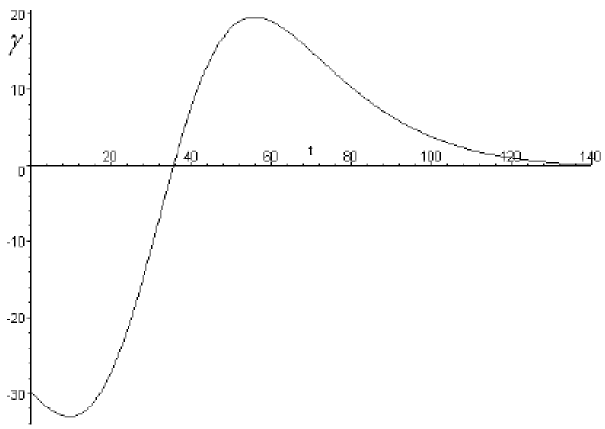


Рис. 38. Зависимость угла наклона доски γ от времени для частного решения (2.5.14) в случае $n_1 < 0$, $n_3 < 1$.

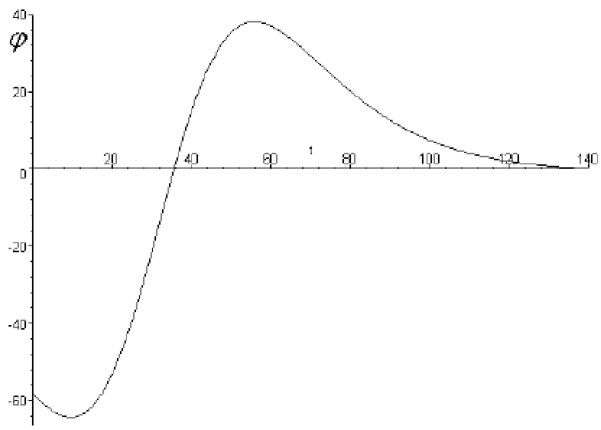


Рис.39. Зависимость угла наклона райдера φ от времени для частного решения (2.5.14) в случае $n_1 < 0$, $n_3 < 1$.

Решение (2.5.15) отвечает таким движениям скейтборда, когда в процессе прямолинейного движения система совершает высокочастотные колебания с амплитудой $\rho_1(t)$. Анализ эволюции движения в это случае аналогичен предыдущему случаю. Если скейтборд движется в неустойчивом направлении, то при

$$t = t_{**} = \frac{\ln(n_4)}{Q_1 n_1}$$

происходит смена направления движения. В этот момент амплитуда высокочастотных колебаний ρ_1 достигает своего максимального значения

$$\rho_1(t_{**}) = \sqrt{\frac{Q_1}{Q_5} n_1^2}\,.$$

Графики зависимости функций ρ_1 и ρ_3 от времени для частного решения (2.5.15) будут подобны тем, что представлены на Рис. 32-35. Однако, в силу того, что в данном случае система совершает высокочастотные колебания, графики зависимости углов γ и φ от времени будут иметь существенно другой вид, чем представленные на Рис. 36-39. В данном случае эти графики имеют вид Рис. 40-43.

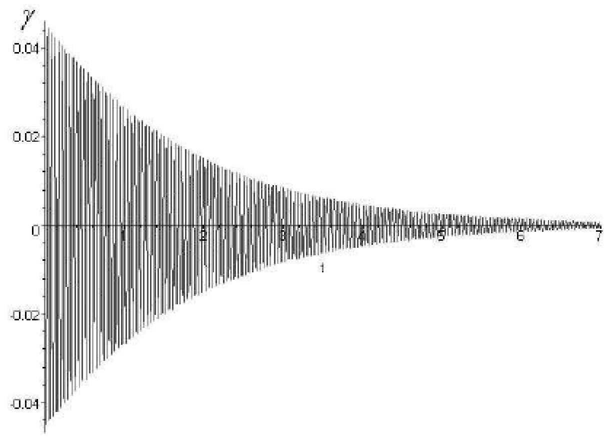


Рис. 40. Зависимость угла наклона доски γ от времени для частного решения (2.5.15) в случае $n_1 > 0$, $n_3 < 1$.

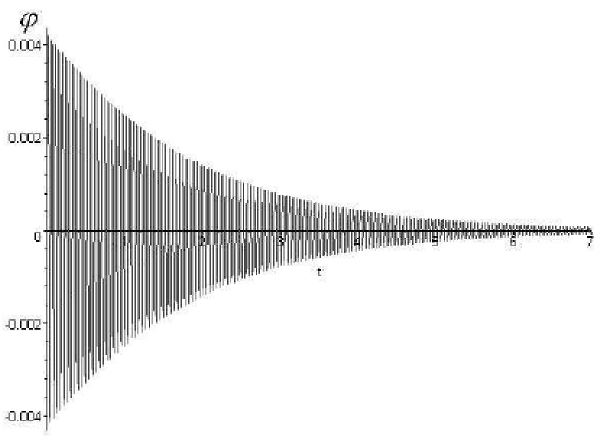


Рис.41. Зависимость угла наклона райдера φ от времени для частного решения (2.5.15) в случае $n_1 > 0$, $n_3 < 1$.

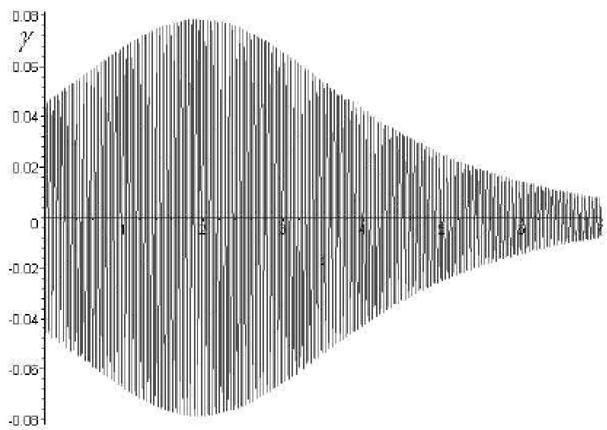


Рис. 42. Зависимость угла наклона доски γ от времени для частного решения (2.5.15) в случае $n_1 < 0$, $n_3 < 1$.

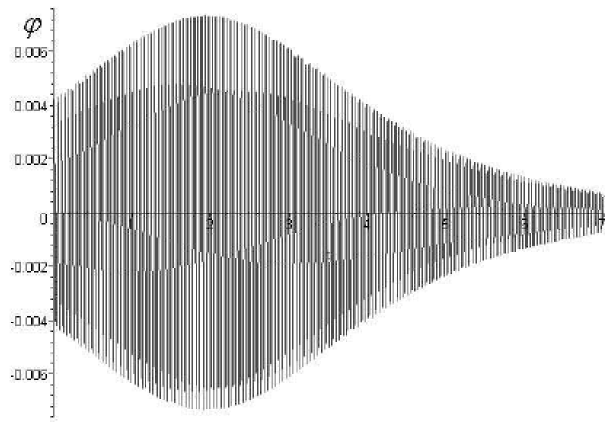


Рис.43. Зависимость угла наклона райдера φ от времени для частного решения (2.5.15) в случае $n_1 < 0$, $n_3 < 1$.

Рассмотрим теперь решения системы (2.5.7), отличные от решений (2.5.14), (2.5.14) и положений равновесия P_1 и P_2. Из интегралов (2.5.12) и (2.5.13) имеем:

$$\rho_2 = n_2\,\rho_1^{\kappa_1}, \qquad \rho_3 = \pm f\left(\rho_1\right),$$
$$f\left(\rho_1\right) = \sqrt{n_1^2 - \kappa_2\,\rho_1^2 - \kappa_3\,n_2^2\,\rho_1^{2\kappa_1}}\,. \tag{2.5.16}$$

Подставив ρ_3 из (2.5.16) в первое уравнение системы (2.5.7), получим

$$\dot{\rho}_1 = \mp\frac{Q_1}{2}\rho_1\,f\left(\rho_1\right),$$

откуда, разделяя переменные, находим

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1\,f\left(\rho_1\right)} = \mp\frac{Q_1}{2}dt\,. \tag{2.5.17}$$

Если из (2.5.17) найдена функция $\rho_1\left(t\right)$, то $\rho_2\left(t\right)$ и $\rho_3\left(t\right)$ вычисляются по формулам (2.5.16).

Найти явную аналитическую зависимость ρ_1 от времени невозможно. Но качественный характер движения можно получить непосредственно из системы уравнений (2.5.7). Пусть, например, в начальный момент величина ρ_3 положительна. Тогда, поскольку $Q_1 > 0$ и $Q_4 > 0$, то правые части первых двух уравнений системы (2.5.7) будут отрицательны и, следовательно, функции $\rho_1\left(t\right)$ и $\rho_2\left(t\right)$ будут убывать с течением времени. Так как $Q_5 > 0$ и $Q_7 > 0$, то в правой части третьего уравнения стоит неотрицательное выражение, которое убывает, поскольку убывают ρ_1 и ρ_2. В пределе $\rho_1\left(t\right)$ и $\rho_2\left(t\right)$ стремятся к нулю, а $\rho_3\left(t\right)$ стремится к величине n_1, как следует из интеграла (2.5.13).

Пусть теперь в начальный момент величина ρ_3 отрицательна. Тогда в правых частях двух первых уравнений системы (2.5.7) стоят положительные выражения, и, следовательно, функции $\rho_1\left(t\right)$ и $\rho_2\left(t\right)$ будут возрастать с течением времени. Также будет возрастать, оставаясь отрицательной, и функция $\rho_3\left(t\right)$. В какой-то момент она обратится в нуль; в этот момент функции $\rho_1\left(t\right)$ и $\rho_2\left(t\right)$ примут свои максимальные значения. После этого момента времени функция $\rho_3\left(t\right)$ поменяет знак и начнет принимать положительные значения, функции $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ начнут убывать, и в пределе мы придем к ситуации, описанной выше. Таким образом, и в общем случае качественная картина движения будет похожа на ту, что была описана при рассмотрении частных решений (2.5.14)-(2.5.15), с той лишь разницей, что в общем случае мы не можем указать явных зависимостей функций ρ_1, ρ_2 и ρ_3 от времени. Графики зависимости функций ρ_1, ρ_2 и ρ_3 от времени, построенные численно как для случая устойчивого направления движения, так и для случая неустойчивого направления движения (Рис. 44-49) подтверждают выводы о характере движения скейтборда.

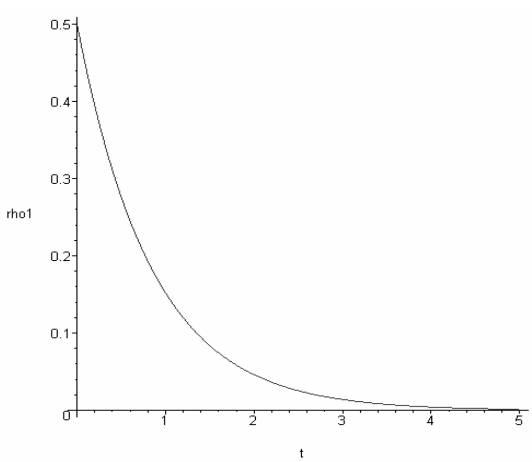


Рис. 44. Зависимость амплитуды высокочастотных колебаний ρ_1 от времени в общем случае $n_1 > 0$.

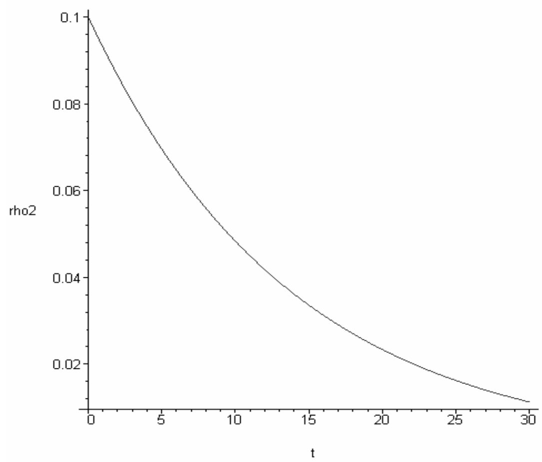


Рис. 45. Зависимость амплитуды низкочастотных колебаний ρ_2 от времени в общем случае $n_1 > 0$.

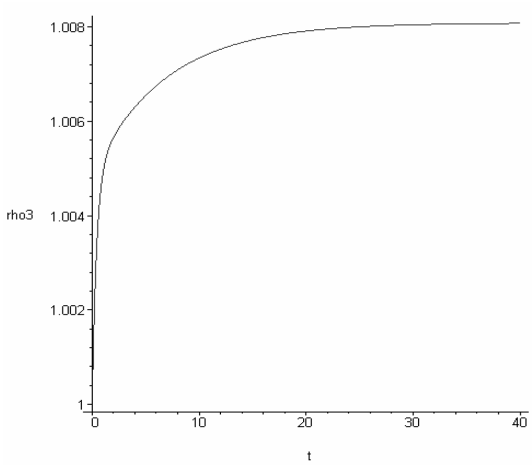


Рис. 46. Зависимость скорости скейтборда ρ_3 от времени в общем случае $n_1 > 0$.

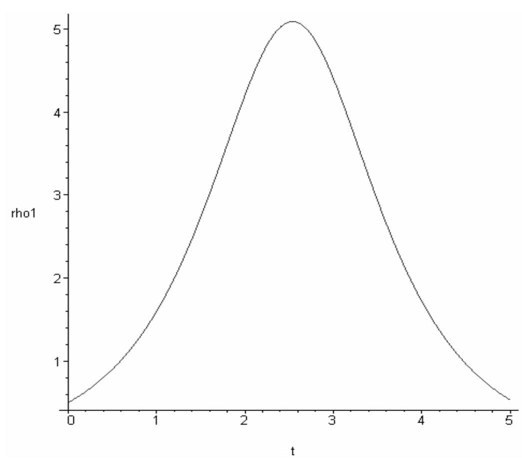


Рис. 47. Зависимость амплитуды высокочастотных колебаний ρ_1 от времени в общем случае $n_1 < 0$.

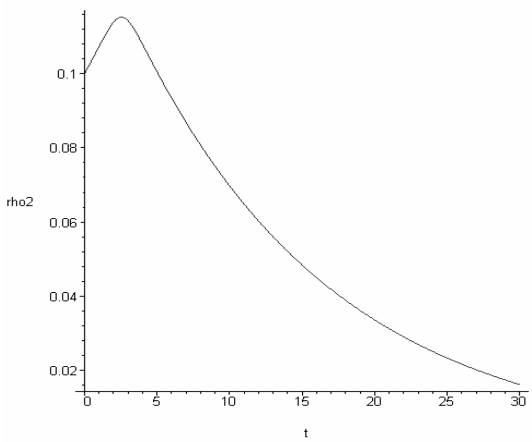


Рис. 48. Зависимость амплитуды низкочастотных колебаний ρ_2 от времени в общем случае $n_1 < 0$.

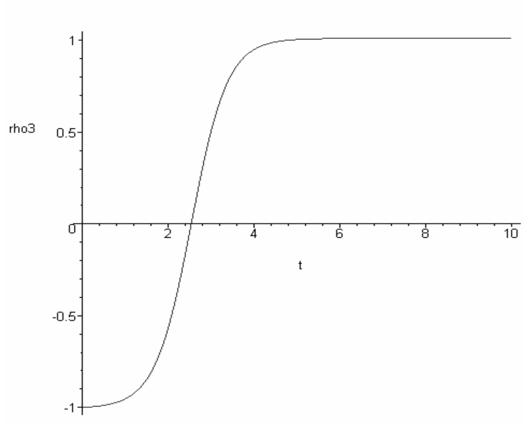


Рис. 49. Зависимость скорости скейтборда ρ_3 от времени в общем случае $n_1 < 0$.

Таким образом, были исследованы некоторые свойства модели скейтборда с тремя степенями свободы. Данную модель можно развивать в различных направлениях: с одной стороны, можно рассмотреть более сложную конструкцию скейтборда и учесть наличие колес и характер их взаимодействия с опорной плоскостью. С другой стороны, можно построить более сложную (и более соответствующую реальности) конструкцию подвески и выяснить, какие дополнительные динамические эффекты возникают при такой конструкции. Можно построить также более сложную конструкцию райдера, ввести в систему управление и изучать систему с управлением. Все эти задачи являются весьма интересными и ждут своего решения.

Дополнение 1. О выборе значений основных параметров задачи.

В этом дополнении обсуждается то, какие значения могут принимать основные параметры задачи, а, следовательно, и постоянные, входящие в уравнения движения.

Во Введении к первой главе было уже упомянуто, что современные доски имеют длину от 78 до 83 см и ширину от 17 до 21 см. Предположим, что доска скейтборда представляет собой однородный прямоугольник с соответствующими сторонами. Учитывая, что масса доски примерно от 2 до 3 кг, можно сделать вывод, что момент инерции доски I_{bx} относительно ее продольной оси, проходящей через центр масс меняется в пределах от 0.0048 кг · м^2 до 0.011 кг · м^2, а момент инерции доски I_{by} относительно поперечной оси, проходящей через центр масс, меняется в пределах от 0.1014 кг · м^2 до 0.1722 кг · м^2. Соответственно, в силу того, что прямоугольник – плоское тело, момент инерции I_{bz} относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс доски изменяется в пределах от 0.1062 кг · м^2 до 0.1832 кг · м^2.

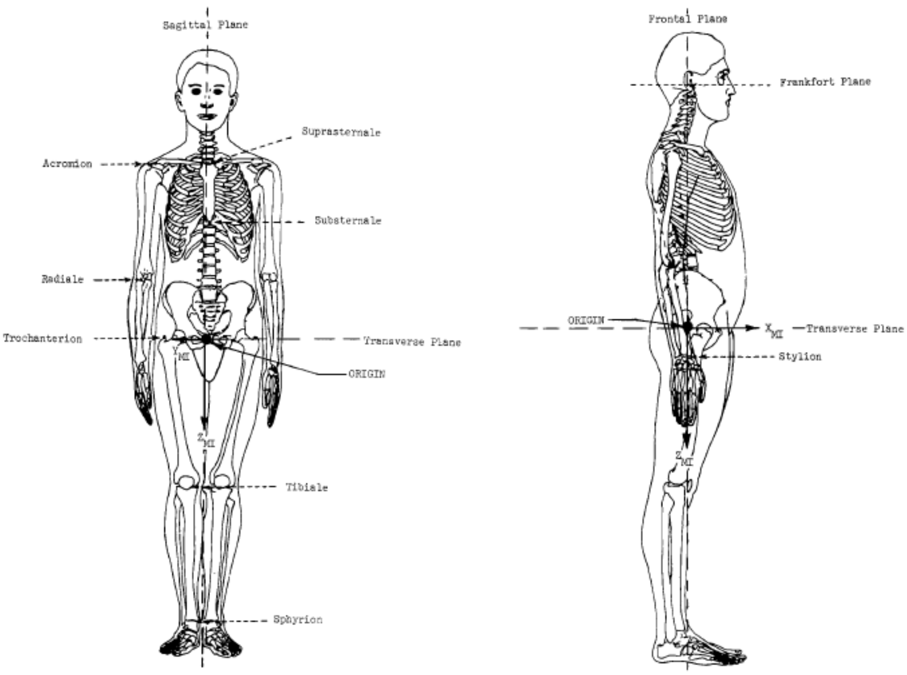


Рис. 50.

Обсудим теперь, в каком диапазоне изменяются динамические характеристики райдера. Задаче вычисления основных динамических характеристик человеческого тела (положения центра масс, моментов инерции и т.д.) посвящена многочисленная литература. Подобный обзор имеющейся литературы был сделан в работе [72]. В нашем исследовании будем пользоваться, в основном, результатами работ [81-83, 91, 113]. Согласно этим работам, для неподвижно стоящего с опущенными руками человека (Рис. 50), вес которого составляет $m_r = 85.81 \pm 10.79$ кг и рост которого 1.8 ± 0.06 м, момент инерции относительно поперечной (медиолатеральной, mediolateral) оси составляет $I_{rx} = 13.56 \pm 1.93$ кг · м^2, момент инерции относительно передне-задней (antero-posterior) оси составляет $I_{ry} = 14.28 \pm 1.90$ кг · м^2, а момент инерции относительно вертикальной (longitudinal) оси составляет $I_{rz} = 1.42 \pm 0.28$ кг · м^2. При этом центр масс человеческого тела находится относительно ступней на высоте, составляющей приблизительно от 55% до 59% от полного роста человека [82]. Следовательно, высота центра масс человеческого тела над плоскостью доски при указанном росте человека изменяется в пределах от 0.957 м до 1.062 м.

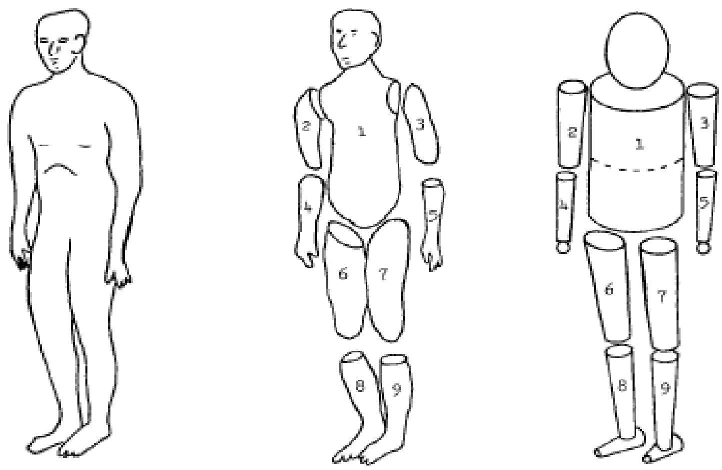


Рис. 51. Этапы моделирования человеческого тела.

Таким образом, величины I_x, I_y, I_z, представляющие собой суммы соответствующих моментов инерции доски и райдера, изменяются в пределах

$I_x \in (11.635; 15.501)$ кг·м², $I_x \in (12.481; 16.352)$ кг·м², $I_z \in (1.246; 1.883)$ кг·м².

Доска скейтборда над плоскостью движения h меняется в пределах от 0.05 м до 0.07 м. Высота центра масс райдера над плоскостью в простейшей модели изменяется в пределах

$$l \in (1.007; 1.132) \text{ м.}$$

Проведенный анализ показывает, что отношение высоты h, на которой находится центр масс доски, к высоте l центра масс райдера над плоскостью изменяется в пределах

$$\frac{h}{l} \in (0.04; 0.07).$$

Отношение массы доски m_b к массе райдера m_r изменяется в пределах

$$\frac{m_b}{m_r} \in (0.02; 0.04).$$

Отношение момента инерции I_z к моменту I_y изменяется в пределах

$$\frac{I_z}{I_y} \in (0.08; 0.15).$$

Таким образом, если считать отношение I_z к I_y малым параметром (обозначим его ε), то отношение h к l и отношение m_b к m_r имеют порядок ε. Полагая теперь $h = \varepsilon l$, $m_b = \varepsilon m_r$, $I_z = \varepsilon I_y$ выпишем, с точностью до членов второго порядка по ε, чему равно выражение $4A_1F_1 - (C_1 - 2D_1)^2$ в интегрируемом случае для простейшей модели скейтборда (при $B_1 = 0$, когда $\operatorname{tg}\lambda_r$ выражается через остальные параметры задачи по формуле (1.8.1)):

$$4A_1F_1 - (C_1 - 2D_1)^2 \approx \frac{4m_r I_y \operatorname{tg}^2\lambda_f}{d^2} + \\ + \left(\frac{4m_r^2 l^2 \operatorname{tg}^2\lambda_f}{d^2} + \frac{m_r l\left(4I_y + m_r(a-2d)^2\right)\operatorname{tg}^3\lambda_f}{d^3} \right)\varepsilon.$$

Видно, что это выражение будет положительным при всех значениях параметров. Таким образом, реальной физической ситуации более соответствует случай $4A_1F_1 - \left(C_1 - 2D_1\right)^2 > 0$, когда функция $G(\gamma)$ определяется формулой (1.8.12).

Перейдем к особенностям модели скейтборда с тремя степенями свободы. Величина $m_b h^2$ меняется, в пределах от 0.005 кг · м^2 до 0.0147 кг · м^2, таким образом, выражение

$$\left(I_{bx} + m_b h^2\right) l$$

(заметим, что в постановке задачи об исследовании модели скейтборда с тремя степенями свободы l обозначает высоту центра масс человека над доской, а не над плоскостью движения) изменяется в пределах от 0.0094 кг · м^3 до 0.0273 кг · м^3. Величина $I_{rx} h$ может изменяться в пределах от 0.5815 кг · м^3 до 1.084 кг · м^3. Видно, что даже нижний предел этого выражения превосходит верхний предел выражения $\left(I_{bx} + m_b h^2\right) l$ более чем в 10 раз. Поэтому реальной физической ситуации соответствует случай, когда выражение $I_{rx} h - I_{bx} l - m_b h^2 l$ является положительным.

Дополнение 2. Об устойчивости стационарных движений неголономных систем с линейными первыми интегралами.

В этом дополнении кратко изложены основные результаты об устойчивости стационарных движений неголономных систем, допускающих линейные по квазискоростям (обобщенным скоростям или псевдоскоростям) первые интегралы известны в явном виде.

Пусть

$$H = H(\mathbf{v};\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) + V(\mathbf{r}) = c_0 \; - \qquad (Д2.1)$$

полная механическая энергия системы (интеграл энергии), а

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{v};\mathbf{r}) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})\mathbf{v} = \mathbf{c}, \qquad \left(\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k\right) \; - \qquad (Д2.2)$$

k-мерный вектор линейных интегралов.

Здесь $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ – n-мерный вектор квазискоростей (в частности импульсов или обобщенных скоростей), $\mathbf{r} \in \mathrm{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ – m-мерный вектор определяющих координат систем (M – конфигурационное пространство определяющих координат, $\dim \mathrm{M} \le n$). Матрица $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – положительно определенная $n \times n$-мерная матрица $\left(\mathbf{A}(\mathbf{r}) \in C^2\right)$ кинетической энергии, $V(\mathbf{r}) \in C^2 : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ – потенциальная энергия системы, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ – $n \times k$-мерная матрица линейных интегралов (здесь и далее полагаем, что для любого $\mathbf{r} \in \mathrm{M}$ выполняются условия $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \in C^2$, $\operatorname{rank} \mathbf{B} = k$).

Согласно теории Рауса [44, 45, 97, 100, 101, 107], критическим точкам функции H на фиксированных уровнях первых интегралов $\mathbf{K} = \mathbf{c}$ отвечают стационарные движения системы, причем точкам минимума – устойчивые стационарные движения. Учитывая структуру функций (Д2.1) и первых интегралов (Д2.2) задачу определения критических точек данной функции на фиксированных уровнях интегралов можно решать в два этапа. Сначала определяется единственный минимум функции H на фиксированных уровнях $\mathbf{c}$ первых интегралов $\mathbf{K} = \mathrm{const}$ по переменным $\mathbf{v}$ (при этом переменные $\mathbf{r}$ рассматриваются как параметры)

$$\min_{\mathbf{v}} H\Big|_{\mathbf{K}=\mathbf{c}} = H\left(\mathbf{v}_c(\mathbf{r}); \mathbf{r}\right),$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{v}_c(\mathbf{r}), \tag{Д2.3}$$

$$H\left(\mathbf{v}_c(\mathbf{r}); \mathbf{r}\right) = W_c(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}\right). \tag{Д2.4}$$

Функция $W_c(\mathbf{r})$ называется эффективным потенциалом [26, 52, 67]. Очевидно, эффективный потенциал зависит от переменных $\mathbf{r} \in \mathrm{M}$ и параметров $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$. Затем задача исследования стационарных движений сводится к задаче анализа эффективного потенциала.

Теорема 1. *Если эффективный потенциал принимает невырожденные значения в точке* $\mathbf{r}_0 \in \mathrm{M}$*, то*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_c(\mathbf{r}_0) \; -$$

стационарное движении.

Точка $\mathbf{r}_0$, доставляющая эффективному потенциалу стационарное значение, зависит от постоянных $\mathbf{c}$ первых интегралов (Д2.2). Это означает, что стационарные в конфигурационном пространстве точки $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{c})$ образуют в пространстве $\{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k, \mathbf{r} \in \mathrm{M}\}$ *k*-параметрические семейства. Такие же семейства образуют в пространстве $\{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k, \mathbf{r} \in \mathrm{M}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$ стационарные в фазовом пространстве точки $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{c})$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{c}) = \mathbf{v}_c(\mathbf{r}_0(\mathbf{c}))$, т.е. стационарные движения.

Даже при фиксированных значениях постоянных $\mathbf{c}$ первых интегралов (Д2.2) эффективный потенциал $W_c(\mathbf{r})$ может принимать стационарные значения не только в точке $\mathbf{r}_0$, но и, вообще говоря, в некоторых других точках $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, …. Эти точки также зависят от постоянных $\mathbf{c}$. В общем случае семейства $\mathbf{r}_0(\mathbf{c})$, $\mathbf{r}_1(\mathbf{c})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{c})$, … могут иметь (при некоторых значениях $\mathbf{c}^*$) общие точки. Такие значения $\mathbf{c}^*$ называются бифуркационными по Пуанкаре. Очевидно, соответствующие стационарные движения $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{c})$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{c}) = \mathbf{v}_c(\mathbf{r}_0(\mathbf{c}))$ имеют общие точки если и только если семейства $\mathbf{r}_0(\mathbf{c})$, $\mathbf{r}_1(\mathbf{c})$, $\mathbf{r}_2(\mathbf{c})$, … имеют общие точки (см. (Д2.3)). Кроме того, по построению эффективного потенциала

$$\operatorname{ind} \delta^2 H(\mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0)\Big|_{(\text{Д}2.2)} = \operatorname{ind} \delta^2 W_c(\mathbf{r}_0).$$

Последние обстоятельства позволяют существенно упростить построение бифуркационных диаграмм Пуанкаре – Четаева и ограничиться построением семейств $\mathbf{r}_0(\mathbf{c}) \cup \mathbf{r}_1(\mathbf{c}) \cup \mathbf{r}_2(\mathbf{c}) \cup \ldots$ в пространстве $\{\mathbf{c}, \mathbf{r}\}$.

Рассмотрим множество

$$\Sigma_{h,c} = \left\{ h \in \mathbb{R}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^k : h = h_s(\mathbf{c}) \ (s = 0, 1, 2, \dots) \right\}$$

пространства $\{h, \mathbf{c}\}$, где

$$h = h_s(\mathbf{c}) = H(\mathbf{v}_c(\mathbf{r}); \mathbf{r}); \ \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_s(\mathbf{c}), \ s = 0, 1, 2, \dots$$

Множество $\Sigma_{h,c}$ называется бифуркационным по Смейлу: в нем происходят перестройки топологических типов областей возможности движения в конфигурационном пространстве, определяемых соотношением $W_c(\mathbf{r}) \le h$, $\mathbf{r} \in \mathrm{M}$.

Теорема 2. *Если эффективный потенциал принимает локально строго минимальное значение при фиксированных значениях* $\mathbf{c}^0$ *постоянных* $\mathbf{c}$ *в некоторой точке* $\mathbf{r}_0(\mathbf{c}^0)$, *то* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\mathbf{c}^0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{c}^0)$ *– устойчивое стационарное движение.*

Теорема 3. *Если индекс второй вариации эффективного потенциала нечетен в точке* $\mathbf{r}_0(\mathbf{c}^0)$, *то* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\mathbf{c}^0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{c}^0)$ *– неустойчивое стационарное движение.*

Теоремы 1-3 следуют теории Рауса – Сальвадори [26, 44, 45, 52, 67, 97, 100, 101, 107] и отвечают специальному виду первых интегралов (Д2.1), (Д2.2). На основании этих теорем и было проведено исследование устойчивости стационарных движений простейшей модели скейтборда в интегрируемом случае.

Дополнение 3. Нормальная форма системы нелинейных дифференциальных уравнений.

В этом дополнении обсуждается процедура приведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений к нормальной форме Пуанкаре. В этом изложении будем следовать книге [16].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с аналитическими в окрестности нуля правыми частями

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(y_1,\ldots,y_n), \\ &\ldots \\ \dot{y}_n &= f_n(y_1,\ldots,y_n). \end{aligned}$$

Здесь y_k – комплексные переменные $(1 \le k \le n)$.

Будем полагать, что правые части в нуле обращаются в нуль, т.е. $f_k(y_1,\ldots,y_n)=0$, $(k=1,\ldots,n)$.

Записанная в виде рядов по степеням переменных эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11}\, y_1 + \ldots + a_{1n}\, y_n + \sum f^1_{m_1\ldots m_n} y_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n}, \\ &\ldots \\ \dot{y}_n &= a_{n1}\, y_1 + \ldots + a_{nn}\, y_n + \sum f^n_{m_1\ldots m_n} y_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n}. \end{aligned} \tag{Д3.1}$$

Суммирование ведется по всем положительным целочисленным m_k, удовлетворяющим условию

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \le 2\,.$$

Число

$$\sigma = \sum m_k$$

называется порядком нелинейного члена $y_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n}$.

Поставим задачу: найти такую аналитическую замену переменных $(y_1,\ldots,y_n)\to(z_1,\ldots,z_n)$, чтобы обратить в нуль максимально возможное число коэффициентов $f^j_{m_1\ldots m_n}$ нелинейной части вплоть до любого заданного порядка σ включительно.

Вид системы, в котором до заданного порядка нелинейных членов никакое дальнейшее упрощение в классе аналитических замен уже невозможно, называется нормальной формой Пуанкаре до соответствующего порядка.

Приведение к нормальной форме можно осуществить последовательно, начиная с линейной части. После упрощения линейной части приступают к упрощению членов второго порядка, затем упрощают члены третьего порядка и так далее вплоть до заданного.

Задача упрощения линейной части хорошо известна: линейным преобразованием она сводится к жордановой форме, в которой матрица линейной части имеет отличными от нуля лишь две диагонали – главную, на которой стоят элементы, называемые собственными числами, и ближайшую к ней, на которой стоят либо нули, либо единицы.

Будем считать, что наша система уже упрощена по линейным членам. Кроме того, рассмотрим здесь только самый простой случай, когда жорданова форма чисто диагональная

$$\dot{y}_k = \lambda_k\, y_k + \sum f^k_{m_1\ldots m_n} y_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n}\,, \quad \left(k = 1,\ldots,n\right).$$

Суть применяемой процедуры нормализации полностью и во всех деталях выясняется при рассмотрении одного единственного нелинейного члена в одном уравнении из n уравнений системы

$$\dot{y}_s = \lambda_s\, y_s\,, \quad s \neq k\,,$$

$$\dot{y}_k = \lambda_k\, y_k + f^k\, y_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n}\,.$$

Здесь уже $m_1,\ldots,\ m_n$ – фиксированы.

Так получается, потому что преобразование, изменяющее этот член, можно выбрать так, чтобы оно не меняло никаких членов низшего порядка. Нужное преобразование имеет вид $\left(y_1,\ldots,\, y_n\right)\rightarrow\left(z_1,\ldots,\, z_n\right)$:

$$y_s = z_s\,, \qquad s \neq k\,,$$

$$y_k = z_k + h^k\, z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n}\,,$$

т.е. линейный член в преобразовании берется точно такого же вида, что и подлежащий уничтожению.

Прежде чем внести это преобразование в преобразуемую систему, запасемся обратным преобразованием, которое с точностью до членов высокого порядка отличается от прямого преобразования лишь знаком перед нелинейным членом:

$$z_k = y_k - h^k\, y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} + \dots$$

Если нас интересует выполнение лишь одного шага, т.е. устранение рассматриваемого члена и появляющиеся при этом члены более высоких порядков нас уже не беспокоят, то в обратном преобразовании достаточно ограничиться выписанными членами. Если же мы предполагаем продолжить процедуру дальше, то обращение преобразования следует выполнять с большей точностью.

Дифференцируя обратное преобразование, получаем

$$\dot z_k = \dot y_k - h^k \left(m_1\, y_1^{m_1-1} y_2^{m_2} \dots y_n^{m_n}\, \dot y_1 + \dots + m_n\, y_1^{m_1} \dots y_{n-1}^{m_{n-1}} y_n^{m_n-1}\, \dot y_n \right) + \dots$$

Подставляя сюда вместо $\dot y_k$ правую часть системы, а вместо y_k его выражение через z_k, находим:

$$\dot z_k = \lambda_k\, z_k + \left(f^k - \left(-\lambda_k + m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n \right) h^k \right) z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n} + \dots$$

Для того, чтобы устранить рассматриваемый нелинейный член, следует выбрать h^k из условия

$$h^k = \frac{f^k}{m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n - \lambda_k}.$$

Это возможно, если $\lambda_k \ne m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n$.

Нелинейный член в k-том уравнении, у которого показатели $m_1, \dots, m_n$ таковы, что

$$\lambda_k = m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n,$$

называется резонансным. Резонансные члены не могут быть уничтожены никакими полиномиальными заменами, они вообще не изменяются при таких заменах.

Устранение нелинейных членов одного порядка в общем случае осуществляется для каждого члена независимо от других

$$y_k = z_k + \sum h^k_{m_1 \dots m_n}\, z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}, \quad \left(k = 1, \dots, n \right).$$

Суммирование распространено на все $m_1, \dots, m_n$ рассматриваемого порядка $m_1 + \dots + m_n = \sigma$. Поскольку все нелинейные члены одного порядка малости преобразуются независимо один от другого, то найденная выше формула для h^k справедлива и в общем случае

$$h^k_{m_1\ldots m_n} = \frac{f^k_{m_1\ldots m_n}}{m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n - \lambda_k}.$$

Таким образом, нормальная форма – это форма, в которой в разложении правых частей по степеням переменных присутствуют лишь резонансные члены.

Справедлива следующая теорема

Теорема (Пуанкаре-Дюлак). *В классе полиномиальных замен конечного порядка любая система вида* (Д3.1) *приводима к виду, в котором все члены до соответствующего порядка включительно резонансны.*

Используя изложенный здесь метод, проводится нормализация систем уравнений в данной работе.

Список литературы.

1. Астапов И.С. Об устойчивости вращения кельтского камня // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1980. No. 2. С. 97-100.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Математические заметки. 2001. Т. 70. № 5. С. 793-796.
3. Борисов А.В., Мамаев И.С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // Успехи физических наук. 2003. Т. 173. № 4. С. 407-418.
4. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 256 с.
5. Буданов В.М., Девянин Е.А. О движении колесных роботов // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 244-255.
6. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука. Т. 1. 1969. 468 с. Т. 2. 1972. 331 с.
7. Бычков Ю.П. О катании твердого тела по неподвижной поверхности // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 573-583.
8. Бычков Ю.П. К задаче о катании твердого тела по неподвижной поверхности // Инженерный журнал. 1965. Т. 5. Вып. 5. С. 803-811.
9. Бычков Ю.П. О движении тела вращения, ограниченного сферой, на сферическом основании // Прикладная математика и механика. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 934-935.
10. Бычков Ю.П. Об уравнениях движения одной механической задачи // Прикладная механика. 1967. Т. 3. Вып. 6. С. 135-137.
11. Воронец П.В. Об уравнениях движения для неголономных систем // Математический сборник. 1901. Т. 22. Вып. 4. С. 659-686.

12. Воронец П.В. Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости. Киев: Тип. ун-та Св. Владимира. 1903.
13. Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР. 1959.
14. Дикарев Е.Д., Дикарева С.Б., Фуфаев Н.А. Влияние наклона рулевой оси и выноса переднего колеса на устойчивость движения велосипеда // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 1. С. 69-73.
15. Жуковский Н.Е. К динамике автомобиля // Жуковский Н.Е. Собрание сочинений. М.-Л.: Гостехиздат. 1950. Т. 7. С. 362-368.
16. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука. Физматлит. 1997. 320 с.
17. Зацепин М.Ф., Мартыненко Ю.Г., Тиньков Д.В. Уравнения Лагранжа, Воронца, Чаплыгина в задачах динамики мобильных роботов. М.: Изд-во МЭИ. 2005. 33 с.
18. Карапетян А.В. Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 801-807.
19. Карапетян А.В. К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 418-426.
20. Карапетян А.В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивость кельтских камней // Прикладная математика и механика. Т. 45. Вып. 1. С. 42-51.
21. Карапетян А.В. О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 808-814.
22. Карапетян А.В. Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 2. С. 45-52.

23. Карапетян А.В., Румянцев А.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ. 1983. 132 с.
24. Карапетян А.В. Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 2. С. 19-24.
25. Карапетян А.В. О специфике применения теории Рауса с системам с дифференциальными связями // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 17-22.
26. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС. 1998. 165 с.
27. Козлов В.В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8. No. 3. С. 85-107.
28. Козлов В.В. О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 538-545.
29. Ламб Г. Теоретическая механика. Т. 3. Более сложные вопросы. ОНТИ НКТП СССР. 1936. 380 с.
30. Линейкин П.С. О качении автомобиля // Труды Саратовского автомобильно-дорожного института. 1939. № 5. С. 3-22.
31. Лобас Л.Г. Неголономные модели колесных экипажей. Киев: Наукова думка. 1986. 231 с.
32. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры. 1961. 824 с.
33. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
34. Маркеев А.П. О движении тяжелого однородного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 553-567.

35. Маркеев А.П. О качении эллипсоида по горизонтальной плоскости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 2. С. 53-62.
36. Маркеев А.П. О движении эллипсоида на шероховатой плоскости при наличии скольжения // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 310-320.
37. Маркеев А.П. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 575-582.
38. Маркеев А.П. О стационарных движениях диска на гладком горизонтальном льду // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 4. С. 16-20.
39. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука. 1992. 336 с.
40. Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. Вып. 8. С. 29-80.
41. Метелицын И.И. Устойчивость движения мотоцикла // Труды Военной Академии бронетанковых и механизированных войск Советской Армии. 1948. № 9. С. 45-98.
42. Муштари Х.М. О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1932. Т. 39. № 1-2. С. 105-126.
43. Охоцимский Д.Е., Мартыненко Ю.Г. Новые задачи динамики и управления движением мобильных колесных роботов // Успехи механики. 2003. Т. 2. № 1. С. 3-47.
44. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1-2. М.: Наука. 1983. 404 с. 544 с.
45. Раус Э.Дж. Об устойчивости заданного состояния движения, в частности, установившегося движения. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 200 с.

46. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 778-784.
47. Румянцев В.В. Об устойчивости движения неголономных систем // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 260-271.
48. Румянцев В.В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 138-143.
49. Румянцев В.В., Карапетян А.В. Устойчивость движений неголономных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 3. М.: ВИНИТИ. 1976. С. 5-42.
50. Румянцев В.В. Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1980. № 4. С. 11-21.
51. Румянцев В.В. К задаче об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости с трением // В сб.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение. 1982. С. 263-272.
52. Смейл С. Топология и механика // Успехи математических наук. 1972. Т. 27. С. 77-133.
53. Сумбатов А.С. О применении некоторых обобщений теоремы площадей в системах с качением твердых тел // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 599-605.
54. Сумбатов А.С. О законе изменения кинетического момента шара, катающегося по неподвижной поверхности // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 867-869.
55. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.-Л.: Гостехиздат. 1946. 655+XVI с.
56. Суслов Г.К. К вопросу о катании поверхности по поверхности // Киевские университетские известия. 1892. № 6. С. 1-41.
57. Татаринов Я.В. Слабо неголономное представление задачи о качении твердого тела и возможности усреднения по фазовым торам // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1988. № 1. С. 25-33.

58. Турскова Т. Ролики. М.: Вече. 2002. 384 с.
59. Харламова Е.И. Качение шара по наклонной плоскости // Прикладная математика и механика. 1958. Т. 22. Вып. 4. С. 504-509.
60. Чаплыгин С.А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 5. Вып. 1. С. 10-16.
61. Чаплыгин С.А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров // Математический сборник. 1897. Т. 20. Вып. 1. С. 1-32.
62. Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1903. Т. 24. Вып. 1. С. 139-168.
63. Чаплыгин С.А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Математический сборник. 1911. Т. 28. Вып. 2. С. 303-314.
64. Чаплыгин С.А. Исследования по динамике неголономных систем. М.-Л.: ГИТТЛ. 1949.
65. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука. 1990. 176 с.
66. Чудаков Е.А. Устойчивость автомобиля против заноса. М.: Машгиз. 1949. 144 с.
67. Abraham R. and Marsden J.E. Foundations of Mechanics. 1978. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
68. Ackermann J. & Strobel M. Die Beschleunigung Beim Slalomskateboarden. 2000. Diploma Thesis. ETH Zürich. Switzerland.
69. Ardema M.D. Analytical Dynamics: Theory and Applications. New York. Kluwer Academic Publishers. 2005.
70. Birr S. und Schöl L.H. Der Ollie – Analyse und Simulation des Sprunges mit einem Skateboard // Abstracts der 64 Physikertagung. Dresden. Technische Universität Dresden. Deutschen Physikalischen Gesellschaft. 2000. P. 36.
71. Birr S. und Schöl L.H. Der Ollie – Analyse und Simulation des Sprunges mit einem Skateboard. 2000.

72. Björnstrup J. Estimation of human body segment parameters – historical background // Technical Report, Laboratory of Image Analysis. Institute of Electronic Systems. Aalborg University.
73. Bondi H. The rigid body dynamics of unidirectional spin // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1986. Vol. 405. P. 265-274.
74. Borisov A.V., Mamaev I.S. The Rolling Motion of a Rigid Body on a Plane and a Sphere. Hierarchy of Dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. Vol. 7. № 2. P. 177-200.
75. Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A. The Rolling Motion of a Ball on a Surface. New Integrals and Hierarchy of Dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. Vol. 7. № 2. P. 201-219.
76. Bourlet C. Etude théorique sur la bicyclette // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1899. T. 27. P. 47-67, 76-96.
77. Boussinesq J. Aperçu sur la théorie de la bicyclette // Journal de Mathématique Pures et Appliquées. 1899. Serie 5. T. 5. P. 117-135.
78. Bridgmans S. Jr. & Collins D.F. Human body motion in an ollie // The Physics Teacher. 1992. Vol. 30. P. 498-499.
79. Broadt B., Necochea C. & Jacobsen S.P. What's an Ollie? // The Physics Teacher. 1991. Vol. 29. P. 498-499.
80. Carvallo E. Théorie du movement du monocycle et de la bicyclette // Journal de l'Ecole Polytechnique. Serie 2. 1900. Cahier 5. P. 119-188. 1901. Cahier 6. P. 1-118.
81. Chandler R.F., Clauser C.E., McConville J.T., Reynolds H.M. and Young J.W. Investigation of inertial properties of the human body // Technical Report DOT HS801 430. Aerospace Medical Research Laboratory. WrightPatterson Air Force Base. OH. 1975.
82. Clauser C.E., McConville J.T. and Young J.W. Weight, volume, and center of mass of segments of the human body // Technical Report AMRLTR6970 (AD 710 622). Aerospace Medical Research Laboratory. WrightPatterson Air Force Base. OH. 1969.

83. Damavandi M., Allard P., Barbier F., Leboucher J., Rivard C.H., & Farahpour N. Estimation of Whole Body Moment of Inertia Using Self-imposed Oscillations // Proceedings of the Ninth International Symposium On the 3D Analysis of Human Movement. Université Valenciennes.
84. Determan J., Frederick E.C. & Cox J. Impact forces during skateboard landings // Proceedings of the XIII Biennial Conference. Canadian Society for Biomechanics. Halifax. 2004. P. 28.
85. Endruweit A. and Ermanni P. Experimental and numerical investigations regarding the deformation-adapted design of a composite flex slalom skateboard // Sports Engineering. 2002. Vol. 5. P. 141-154.
86. Frederick E.C., Determann J.J., Whittlesey S.N. & Hamil J. Biomechanics of skateboarding: Kinetics of the “Ollie” // Proceedings of the VI Symposium on Footwear Biomechanics. Dunedin, New Zealand: International Society of Biomechanics. 2003. P. 167-168.
87. Frederick E.C., Determann J.J., Whittlesey S.N. & Hamil J. Biomechanics of skateboarding: Kinetics of the Ollie // Journal of Applied Biomechanics. 2006. Vol. 22. P. 33-40.
88. Froisland A., Matson J. & Stutzman M. The Skateboard Ollie – a biomechanical analysis. 2004.
89. Garcia A. and Hubbard M. Spin reversal of the rattleback: theory and experiment // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1988. Vol. 418. P. 165-197.
90. Gulino D. Skateboard wheels. 2002.
91. Hanavan E.P. A mathematical model of the human body // Technical Report TR64102 (AD 608 463). Aerospace Medical Research Laboratory. WrightPatterson Air Force Base. OH. 1964.
92. Hubbard M. Lateral Dynamics and Stability of the Skateboard // Journal of Applied Mechanics. 1979. Vol. 46. P. 931-936.
93. Hubbard M. Human Control of the Skateboard // Journal of Biomechanics. 1980. Vol. 13. P. 745-754.

94. Ispolov Yu.G. and Smolnikov B.A. Skateboard Dynamics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1996. Vol. 131. P. 327-333.
95. Lewis A.D., Ostrowski J.P., Murray R.M. and Burdick J.W. Nonholonomic mechanics and locomotion: the Snakeboard example // Proceedings of the IEEE ICRA. San Diego. May 1994. IEEE. P. 2391-2400.
96. Österling A.E. MAS 3030. On the skateboard, kinematics and dynamics. 2004. School of Mathematical Sciences, University of Exeter. United Kingdom.
97. Poincare H Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un movement de rotation // Acta Mathematica. 1885. Vol. 7. P. 259-380.
98. Robinson D. Newtonian exercise on a snake-board // Physics Education. 1999. Vol. 34. No. 4. P. 232-237.
99. Routh G.R.R. On the Motion of a Bicycle // The Messenger of Mathematics. 1899. Vol. 28. P. 151-169.
100. Salvadori L. Un'osservazione su di un criterio di dtabilitá di Routh // Rendiconti Academia delle Scienze fisiche e matematiche. Societá R. di Napoli. 1953. Vol. 4. P. 269-272.
101. Salvadori L. Sulla stabilitá del movimento // Le matematiche. 1969. Vol. 24. No. 1. P. 218-239.
102. Skateboarding: Sports Participation in America. 2004. North Pail Beach, FL: SGMA International.
103. Sports Participation – Series I and II Reports. 2004. Mount Prospect, IL: National Sporting Goods Association.
104. Steinbrecher A. Mathematik kann alles – auch Skateboard fahren? 2005. Berlin. Germany.
105. Steinbrecher A. Numerical simulation of multibody systems via Runge-Kutta Methods. GAMM Jahrestagung. 2006. Berlin. Germany.
106. Synge J.L., Griffith B.A. Principles of Mechanics. New York: McGraw Hill. 1959.
107. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta Mathematica. 1898. Vol. 22. P. 201-357.

108. Walker G.T. On a curious property of celts // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1895. Vol. 8. pt. 5. P. 305-306.
109. Walker G.T. On a Dynamical Top // Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. 1896. Vol. 28. P. 175-184.
110. Walsh M., Creekmur C. and Wojcik J. Force time measures of beginning and skilled skateboarders performing an Ollie // Proceedings of the XXIV International Symposium on Biomechanics in Sports. Salzburg, Austria: International Society of Biomechanics in Sports. Department of Sports Science and Kinesiology. University of Salzburg. 2006. P. 447.
111. Whipple F.J.W. The Stability of the Motion of a Bicycle // Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. 1899. Vol. 30. P. 312-348.
112. Wisse M. and Schwab A.L. Skateboards, Bicycles and Three-dimensional Biped Walking Machines: Velocity-dependent Stability by Means of Lean-to-yaw Coupling // The International Journal of Robotics Research. 2005. Vol. 24. P. 417-429.
113. Wooley C.T. Segment masses, centers of mass and local moments of inertia for an anthropometric model of man // Development of Skylab Experiment T013. Crew/Vehicle Disturbances. National Aeronautic and Space Administration Report D6584. Washington. D.C. 1972.
114. Woronetz P. Über die rollende Bewegung einer Kreisscheibe auf einer beliebigen Fläche unter der Wirkung von gegebenen Kräften // Mathematische Annalen. 1909. Bd. 67. S. 268-280.
115. Woronetz P. Über die rollende Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt // Mathematische Annalen. 1911. Bd. 70. S. 410-453.
116. Woronetz P. Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers // Mathematische Annalen. 1912. Bd. 71. S. 392-403.
117. www.peterverdonedesigns.com/pvdtrucks.htm

118. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Нелинейная динамика и устойчивость движения простейшей модели скейтборда. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при Механико-математическом факультете МГУ. 2007. 104 с.
119. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Математическая модель скейтборда с тремя степенями свободы. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при Механико-математическом факультете МГУ. 2008. 72 с.
120. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Нелинейная динамика простейшей модели скейтборда // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4. № 3. С. 323-340.
121. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Нелинейная динамика модели скейтборда с тремя степенями свободы // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4. № 3. С. 341-355.
122. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Нелинейная динамика простейшей модели скейтборда // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. Донецк. 2007. Вып 37. С. 112-121.
123. Kremnev A.V., Kuleshov A.S. Dynamics and Simulation of the Simplest Model of a Skateboard // Proceedings of the 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference ENOC-2008. June 30 – July 4. 2008. Saint-Petersburg. Russia.
124. Kremnev A.V., Kuleshov A.S. Dynamics and Stability of the Simplest Skateboard Model // Proceedings of the 9th International Conference on Motion and Vibration Control MOVIC-2008. September 15-18. Muenchen. Germany.