Глава II

Методы усреднения

В этом разделе мы приступаем к изложению методов теории усреднения, позволяющих исследовать предельное поведение решений краевых задач с быстро меняющимися коэффициентами. Один из эффективных инструментов этой теории — это лемма о компенсированной компактности, формулировка и доказательство которой даны в следующем параграфе.

§ 5. Компенсированная компактность

В задачах асимптотического анализа часто требуется перейти к пределу в выражениях вида

$$(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x)) = u_{\varepsilon,1}(x)v_{\varepsilon,1}(x) + \cdots + u_{\varepsilon,d}(x)v_{\varepsilon,d}(x),$$

где вектор-функции u_ε и v_ε сходятся слабо в некотором гильбертовом функциональном пространстве H или в сопряженных банаховых пространствах B и B'. При этом сходимость произведения рассматривается в некоторой слабой топологии, скажем, в пространстве обобщенных функций. В простом случае, когда один из сомножителей сходится сильно в H, такой предельный переход не составляет труда. В общем случае сомножители должны обладать некоторыми дополнительными свойствами, "компенсирующими" отсутствие сильной сходимости. Правильная формулировка таких дополнительных условий составляет содержание метода компенсированной компактности, к изложению которого мы переходим. Важным примером является условие "ротор–дивергенция".

5.1. Условие ротор–дивергенция.

Лемма 5.1 (о компенсированной компактности). *Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ заданы два семейства вектор-функций $u_\varepsilon \in (L_2(\Omega))^d$ и $v_\varepsilon \in (L_2(\Omega))^d$ такие, что $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ слабо в $[L_2(\Omega)]^d$ при $\varepsilon \to 0$, $v_\varepsilon \rightharpoonup v_0$ слабо в $[L_2(\Omega)]^d$ при $\varepsilon \to 0$ и $\operatorname{rot} u_\varepsilon = 0$, $\operatorname{div} v_\varepsilon \to f_0$ сильно в $H^{-1}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда*

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_0, v_0) \quad *\text{-слабо в } L_1(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{5.1}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, и, следовательно, $f_0 = 0$. Действительно, достаточно представить $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ в виде $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = (u_\varepsilon - u_0, v_\varepsilon - v_0) - (u_0, v_0) + (u_\varepsilon, v_0) + (u_0, v_\varepsilon)$ и заметить, что $*$-слабый предел суммы последних трех слагаемых равен (u_0, v_0). Равенство $f_0 = 0$ следует из определения обобщенной дивергенции (см. определение 1.4). Свойство $*$-слабой сходимости в пространстве $L_1(\Omega)$ является локальным, поэтому достаточно доказать сходимость $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ к нулю в пространстве $L_1(Q)$ для произвольного шара $Q \subset\subset \Omega$. В шаре Q любое безвихревое поле ($\operatorname{rot} u_\varepsilon = 0$) будет *потенциальным*, т.е. существует функция U_ε такая, что $u_\varepsilon = \nabla_x U_\varepsilon$. Функция U_ε выбирается однозначно с точностью до аддитивной константы. Зафиксируем выбор этой константы, полагая

$$\langle U_\varepsilon \rangle_Q \equiv \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q U_\varepsilon(x)\, dx = 0.$$

Поскольку $\nabla_x U_\varepsilon \rightharpoonup 0$ слабо в $L_2(Q)$, имеем $U_\varepsilon \rightharpoonup 0$ слабо в $H^1(Q)$. Действительно, так как $\langle U_\varepsilon \rangle_Q = 0$, согласно неравенству Пуанкаре

$$\int\limits_Q U_\varepsilon^2 dx \leqslant C \int\limits_Q |\nabla U_\varepsilon|^2 dx,$$

т.е. последовательность $\{U_\varepsilon\}$ ограничена в $L_2(Q)$ и, следовательно, $U_\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $L_2(Q)$ и $U_\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $H^1(Q)$. Из слабой сходимости в $H^1(Q)$ следует сильная сходимость в $L_2(Q)$ (из слабой компактности последовательности в $H^1(Q)$ следует сильная компактность в $L_2(Q)$). Таким образом, $U_\varepsilon \to 0$ сильно в $L_2(Q)$ при $\varepsilon \to 0$.

Для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(Q)$ имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_Q (u_\varepsilon, v_\varepsilon)\varphi\, dx &= \int\limits_Q (\nabla_x U_\varepsilon, v_\varepsilon)\varphi\, dx \\
&= \int\limits_Q (v_\varepsilon, \nabla_x (U_\varepsilon \varphi))\, dx - \int\limits_Q (v_\varepsilon, \nabla_x \varphi)\, U_\varepsilon\, dx \\
&= -[\operatorname{div} v_\varepsilon, U_\varepsilon \varphi] - \int\limits_Q (v_\varepsilon, \nabla_x \varphi) U_\varepsilon\, dx.
\end{aligned}$$

Так как $\operatorname{div} v_\varepsilon \to 0$ сильно в $H^{-1}(Q)$, а последовательность $U_\varepsilon \varphi$ ограничена в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, имеем $[\operatorname{div} v_\varepsilon, U_\varepsilon \varphi] \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогично, так как $U_\varepsilon \to 0$ сильно в $L_2(Q)$ и $(v_\varepsilon, \nabla_x \varphi)$ ограничена в $L_2(Q)$, имеем

$$\int\limits_Q (v_\varepsilon, \nabla_x \varphi)\, U_\varepsilon\, dx \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно,

$$\int\limits_Q (u_\varepsilon, v_\varepsilon)\varphi\, dx \to 0 \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(Q).$$

Лемма доказана. □

Замечание 5.1. Лемма 5.1 дает лишь одно из возможных условий, при которых можно переходить к пределу в произведении двух слабо сходящихся последовательностей. К настоящему времени этот вопрос изучен в большой общности (см., например, [**42**]).

5.2. Теоремы о сходимости произвольных решений. Рассмотрим семейство дифференциальных операторов вида

$$L_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)$$

с измеримыми ограниченными коэффициентами $a_{ij}^\varepsilon(x)$, удовлетворяющими условию равномерной эллиптичности

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}^\varepsilon(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2 \tag{5.2}$$

для любых $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ и $x \in \Omega$, где постоянные $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ не зависят от параметра ε. Операторы этого семейства можно интерпретировать как операторы $L_\varepsilon : \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, действующие из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$. Легко видеть, что условие равномерной эллиптичности (5.2) влечет коэрцитивность каждого из операторов семейства $\{L_\varepsilon\}$ в смысле определения 1.9, причем постоянные $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ можно выбрать общими для всех операторов семейства.

Задача 5.1. Найдите выражения для $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ через постоянные эллиптичности λ и Λ.

Важным примером служит семейство операторов $\{L_\varepsilon\}$ с коэффициентами вида $a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}(x/\varepsilon)$, где функции $a_{ij}(y)$ ограничены, измеримы, периодичны с периодом 1 по всем переменным $y_1, \dots, y_d$ и удовлетворяют условию эллиптичности $\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{d} a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2$. Согласно теореме 1.2 из семейства операторов $\{L_\varepsilon\}$ можно выбрать G-сходящуюся последовательность операторов $L_{\varepsilon'}$ такую, что $L_{\varepsilon'} \overset{G}{\to} A_0$, где A_0 — абстрактный коэрцитивный оператор (возможно, с другими постоянными $\varkappa_1'$ и $\varkappa_2'$). Ниже мы покажем, что A_0 — дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами.

Этот пример иллюстрирует важное свойство G-сходимости: *решения краевых задач для оператора L_ε сходятся при $\varepsilon \to 0$ к решениям соответствующих краевых задач для оператора A_0 в отсутствии сходимости коэффициентов этих операторов.*

Отметим, что в приложениях уравнение вида $L_\varepsilon u = f$ описывает поведение различных процессов в среде с быстро меняющимися пространственными характеристиками (микроструктура), в то время как оператор A_0 служит для описания однородной среды.

Таким образом, приближенное описание сред с быстро меняющимися пространственными характеристиками может быть дано с помощью соответствующих однородных сред.

Коэффициенты оператора A_0 обычно называют *усредненными* или *эффективными* коэффициентами. Построение усредненных характеристик,

а также детальное изучение близости решений краевых задач для операторов L_ε и A_0 составляют в значительной степени предмет *теории усреднения*. Во многих конкретных задачах оказывается, что хотя G-предельный оператор и описывает рассматриваемый в сильно неоднородной среде процесс приближенно, сам этот оператор имеет значительно более простую структуру, поэтому изучать его свойства значительно проще, чем свойства исходных операторов. Это проявляется, в частности, при моделировании тех или иных процессов, протекающих в неоднородной среде, с помощью компьютеров. Действительно, при численном анализе процесса в сильно неоднородной среде для достижения необходимой точности при использовании разностных методов шаг дискретизации должен быть значительно меньше характерного размера неоднородности среды, а это связано с очень большим объемом вычислений. Обычно коэффициенты G-предельного оператора медленно меняются, и для расчетов можно использовать разностные методы со сравнительно крупным шагом.

Покажем, как с помощью леммы о компенсированной компактности можно установить результат об усреднении для введенного выше эллиптического оператора L_ε с периодическими коэффициентами вида $a_{ij}^\varepsilon(x) \equiv a_{ij}(x/\varepsilon)$. С этой целью введем обозначения

$$\square \equiv [0,1] \times \cdots \times [0,1], \quad A(y) \equiv \{a_{ij}(y)\}, \quad \langle w \rangle_\square \equiv \int\limits_\square w(y)\, dy$$

и для каждого постоянного вектора $\zeta \in \mathbb{R}^d$ определим 1-периодическую вектор–функцию $\overline{w}_\zeta(y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $\mathrm{rot}_y \overline{w}_\zeta(y) = 0$, $\overline{w}_\zeta(y) \in (L_{2,\mathrm{per}}(\square))^d$,
(2) $\mathrm{div}_y(A(y)\overline{w}_\zeta(y)) = 0$,
(3) $\langle \overline{w}_\zeta(y) \rangle_Y = \zeta$.

Задача 5.2. Докажите существование единственной 1-периодической функции $\overline{w}_\zeta(y)$ с указанными свойствами.

Указание. Поскольку $\mathrm{rot}_y \overline{w}_\zeta(y) = 0$, функцию $\overline{w}_\zeta(y)$ можно искать в виде $\overline{w}_\zeta(y) = \nabla U_\zeta(y) + \zeta$, где $U_\zeta(y)$ — скалярная 1-периодическая функция из $H^1(\square)$. Тогда задача отыскания $\overline{w}_\zeta(y)$ сведется к решению эллиптического уравнения для функции $U_\zeta(y)$ с периодическими граничными условиями. Доказать существование и единственность решения можно с помощью теоремы Фредгольма.

Для векторов ξ, совпадающих с одним из координатных ортов $\overline{e}_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (единица на k-й позиции), вектор–функции $w_{\overline{e}_k}(y) \equiv w_k(y)$, $k = 1, \ldots, d$, имеют вид $w_k(y) = \nabla U_k + \overline{e}_k$, где $U_k(y)$ 1-периодичны по переменным $y_1, \ldots, y_d$ и удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a_{ij}(y)\frac{\partial U_k}{\partial y_j}\Big) = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial a_{kj}}{\partial y_j}(y), \quad y \in \square.$$

Отметим, что решения определены с точностью до аддитивной постоянной.

Определим матрицу коэффициентов усредненного оператора $\widehat{A}$ по формуле $\widehat{A}\zeta \equiv \langle A(y)\overline{w}_\zeta(y) \rangle_\square$ для всех $\zeta \in \mathbb{R}^d$. Это определение корректно, поскольку вектор–функция $\overline{w}_\zeta(y)$ зависит от вектора $\zeta \in \mathbb{R}^d$ линейно (проверьте!).

Задача 5.3. Докажите, что коэффициенты $\widehat{a}_{ik}$ матрицы усредненного оператора $\widehat{A}$ можно выразить через функции $U_k(y)$, $k = 1, \dots, d$, по формулам

$$\widehat{a}_{ik} \equiv \int\limits_{\square} \Big[a_{ik}(y) + a_{ij}(y)\frac{\partial U_k(y)}{\partial y_j}\Big]dy, \quad i,k = 1,\dots,d. \tag{5.3}$$

Задача 5.4. Докажите, что коэффициенты $\widehat{a}_{ij}$ матрицы $\widehat{A}$ удовлетворяют оценке

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{d} \widehat{a}_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2.$$

Теорема 5.1. *Пусть Ω — ограниченная область и $f \in H^{-1}(\Omega)$. Тогда последовательность решений $\{u_\varepsilon\}$ задач Дирихле*

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\Big) = f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad u_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \tag{5.4}$$

сходится к решению $u_0(x)$ задачи

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\widehat{a}_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\Big) = f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad u_0(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \tag{5.5}$$

слабо в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Выберем из $\{u_\varepsilon(x)\}$ подпоследовательность $\{u_{\varepsilon'}(x)\}$ такую, что $u_{\varepsilon'}(x) \rightharpoonup u_0(x)$ слабо в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$, $\nabla u_{\varepsilon'}(x) \rightharpoonup \nabla u_0(x)$ слабо в $L_2(\Omega)$, $\overline{p}^{\,\varepsilon'}(x) \rightharpoonup \overline{p}^{\,0}(x)$ слабо в $L_2(\Omega)$, где $\overline{p}^{\,\varepsilon}(x) \equiv A(x/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon(x)$ — поток u_ε. Это можно сделать в силу слабой компактности единичных шаров в пространствах $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ и теоремы Реллиха.

Положим $\overline{q}^{\,\varepsilon}(x) \equiv A(x/\varepsilon)\overline{w}_\zeta(x/\varepsilon)$, где вектор–функция $\overline{w}_\zeta(y)$ определена выше. Тогда с учетом определений $(\overline{p}^{\,\varepsilon}(x), \overline{w}_\zeta(x/\varepsilon)) = (\nabla u_\varepsilon(x), \overline{q}^{\,\varepsilon}(x))$. Последнее равенство представляет собой равенство двух скалярных произведений векторов из $\mathbb{R}^d$ (при каждом $x \in \Omega$). Перейдем в левой и правой частях этого равенства к пределу при $\varepsilon' \to 0$, пользуясь леммой о компенсированной компактности. В самом деле, для вектор–функций в левой части равенства выполняются условия $\operatorname{div}\overline{p}^{\,\varepsilon} = f$, $\operatorname{rot}\overline{w}_\zeta = 0$, а для вектор–функций в правой части равенства выполняются условия $\operatorname{div}\overline{q}^{\,\varepsilon} = 0$, $\operatorname{rot}\nabla u_\varepsilon = 0$.

Задача 5.5. Докажите, что $\overline{w}_\zeta(\cdot/\varepsilon) \rightharpoonup \zeta$ и $\overline{q}^{\,\varepsilon} \rightharpoonup \widehat{A}\zeta$ слабо в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

При $\varepsilon' \to 0$ получаем равенство $(\overline{p}^{\,0}, \zeta) = (\nabla u_0, \widehat{A}\zeta)$, которое выполняется почти всюду в Ω и в $L_2(\Omega)$. Ввиду произвольности $\zeta \in \mathbb{R}^d$ имеем $\overline{p}^{\,0} = \widehat{A}\nabla u_0$. Поскольку $\operatorname{div}\overline{p}^{\,\varepsilon}(x) = f(x)$, справедливо равенство $\operatorname{div}\overline{p}^{\,0}(x) = f(x)$ в смысле обобщенных функций. Поэтому $\operatorname{div}(\widehat{A}\nabla u_0) = f$. Вспоминая, что $u_0(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, приходим к выводу, что $u_0(x)$ — решение задачи (5.5). Поскольку эта задача Дирихле имеет единственное решение, пределом любой сходящейся подпоследовательности $\{u_{\varepsilon'}(x)\}$ служит $u_0(x)$ и, следовательно, все семейство $\{u_\varepsilon(x)\}$ сходится к функции $u_0(x)$. □

Здесь возникает важный вопрос: зависит ли построенный G-предельный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами от выбора граничных условий в краевой задаче? Ведь, кроме рассмотренных граничных условий Дирихле имеются другие естественные краевые условия. Ответ на этот вопрос отрицательный — коэффициенты G-предельного дифференциального оператора определяются только коэффициентами допредельных операторов и не зависят от выбора краевых условий. В частности, матрица коэффициентов усредненной задачи (5.5) задает усредненное уравнение и в тех случаях, когда на границе области Ω поставлены другие краевые условия. Для иллюстрации этого факта рассмотрим в области Ω задачу Неймана

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\Big) = \widetilde{f}(x) \quad \text{в } \Omega, \quad \int\limits_\Omega \widetilde{f}(x)\,dx = 0, \\ &\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\nu_i = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \int\limits_\Omega v_\varepsilon(x)\,dx = 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

и формально усредненную задачу

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{d} \widehat{a}_{ij}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_i \partial x_j} = \widetilde{f}(x) \ \text{ в } \Omega, \\ &\sum_{i,j=1}^{d} \widehat{a}_{ij}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}\nu_i = 0 \ \text{ на } \partial\Omega, \quad \int\limits_\Omega v_0(x)\,dx = 0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$, $\widetilde{f} \in L_2(\Omega)$.

Теорема 5.2. *Пусть a_{ij}^ε те же, что в задаче* (5.4)*, а $\widehat{a}_{ij}$ — как в задаче* (5.5)*. Тогда $v_\varepsilon \rightharpoonup v_0$ слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ и $a^\varepsilon \nabla v_\varepsilon \rightharpoonup a^0 \nabla v_0$ слабо в $(L_2(\Omega))^d$ при $\varepsilon \to 0$, где v_ε — решение задачи* (5.6)*, а v_0 — решение задачи* (5.7)*.*

Доказательство. Легко видеть, что последовательность $a^\varepsilon \nabla v_\varepsilon$ ограничена равномерно по ε в пространстве $L_2(\Omega)$, а последовательность v_ε ограничена в пространстве $H^1(\Omega)$. Используя теорему Реллиха, заключаем, что существуют подпоследовательность $\varepsilon' \to 0$ и функции v_* и $q_0 \in (L_2(\Omega))^d$ такие, что $v_\varepsilon \rightharpoonup v_*$ слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon' \to 0$ и $a^\varepsilon \nabla v_\varepsilon \rightharpoonup q_0$ слабо в $(L_2(\Omega))^d$ при $\varepsilon' \to 0$. Следовательно, $\operatorname{div} q_0 = \widetilde{f}$.

Рассмотрим тождество $(\nabla v_\varepsilon, [a^\varepsilon \nabla u_\varepsilon]) = ([\nabla v_\varepsilon a^\varepsilon], \nabla u_\varepsilon)$, где u_ε — решение задачи (5.4) с произвольным фиксированным f. Обе пары последовательностей, в левой и правой частях этого равенства, удовлетворяют условиям леммы о компенсированной компактности. Переходом к $*$-слабому пределу при $\varepsilon' \to 0$ по лемме о компенсированной компактности получаем

$$(\nabla v_*, \widehat{a}\nabla u_0) = (q_0, \nabla u_0), \tag{5.8}$$

почти всюду в Ω, где u_0 — решение задачи (5.5). Далее, в силу произвольности f заключаем, что (5.8) имеет место для произвольной функции $u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Это означает, что $\widehat{a}\nabla v_* = q_0$ в $L_2(\Omega)$ и $\operatorname{div}(\widehat{a}\nabla v_*) = \widetilde{f}$ в пространстве обобщенных функций в Ω. Таким образом, функция v_* удовлетворяет в области Ω уравнению $\operatorname{div}(\widehat{a}\nabla v_*) = \widetilde{f}$.

Равенство $\int\limits_\Omega v_*\,dx = 0$ следует из сходимости $v_\varepsilon \to v_*$. Осталось проверить выполнение краевого условия $(\widehat{a}\nabla v_*, \overline{\nu}) = 0$ на $\partial\Omega$. Для этого выпишем интегральное тождество задачи (5.6)

$$\int\limits_\Omega a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}v_\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\,dx = \int\limits_\Omega \widetilde{f}\varphi\,dx \quad \forall\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Ввиду сходимости q_ε к $\widehat{a}\nabla v_*$

$$\int\limits_\Omega \widehat{a}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}v_*\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\,dx = \int\limits_\Omega \widetilde{f}\varphi\,dx \quad \forall\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

т.е. для функции v_* справедливо интегральное тождество задачи (5.7), что завершает доказательство теоремы. □

Обратим внимание на одно важное свойство функций q_ε. Если продолжить функции q_ε и $\widetilde{f}$ нулем на все пространство $\mathbb{R}^n$, то продолженные функции $\widetilde{q}_\varepsilon$ и $\widetilde{\widetilde{f}}$ удовлетворяют соотношению $\operatorname{div}\widetilde{q}_\varepsilon = \widetilde{\widetilde{f}}(x)$ в $\mathbb{R}^d$ в пространстве обобщенных функций.

Задача 5.6. Докажите последнее утверждение.

Указание. Воспользуйтесь условием $(\overline{q}_\varepsilon, \nu) = 0$ на $\partial\Omega$.

Сформулируем результат о независимости усредненного уравнения от краевых условий в наиболее общей форме.

Теорема 5.3 (о сходимости произвольных решений)**.** *Пусть $a^\varepsilon_{ij}(x)$ — те же, что в задаче* (5.4)*, и $\widehat{a}_{ij}$ заданы формулой* (5.3)*. Предположим, что для некоторых $g\in(L_2(\Omega))^d$ и $f\in H^{-1}(\Omega)$ функции $v_\varepsilon\in H^1(\Omega)$ удовлетворяют уравнению*

$$\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}+g_j\Big)\Big) = f(x) \quad \text{в } \Omega$$

и $v_{\varepsilon'}\rightharpoonup v_*$ слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon'\to 0$. Тогда v_* удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(\widehat{a}(\nabla v_* + g)) = f \quad \text{в } \Omega$$

и имеет место сходимость потоков $a^{\varepsilon'}(\nabla v_{\varepsilon'}+g)\rightharpoonup\widehat{a}(\nabla v_*+g)$ слабо в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon'\to 0$.

5.3. О структуре G-предельного оператора. Одним из ключевых результатов теории G-сходимости дифференциальных операторов является полнота класса равномерно эллиптических операторов в дивергентной форме относительно G-сходимости. Изучим структуру G-предельного оператора произвольной последовательности эллиптических дифференциальных операторов.

Пусть $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A_0$ при $\varepsilon\to 0$, где

$$\begin{aligned} &A_\varepsilon \equiv \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^\varepsilon_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big),\\ &\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^d a^\varepsilon_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad x\in\Omega_1, \end{aligned} \tag{5.9}$$

и $A_0 : \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ — абстрактный коэрцитивный оператор (см. теорему 1.2). В данном случае A_0 уже не будет дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами, однако он останется эллиптическим дифференциальным оператором в дивергентной форме. Докажем это.

Сначала рассмотрим область Ω_1 такую, что $\Omega \subset\subset \Omega_1$, и продолжим оператор A_ε в Ω_1, положив $a_\varepsilon(x) = \Lambda \operatorname{Id}$ для $x \in \Omega_1 \setminus \Omega$. Выберем из A_ε подпоследовательность такую, что $A_{\varepsilon'} \overset{G}{\to} A_0$ в Ω_1, и определим функции $u_\varepsilon^\xi(x)$ как решения краевых задач

$$A_\varepsilon u_\varepsilon^\xi = A_0[\varphi(x)(x,\xi)], \quad u_\varepsilon^\xi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_1), \quad (x,\xi) = \sum_{i=1}^d x_i\xi_i,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ — срезающая функция такая, что $\varphi = 1$ в Ω, и ξ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^d$. Тогда по определению G-сходимости $\nabla u_{\varepsilon'}^\xi \rightharpoonup \xi$ в $L_2(\Omega)$.

Пусть $q^\xi(x)$ — слабый предел последовательности $a_{\varepsilon'}(x)\nabla u_{\varepsilon'}^\xi(x)$ в $L_2(\Omega)$ по некоторой подпоследовательности ε' при $\varepsilon' \to 0$. Тогда, используя правило "ротор–дивергенция", для произвольных векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ получаем

$$(\nabla u_{\varepsilon'}^\eta, a_{\varepsilon'}(x)\nabla u_{\varepsilon'}^\xi) \overset{*}{\rightharpoonup} (\eta, q^\xi(x)), \quad (\nabla u_{\varepsilon'}^\xi, a_{\varepsilon'}(x)\nabla u_{\varepsilon'}^\eta) \overset{*}{\rightharpoonup} (\xi, q^\eta(x)) \quad \text{в } \Omega.$$

В силу симметрии матрицы $a_\varepsilon(x)$ имеем $(\eta, q^\xi(x)) = (\xi, q^\eta(x))$ для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому $q^\xi(x)$ линейна по ξ, т.е. $q^\xi(x) = \widehat{a}(x)\xi$, поскольку $(\eta, q^{\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2}(x)) = (\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2, q^\eta(x)) = \alpha_1(\xi_1, q^\eta(x)) + \alpha_2(\xi_2, q^\eta(x)) = (\eta, \alpha_1 q^{\xi_1}(x)) + (\eta, \alpha_2 q^{\xi_2}(x)) = (\eta, \alpha_1 q^{\xi_1}(x) + \alpha_2 q^{\xi_2}(x))$ для произвольных $\eta, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $\widehat{a}(x)$ — симметричная матрица ($(\eta, a_0(x)\xi) = (\xi, \widehat{a}(x)\eta)$ для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$).

Определим функции $v_\varepsilon(x)$ как решения задач

$$A_\varepsilon v_\varepsilon = f(x), \quad f \in H^{-1}(\Omega), \quad v_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

В силу правила "ротор–дивергенция" $(\nabla u_{\varepsilon''}^\xi, a_{\varepsilon''}(x)\nabla v_{\varepsilon''}) \overset{*}{\rightharpoonup} (\xi, p_0(x))$ в Ω по некоторой подпоследовательности ε'', где $p_0(x)$ — слабый предел в $L_2(\Omega)$ последовательности $a_{\varepsilon''}(x)\nabla v_{\varepsilon''}$. С другой стороны, так же на основе правила "ротор–дивергенция" и симметрии матриц $a_{\varepsilon''}(x)$, $\widehat{a}(x)$ имеем

$$\begin{aligned}(\nabla u_{\varepsilon''}^\xi, a_{\varepsilon''}(x)\nabla v_{\varepsilon''}) &= (\nabla v_{\varepsilon''}, a_{\varepsilon''}(x)\nabla u_{\varepsilon''}^\xi) \overset{*}{\rightharpoonup} (\nabla v_0(x), \widehat{a}(x)\xi) \\ &= (\xi, \widehat{a}(x)\nabla v_0(x)).\end{aligned}$$

Следовательно, $(\xi, p_0(x)) = (\xi, \widehat{a}(x)\nabla v_0(x))$ в $L_2(\Omega)$, и в силу произвольности $\xi \in \mathbb{R}^d$ имеем $p_0(x) = \widehat{a}(x)\nabla v_0(x)$, т.е. $a_\varepsilon(x)\nabla v_\varepsilon \rightharpoonup \widehat{a}(x)\nabla v_0(x)$ в $L_2(\Omega)$.

Задача 5.7. Докажите, что для матрицы $\widehat{a}(x)$ справедлива оценка $\lambda|\xi|^2 \leqslant (\widehat{a}(x)\xi, \xi) \leqslant \Lambda|\xi|^2$ с теми же постоянными λ, Λ, что и в (5.9).

Далее, поскольку $\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla v_\varepsilon) = f$, имеем $\operatorname{div} p_0 = f$. Поэтому $\operatorname{div}(\widehat{a}\nabla v_0) = f$ в Ω. Следовательно, A_0 — эллиптический дифференциальный оператор в дивергентной форме. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 5.4. *Пусть* $A_\varepsilon \equiv \sum\limits_{i,j=1}^d \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^\varepsilon(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big)$, *где* a_{ij}^ε — *ограниченные измеримые функции такие, что* $\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^d a_{ij}^\varepsilon \xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2$ *почти*

всюду в Ω, *и пусть* $A_\varepsilon \overset{G}{\to} A_0$. *Тогда* A_0 — *дифференциальный оператор вида* $A_0 \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{d} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\widehat{a}_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big)$, *где* $\widehat{a}_{ij}$ — *ограниченные измеримые функции такие, что* $\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{d} \widehat{a}_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2$.

5.4. Пример усреднения нелинейной задачи. Лемма о компенсированной компактности может также с успехом применяться при анализе решений нелинейных краевых задач с быстро осциллирующими коэффициентами.

Рассмотрим систему

$$-\operatorname{div}_x A\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla_x u_\varepsilon(x)\Big) = f(x) \ \text{ в } \ \Omega, \quad u_\varepsilon = v \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad v \in H^1(\Omega), \tag{5.10}$$

где отображение $A : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $A(\xi, \eta)$ 1-периодическая по первому аргументу,

(2) $|A(\xi, \eta_2) - A(\xi, \eta_1)| \leqslant \varkappa_1|\eta_2 - \eta_1|$ для всех $\xi, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^d$,

(3) $(A(\xi, \eta_2) - A(\xi, \eta_1), \eta_2 - \eta_1) \geqslant \varkappa_2|\eta_2 - \eta_1|^2$ для всех $\xi, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^d$.

Здесь $0 < \varkappa_2 < \varkappa_1$.

Определим формально усредненную систему

$$-\operatorname{div}_x \widehat{A}(\nabla_x u_0(x))) = f(x) \ \text{ в } \ \Omega, \quad u_0 = v \ \text{ на } \ \partial\Omega, \tag{5.11}$$

в которой отображение $\widehat{A} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ задается равенством

$$\widehat{A}(\eta) \equiv \int\limits_{\square} A(\xi, \eta + \nabla_\xi N_\eta(\xi))\, d\xi \tag{5.12}$$

и 1-периодическая по ξ функция $N_\eta(\xi)$ определяется из уравнения

$$\operatorname{div}_\xi A(\xi, \eta + \nabla_\xi N_\eta(\xi)) = 0 \quad \text{в } \ \square. \tag{5.13}$$

Задача 5.8. Проверьте, что $\widehat{A}(\eta)$ — липшицева функция, удовлетворяющая оценке $(\widehat{A}(\eta_1) - \widehat{A}(\eta_2), \eta_1 - \eta_2) \geqslant \varkappa|\eta_1 - \eta_2|^2$.

Теорема 5.5. $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ *слабо в* $H^1(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Нетрудно показать, что из свойств (2) и (3) функции $A(\xi, \eta)$ следует равномерная по ε ограниченность $\{u_\varepsilon\}$ и $E_\varepsilon := A(x/\varepsilon, \nabla_x u_\varepsilon)$ в пространствах $H^1(\Omega)$ и $[L_2(\Omega)]^d$ соответственно. Следовательно, по теореме Реллиха можно выбрать слабо сходящиеся подпоследовательности (обозначаемые так же, как исходные последовательности)

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в } \ H^1(\Omega), \quad E_\varepsilon \rightharpoonup E_0 \quad \text{слабо в } \ [L_2(\Omega)]^d \tag{5.14}$$

при $\varepsilon \to 0$. Легко видеть, что E_0 удовлетворяет уравнению

$$-\operatorname{div} E_0 = f \quad \text{в } \ \Omega. \tag{5.15}$$

Покажем, что $E_0 = \widehat{A}(\nabla_x u_0(x))$. Для этого введем функцию $v_\varepsilon(x) = (\eta, x) + \varepsilon N_\eta(x/\varepsilon)$, где функция $N_\eta(\xi)$ задана выше. В силу монотонности A для всех $\eta \in \mathbb{R}^d$ и неотрицательных $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} \Big(A\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla_x u_\varepsilon\Big) - A\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla_x v_\varepsilon\Big), \nabla_x u_\varepsilon - \nabla_x v_\varepsilon\Big)\varphi(x)\, dx \geqslant 0. \tag{5.16}$$

Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{div}_x E_\varepsilon^1 \equiv \operatorname{div}_x A\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \eta + \nabla_x N_\eta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) = 0$$

и при $\varepsilon \to 0$

$$A\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla_x v_\varepsilon\Big) = A\Big(\xi, \eta + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_\xi N_\eta(\xi)\Big)\Big|_{\xi = x/\varepsilon} \rightharpoonup \int\limits_{\square} A(\xi, \eta + \nabla_\xi N_\eta(\xi))\, d\xi \equiv A(\eta)$$

слабо в $[L_2(\Omega)]^d$, $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u_0(x)$ слабо в $[L_2(\Omega)]^d$, $\nabla v_\varepsilon \rightharpoonup \eta$ слабо в $[L_2(\Omega)]^d$. Поэтому по лемме 5.1 о компенсированной компактности можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (5.16), что дает нам неравенство

$$\int\limits_\Omega (E_0(x) - \widehat{A}(\eta), \nabla_x u_0(x) - \eta)\varphi(x)\, dx \geqslant 0. \tag{5.17}$$

Поскольку (5.17) справедливо для любых неотрицательных $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$,

$$(E_0(x) - \widehat{A}(\eta), \nabla u_0(x) - \eta) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in \mathbb{R}^d \ \text{ и п.в. } x \in \Omega. \tag{5.18}$$

Согласно теории монотонных операторов (см. [**73**]) из (5.18) следует $E_0(x) - \widehat{A}(\nabla u_0(x)) = 0$. Действительно, в противном случае, т.е. $E_0(x) - \widehat{A}(\nabla u(x)) \neq 0$, по крайней мере одна из компонент вектора отлична от нуля: $[E_0(x) - \widehat{A}(\nabla u(x))]_i \neq 0$ в $L_2(\Omega)$. Пусть x_0 — точка Лебега функций $E_0(x)$ и $\nabla u_0(x)$, причем $[E_0(x_0) - \widehat{A}(\nabla u_0(x_0))]_i \neq 0$. Пусть для определенности $[E_0(x_0) - \widehat{A}(\nabla u_0(x_0))]_i > 0$. Выберем $\eta_\delta = \nabla u_0(x_0) + \delta e_i$, где e_i — i-й координатный вектор в $\mathbb{R}^d$. Тогда при достаточно малых δ неравенство (5.18) будет нарушено на множестве положительной меры (проверьте!). Аналогично в случае $[E_0(x_0) - \widehat{A}(\nabla u_0(x_0))]_i < 0$, положив $\eta_\delta = \nabla u_0(x_0) - \delta e_i$ и выбрав δ достаточно малым, приходим к противоречию с (5.18) на множестве положительной меры, что доказывает равенство $E_0(x) = \widehat{A}(\nabla u_0(x))$.

Так как E_0 удовлетворяет (5.15), $-\operatorname{div}_x(\widehat{A}(\nabla_x u_0(x)) = f$ в Ω. $\square$

§ 6. Теорема усреднения для уравнения со случайными коэффициентами

Пусть задана случайная $d \times d$ матрица $A(\omega)$ с коэффициентами $a_{ij}(\omega) \in L_\infty(\Omega)$, удовлетворяющая для почти всех $\omega \in \Omega$ условию эллиптичности

$$\varkappa_1 |\eta|^2 \leqslant a_{ij}(\omega)\eta_i\eta_j \leqslant \varkappa_2 |\eta|^2. \tag{6.1}$$

Рассмотрим следующую задачу: для любого $\eta \in \mathbb{R}^d$ найти $v_\eta \in \mathscr{V}_2^{\mathrm{pot}}(\Omega)$ такую, что

$$\int\limits_\Omega \varphi_i a_{ij}(\eta_j + (v_\eta)_j)\, d\mu = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{V}_2^{\mathrm{pot}}(\Omega). \tag{6.2}$$

По лемме 2.2 о разложении Вейля задачу (6.2) можно переписать так: для любого $\eta \in \mathbb{R}^d$ найти $v_\eta \in \mathscr{V}_2^{\mathrm{pot}}(\Omega)$ такую, что $A(\eta + v_\eta) \in L_2^{\mathrm{sol}}(\Omega)$.

Задача 6.1. Докажите, что решение v_η задачи (6.2) существует и единственно.

На типичной реализации задача превращается в обычное эллиптическое уравнение. Если $u(x)$ — потенциал вектора $v(x) = v(T(x)\omega)$, а $a_{ij}(x) = a_{ij}(T(x)\omega)$, то

$$\operatorname{div}(A(T(x)\omega)\,(\eta + \nabla u)) = 0. \tag{6.3}$$

Обратно, если потенциал почти всех реализаций вектора $v \in \mathscr{V}_2^{\mathrm{pot}}(\Omega)$ удовлетворяют уравнению (6.3), то вектор $A(\omega)(\eta + v(\omega))$ является соленоидальным и, следовательно, имеет место (6.2).

Нам также понадобится вспомогательная задача в транспонированной форме: для любого $\zeta \in \mathbb{R}^d$ найти $w_\zeta \in \mathscr{V}_2^{\mathrm{pot}}(\Omega)$ такую, что

$$(w_\zeta + \zeta)^t A \in L_2^{\mathrm{sol}}(\Omega). \tag{6.4}$$

Отметим, что предыдущие построения не требовали эргодичности динамической системы $T(x)$. Рассмотрим σ-алгебру подмножеств Ω, инвариантных относительно динамической системы $T(x)$ (докажите, что это действительно σ-алгебра). Если система $T(x)$ эргодична, то эта σ-алгебра тривиальна, т.е. содержит только два подмножества Ω — пустое множество и все множество Ω. Для произвольной системы $T(x)$ эта σ-алгебра может оказаться нетривиальной. Обозначим через $\widetilde{E}(u)$ условное математическое ожидание функции $u(\omega)$ относительно σ-алгебры инвариантных подмножеств Ω, т.е. функцию, измеримую относительно σ-алгебры и такую, что $\int\limits_B \widetilde{E}(u)\,d\mu = \int\limits_B u\,d\mu$ для любого инвариантного подмножества $B \subset \Omega$.

Задача 6.2. Пусть $u \in \mathscr{V}_2^{\mathrm{pot}}(\Omega)$, $v \in L_2^{\mathrm{sol}}(\Omega)$. Тогда по определению $E(u \cdot v) = 0$. Докажите, что $\widetilde{E}(u \cdot v) = 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$. (Величина $\widetilde{E}(u \cdot v)$ принимает значения уже не в $\mathbb{R}^1$, а в $L_1(\Omega)$.) Если $\widetilde{E}(u \cdot v) = 0$ почти всюду, то будем говорить, что вектор–функции u и v *условно ортогональны*.

Определим так называемую усредненную матрицу, соответствующую матрице $a_{ij}(\omega)$. Легко заметить, что величина $\widetilde{E}(A(\eta + v_\eta))$ линейна по $\eta \in \mathbb{R}^d$. Поэтому $\widetilde{E}(A(\eta + v_\eta)) = \widehat{A}\eta$ (проверьте!), где $\widehat{A} = \widehat{A}(\omega)$ — некоторая матрица с коэффициентами $\widehat{a}_{ij}$, измеримыми относительно σ-алгебры инвариантных подмножеств. Матрица $\widehat{A}(\omega)$ называется *усредненной* для матрицы $A(\omega)$. Если система $T(x)$ эргодична, то матрица $\widehat{a}_{ij}$ не случайна.

Лемма 6.1. *Если исходная матрица $A(\omega)$ симметрична, то усредненная матрица $\widehat{A}$ также симметрична. Матрица $\widehat{A}$ положительно определенная и удовлетворяет* (6.1).

Доказательство. Для произвольных ζ и η из $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\zeta^t \widehat{A}\eta &= \widetilde{E}(\zeta^t A(\eta + v_\eta)) = \widetilde{E}((\zeta + v_\zeta)^t A(\eta + v_\eta)) = \widetilde{E}((\eta + v_\eta)^t A(\zeta + v_\zeta)) \\ &= \widetilde{E}(\eta^t A(\zeta + v_\zeta)) = \eta^t \widehat{A}\zeta,\end{aligned}$$

т.е. $\widehat{A}$ симметрична. Далее, так как $A(\eta + v)$ и v условно ортогональны,

$$\begin{aligned}\eta\widehat{A}\eta &= \widetilde{E}(\eta A(\eta + v)) = \widetilde{E}((\eta + v)A(\eta + v)) \geqslant \varkappa_1 \widetilde{E}((\eta + v)^2) \\ &\geqslant \varkappa_1 (\widetilde{E}(\eta + v))^2 = \varkappa_1 \eta^2.\end{aligned}$$

Сохранение верхней константы эллиптичности $\varkappa_2$ для матрицы $\widehat{A}$ будет доказано ниже на основании общих теорем о G-сходимости. □

Пусть $A(\omega)$ — случайная матрица с элементами $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, удовлетворяющая условию эллиптичности, и $A(x) = A(T(x)\omega)$ — одна из ее типичных реализаций. Рассмотрим задачу

$$u^\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(D), \quad \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f, \tag{6.5}$$

где $A^\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon)$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Пусть u^0 — решение задачи

$$u^0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(D), \quad \operatorname{div}(\widehat{A}\nabla u^0) = f. \tag{6.6}$$

Теорема 6.1. *Для почти всех $\omega \in \Omega$*

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{в } \overset{\circ}{H}{}^1(D) \quad A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \widehat{A}\nabla u^0 \quad \text{в } L_2(D) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где u^ε и u^0 — решения задач (6.5) *и* (6.6) *соответственно.*

Если система $T(x)$ эргодична, то матрица $\widehat{A}(\omega)$ не зависит от ω, т.е. является неслучайной и, следовательно, решение u^0 предельной задачи — детерминированная функция.

Доказательство. Воспользуемся леммой о компенсированной компактности. Семейство решений u^ε ограничено в $\overset{\circ}{H}{}^1(D)$, а потоки $p^\varepsilon = A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$ ограничены в $L_2(D)$. Обозначим через u^0 и p^0 соответственно их слабые пределы. Рассмотрим задачу (6.4) и положим $w_\zeta(x) = w_\zeta(T(x)\omega)$, $q(x) = w_\zeta^t(x)A(x)$, $w_\zeta^\varepsilon(x) = w_\zeta(x/\varepsilon)$, $q^\varepsilon(x) = q(x/\varepsilon)$. Заметим, что $\operatorname{rot} w_\zeta^\varepsilon = 0$ и $\operatorname{div} q^\varepsilon = 0$. Теорема Биркгофа совместно с задачей (2.1) дают $w_\zeta^\varepsilon \rightharpoonup \zeta$, $q^\varepsilon \rightharpoonup \zeta^t \widehat{A}$ в $L_2(D)$ при $\varepsilon \to 0$. При этом $p^\varepsilon w_\zeta^\varepsilon = q^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$. При $\varepsilon \to 0$ ввиду леммы компенсированной компактности получаем $p^0\zeta = \zeta^t \widehat{A}\nabla u^0$. Следовательно, $p^0 = \widehat{A}\nabla u^0$. Так как $\operatorname{div} p^0 = f$, заключаем, что u^0 — решение усредненной задачи (6.6), а $\widehat{A}$ — усредненная матрица. Если система $T(x)$ эргодическая, то усредненная матрица не зависит от ω. □

§ 7. Метод двухмасштабных асимптотических разложений

7.1. Одномерный случай. Пусть задана краевая задача для эллиптического уравнения с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами. Основная идея метода двухмасштабных асимптотических разложений для анализа решений такой задачи состоит в следующем.

Пусть ε — малый параметр, определяющий период. Решение краевой задачи ищется в виде формального асимптотического ряда

$$u_\varepsilon \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}, \tag{7.1}$$

где (медленные) переменные x описывают макроскопические свойства модели, а (быстрые или локальные) переменные ξ — ее микроскопические свойства. Здесь предполагается, что функции $u_j(x,\xi)$ являются 1-периодическими по быстрым переменным ξ. Подставляя асимптотический ряд (7.1) в изучаемую задачу, используя многократно формулу

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) = \frac{\partial}{\partial x_i} u(x,\xi) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \xi_i} u(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon} \tag{7.2}$$

и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε в полученном выражении, найдем цепочку уравнений для $u_j(x,\xi)$.

Рассмотрим следующий пример: Найти стационарное тепловое поле в стержне длины l (толщиной стержня будем пренебрегать) с быстро осциллирующим коэффициентом теплопроводности, т.е. стержень состоит из очень мелких чередующихся кусочков, разных по своим свойствам материалов. Предположим, что на концах стержня поддерживается нулевая температура. Температура в стержне моделируется уравнением

$$\frac{d}{dx}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{du}{dx}\Big) = f(x), \quad u(0) = u(l) = 0, \tag{7.3}$$

где $a(\xi)$ — 1-периодическая функция и $a(\xi) > 0$. Решение будем искать в виде асимптотического ряда (7.1). Подставим это разложение в уравнение. Используя (7.2) и группируя слагаемые при одинаковых степенях ε, получаем

$$\begin{aligned}\Big[\varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial\xi}\Big) + \varepsilon^{-1}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_1(x,\xi)}{\partial\xi}\Big) + \frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial x}\Big)\\ + \frac{\partial}{\partial x}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial\xi}\Big)\Big\} + \varepsilon^{0}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_2(x,\xi)}{\partial\xi}\Big) + \frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_1(x,\xi)}{\partial x}\Big)\\ + \frac{\partial}{\partial x}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_1(x,\xi)}{\partial\xi}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial x}\Big)\Big\} + \dots\Big]\Big|_{\xi=x/\varepsilon} \sim f(x).\end{aligned}$$

Приравнивая слагаемые при соответствующих степенях ε, получим

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial\xi}\Big) = 0, \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_1(x,\xi)}{\partial\xi}\Big) + \frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial\xi}\Big) = 0, \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_2(x,\xi)}{\partial\xi}\Big) + \frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_1(x,\xi)}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_1(x,\xi)}{\partial\xi}\Big)\\ + \frac{\partial}{\partial x}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial x}\Big) = f(x).\end{aligned} \tag{7.6}$$

Основополагающим предположением здесь является независимость переменных x и ξ. Будем рассматривать эти уравнения как рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений, в которых ξ является аргументом, а x — параметром.

Задача 7.1. Докажите, что множество периодических решений уравнения $\dfrac{d}{d\xi}\Big(a(\xi)\dfrac{d}{d\xi}v(\xi)\Big) = 0$ состоит из констант.

Поскольку в уравнении (7.4) имеется параметр x, соответствующая константа может зависеть от параметра, т.е. $u_0(x,\xi) = u_0(x)$. Учитывая этот факт, перепишем уравнение (7.5) в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\Big(\frac{\partial u_1(x,\xi)}{\partial\xi} + \frac{du_0(x)}{dx}\Big)\Big) = 0. \tag{7.7}$$

Интегрируя (7.5) по переменной ξ и поделив на $a(\xi)$, найдем

$$\frac{\partial u_1(x,\xi)}{\partial\xi} + \frac{du_0(x)}{dx} = \frac{C_1(x)}{a(\xi)}. \tag{7.8}$$

В силу периодичности функции $u_1(x,\xi)$ по переменной ξ должно выполнятся равенство $\dfrac{du_0(x)}{dx} = C_1(x)\Big\langle \dfrac{1}{a(\xi)}\Big\rangle$, т.е. $C_1(x) = \dfrac{du_0(x)}{dx}\Big\langle \dfrac{1}{a(\xi)}\Big\rangle^{-1}$. Таким образом,

$$\frac{\partial u_1(x,\xi)}{\partial \xi} = \Big(\Big\langle \frac{1}{a(\xi)}\Big\rangle^{-1}\frac{1}{a(\xi)} - 1\Big)\frac{du_0(x)}{dx}$$

и, следовательно, $u_1(x,\xi) = N_1(\xi)\dfrac{du_0(x)}{dx} + M_1(x)$, где

$$N_1(\xi) = \int\limits_0^\xi \Big(\Big\langle \frac{1}{a(\xi)}\Big\rangle^{-1}\frac{1}{a(\xi)} - 1\Big)\,d\xi,$$

а $M_1(x)$ — произвольная функция, например, нулевая.

Можно также найти $u_1(x,\xi)$, используя линейность уравнения (7.7). Действительно, ввиду линейности решение должно иметь вид

$$u_1(x,\xi) = N(\xi)\frac{du_0(x)}{dx} + C_2(x).$$

Подставляя это выражение в (7.7), имеем

$$\frac{d}{d\xi}\Big(a(\xi)\frac{d}{d\xi}\Big(N(\xi)+\xi\Big)\Big) = 0. \tag{7.9}$$

Это уравнение называется *задачей на ячейке* (или *на периоде*). Одним из ее решений является функция $N_1(\xi)$.

Перепишем уравнение (7.6) в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(a(\xi)\frac{\partial u_2(x,\xi)}{\partial\xi}\Big) - \left\{\frac{d}{d\xi}(a(\xi)N_1(\xi)) - a(\xi)\Big(\frac{dN_1(\xi)}{d\xi}+1\Big)\right\}\frac{d^2u_0(x)}{dx^2} + f(x). \tag{7.10}$$

Условие разрешимости этой задачи в пространстве периодических функций, состоящее в том, что интеграл по периоду от правой части равен нулю, принимает вид

$$\Big\langle a(\xi)\Big(\frac{dN_1(\xi)}{d\xi}+1\Big)\Big\rangle\frac{d^2u_0(x)}{dx^2} = f(x).$$

Отсюда с учетом формулы для $N_1(\xi)$, а также краевых условий в исходной задаче (7.3), приходим к соотношениям

$$\Big\langle \frac{1}{a(\xi)}\Big\rangle^{-1}\frac{d^2u_0(x,\xi)}{dx^2} = f(x), \quad u_0(0) = u_0(l) = 0. \tag{7.11}$$

Если функция $u_0(x)$ является решением уравнения (7.11), то задача (7.6) разрешима в классе 1-периодических по ξ функций и первые три члена разложения (7.1) формально удовлетворяет уравнению и краевому условию с точностью до слагаемых порядка ε. Поэтому при малых ε функция $u_0(x)$ должна достаточно хорошо приближать исходную функцию $u_\varepsilon(x)$, т.е. распределение температуры в неоднородном стержне с коэффициентом теплопроводности $a(x/\varepsilon)$ мало отличается от распределения температуры в однородном стержне с коэффициентом $\Big\langle \dfrac{1}{a(\xi)}\Big\rangle^{-1}$.

Так выглядит идея построения эффективного (или “усредненного”) уравнения, описывающего приближенно процесс, протекающий в сильно неоднородной среде, с помощью двухмасштабных асимптотических разложений. Использованный метод эффективно работает в значительно более

общих ситуациях. Так, например, удается с успехом применить его при анализе так называемых перфорированных сред.

7.2. Перфорированные области. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, B — периодическое открытое множество в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей. Под *периодичностью* множества мы понимаем свойство его инвариантности при целочисленных сдвигах вдоль любого базисного орта $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_d$ пространства $\mathbb{R}^d$, т.е. $B = B + \overline{e}_j$, $j = 1, 2, \ldots, d$. Мы не делаем никаких предположений относительно связности множества B, однако предполага-

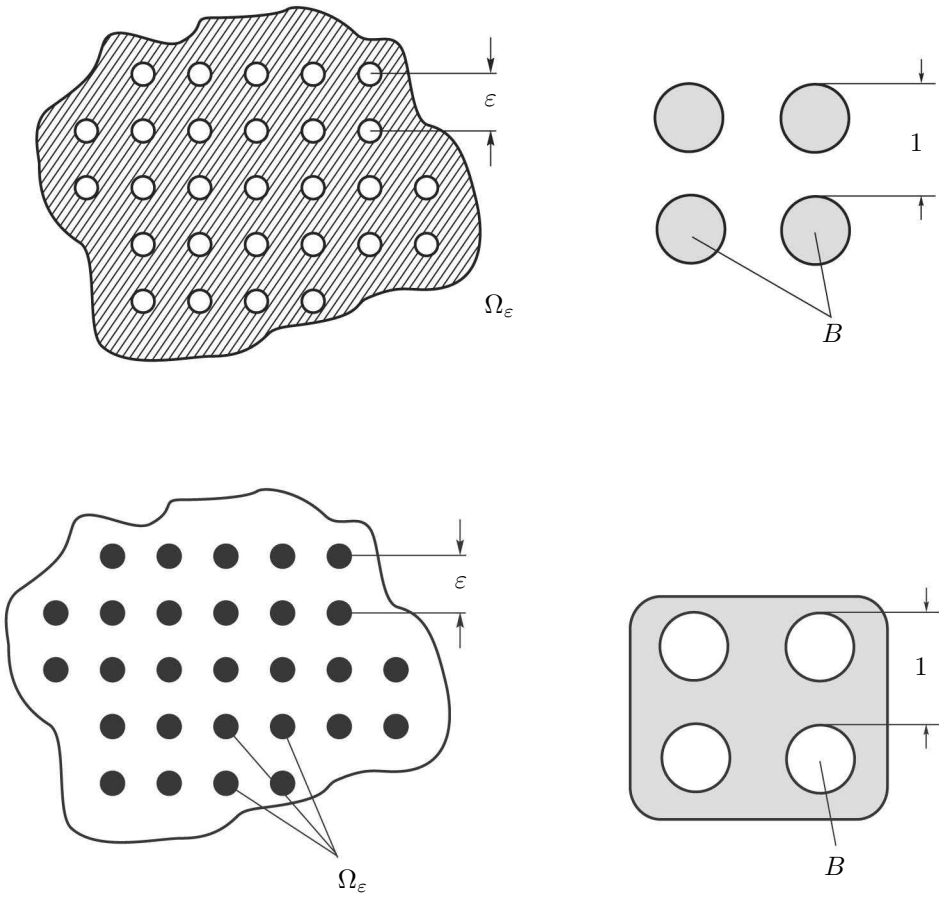

Рис. 7.2

Обозначим через εB гомотетическое сжатие множества B в $1/\varepsilon$ раз, т.е. $\varepsilon B = \{x : x/\varepsilon \in B\}$. Положим $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \varepsilon\overline{B}$ (рис. 7.1) и потребуем, чтобы множество Ω_ε было связным (открытым оно будет по определению). Заметим, что можно построить такую периодическую "решетку" B, что ее дополнение будет состоять из непересекающихся замкнутых компонент (рис. 7.2). Такие случаи мы запрещаем: множество Ω_ε должно быть связным.

Обозначим $S_\varepsilon = \partial(\varepsilon B) \cap \Omega$ и $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \setminus \varepsilon B$. Очевидно, что S_ε — часть границы множества Ω_ε, лежащая на границе множества εB, а Γ_ε — часть

границы Ω_ε, лежащая на границе Ω. Пусть $a_{ij}(y)$, $i,j=1,2,\dots,d$, — гладкие 1-периодические функции такие, что $\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{d} a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2$, $\lambda>0$. Определим функции u_ε $(0<\varepsilon<1)$ как решения краевых задач

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f(x) \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad f\in C^\infty(\overline{\Omega}),\\ &\sum_{i,j=1}^{d} \Big(a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}n_i = 0 \quad \text{на } S_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Наша цель — исследовать асимптотическое поведение u_ε при $\varepsilon\to 0$.

Применим к этой задаче метод асимптотических разложений. Попробуем по аналогии с одномерным случаем искать приближенное решение в виде

$$\overline{u}_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon\sum_{i=1}^{d} N_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x),$$

где функции $u_0(x)$ и $N_i(\xi)$, $i=1,2,\dots,d$, подлежат определению. С этой целью подставим функцию $\overline{u}_\varepsilon(x)$ в уравнение и краевые условия задачи (7.12) и постараемся выбрать функции $u_0(x)$ и $N_i(\xi)$ таким образом, чтобы в правой части и краевых условиях после подстановки возникли малые "невязки". Проведя необходимые вычисления, мы приходим к выводу, что функции $N_i(\xi)$ должны быть решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} &\sum_{k,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(a_{kj}(\xi)\frac{\partial N_i}{\partial\xi_j}\right) = -\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial}{\partial\xi_k}a_{ki}(\xi) \quad \text{в } \mathbb{R}^d\setminus B,\\ &N_i(\xi) \ \text{ 1-периодичны}, \quad \int\limits_Y N_i(\xi)\,d\xi = 0,\\ &\sum_{k,j=1}^{d} a_{kj}(\xi)\frac{\partial N_i}{\partial\xi_j}\nu_k = -\sum_{k=1}^{d} a_{ki}(\xi)\nu_k \quad \text{на } \partial B, \end{aligned} \tag{7.13}$$

где $\nu=(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_d)$ — внешняя нормаль к границе множества B, $Y=\square\setminus B$, $\square=[0,1]^d$. С помощью формулы Стокса легко проверяется выполнение условия согласования в этой задаче, поэтому она имеет периодическое решение. Единственность решения следует из принципа максимума.

Определим матрицу коэффициентов $\widehat{a}_{ij}$ по формуле

$$\widehat{a}_{ij} = \int\limits_Y \left[a_{ij}(\xi) + a_{ik}\frac{\partial N_j}{\partial\xi_k}\right]d\xi$$

и $u_0(x)$ как решение задачи Дирихле

$$\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widehat{a}_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right) = |Y|f(x) \quad \text{в } \Omega, \qquad u_0\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7.14}$$

где $|Y|$ — объем множества Y. Эта задача разрешима, если матрица $\widehat{a}_{ij}$ положительно определена. В данном случае для величин $\widehat{a}_{ij}$ даны явные формулы, поэтому положительную определенность матрицы $\widehat{a}_{ij}$ можно проверить непосредственно.

Задача 7.2. Докажите, что для усредненной матрицы $\widehat{a}_{ij}$ выполнено неравенство $\widetilde{\lambda}|Y|\,|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{d} \widehat{a}_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|Y|\,|\xi|^2$, $\widetilde{\lambda} > 0$. Отметим, что постоянная $\widetilde{\lambda}$ может быть меньше λ.

Таким образом, определены функции $u_0(x)$ и $N_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots, d$. Подставим разность точного и приближенного решений в уравнение (7.12) и найдем тем самым величину невязки в уравнении и краевом условии. Для краткости обозначим символом L_ε эллиптический оператор в левой части уравнения (7.12). Вычисления показывают, что

$$L_\varepsilon(u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon) = -\varepsilon(a_{lk}(\xi)N_s(\xi))\big|_{\xi=x/\varepsilon}\frac{\partial^3 u_0(x)}{\partial x_l \partial x_k \partial x_s}$$
$$+\left[\widehat{a}_{pq} - a_{pq}(\xi) - a_{pj}(\xi)\frac{\partial N_q(\xi)}{\partial \xi_j} - \frac{\partial}{\partial \xi_j}(a_{lp}(\xi)N_q(\xi))\right]\Bigg|_{\xi=x/\varepsilon}\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_p \partial x_q} \quad \text{в } \Omega_\varepsilon,$$

$$(u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon)\big|_{\Gamma_\varepsilon} = -\varepsilon\sum_{i=1}^{d} N_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x),$$

$$a_{kj}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial(u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon)}{\partial x_j}\nu_k\Big|_{S_\varepsilon} = -\varepsilon a_{kj}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)N_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i \partial x_i}\nu_k.$$

Выражение в правой части уравнения содержит одно слагаемое порядка ε, другое же слагаемое не содержит множителя ε и представляет собой конечную сумму функций вида $h(x/\varepsilon)w(x)$, где $h(\xi)$ — периодическая функция с нулевым средним по $\square$ (после ее продолжения нулем с $\square \cap B$ на $\square$), а $w(x)$ — достаточно гладкая функция.

Отметим, что хотя невязка в граничном условии на S_ε содержит множитель ε, в действительности она не является малой в интегральных нормах, поскольку площадь поверхности S_ε растет как $1/\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, доказательство малости разности $(u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon)$ требует более деликатного анализа, основой которого служит следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 7.1. *Решение $v_\varepsilon(x)$ краевой задачи*

$$L_\varepsilon v_\varepsilon(x)f_0(x) + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \qquad f_0 \in L_2(\Omega), \quad f_i \in H^1(\Omega),$$
$$v_\varepsilon\big|_{\Gamma_\varepsilon} = \psi\big|_{\Gamma_\varepsilon}, \quad \psi \in H^1(\Omega_\varepsilon), \qquad a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\nu_j\Big|_{S_\varepsilon} = \nu_i f_i\big|_{S_\varepsilon},$$

удовлетворяет оценке

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\left[\|f_0\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d}\|f_i\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right],$$

где постоянная C не зависит от ε.

Отложим ненадолго доказательство леммы и покажем сначала, как с ее помощью можно установить оценку величины $\|u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(a_{kj}(\xi)\frac{\partial N_{pq}}{\partial\xi_j}(\xi)\right)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial\xi_k}(a_{kp}(\xi)N_q(\xi)) - a_{pj}(\xi)\frac{\partial N_q}{\partial\xi_j}(\xi) - a_{pq}(\xi) + \widehat{a}_{pq} \quad \text{в } \mathbb{R}^d \setminus B,$$
$$N_{pq} \text{ 1-периодичны по } \xi, \quad \int\limits_Y N_{pq}(\xi)\,d\xi = 0,$$
$$a_{ij}(\xi)\frac{\partial N_{pq}}{\partial\xi_j}(\xi)\nu_i = -\nu_k a_{kp}(\xi)N_q(\xi) \quad \text{на } \partial B.$$

Эта краевая задача разрешима вследствие условия

$$\int\limits_Y \left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\big(a_{pj}(\xi)N_q(\xi)\big) + a_{pj}(\xi)\frac{\partial N_q}{\partial\xi_j}(\xi) + a_{pq}(\xi) - \widehat{a}_{pq}\right)d\xi$$
$$+ \int\limits_{\partial B\cap\square} \nu_j(\xi)a_{pj}(\xi)N_q(\xi)\,d\sigma(\xi) = \int\limits_Y \left(a_{pj}(\xi)\frac{\partial N_q}{\partial\xi_j}(\xi) + a_{pq}(\xi) - \widehat{a}_{pq}\right)d\xi = 0,$$

которое вытекает из определения постоянных $\widehat{a}_{pq}$. Теперь с помощью функций $N_{pq}(\xi)$ краевую задачу для $(u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon)$ можно переписать в виде

$$L_\varepsilon(u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon) = \varepsilon f_0^\varepsilon(x) + \varepsilon\sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i^\varepsilon}{\partial x_i}(x) \quad \text{в}$$
$$(u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon) = -\varepsilon N_s\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_0}{\partial x_s}(x) \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon,$$
$$a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial(u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon)}{\partial x_j}\nu_i = \varepsilon\nu_j f_j^\varepsilon \quad \text{на } S_\varepsilon,$$

где

$$f_0^\varepsilon(x) = -a_{kh}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)N_s\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^3 u_0(x)}{\partial x_h\partial x_k\partial x_s} - a_{kj}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial N_{pq}}{\partial\xi_j}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^3 u_0(x)}{\partial x_p\partial x_q\partial x_k},$$
$$f_k^\varepsilon(x) = a_{kj}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial N_{pq}}{\partial\xi_j}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_p\partial x_q}.$$

Теперь можно применить лемму, поскольку $\|f_0^\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \sum\limits_{i=1}^d \|f_i^\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C$, где $C > 0$ не зависит от ε. Выражение $\Big\|\varepsilon N_s(x/\varepsilon)\dfrac{\partial u_0}{\partial x_s}\Big\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)}$ оценивается сверху величиной $C_1\sqrt{\varepsilon}$ (см. задачу 13.5 ниже). Следовательно, $\|u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C_2\sqrt{\varepsilon}$, где постоянная C_2 от ε не зависит. Таким образом, мы оценили скорость сходимости приближения $\overline{u}_\varepsilon$ к точному решению u_ε при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство леммы 7.1. Положим $w_\varepsilon = v_\varepsilon - \psi$. Тогда w_ε является решением краевой задачи

$$L_\varepsilon w_\varepsilon = f(x) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - L_\varepsilon\psi \quad \text{в } \Omega_\varepsilon,$$
$$w_\varepsilon\big|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \quad a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\nu_j\Big|_{S_\varepsilon} = -\nu_i f_i - a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\nu_i.$$

Умножая уравнение на w_ε и интегрируя по частям, получим

$$-\int\limits_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(x)w_\varepsilon(x)dx - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_i(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}(x)dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}dx; \tag{7.15}$$

здесь все граничные интегралы взаимно сократились ввиду выбора краевых условий. Из (7.15) нетрудно вывести оценку для $\|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Обозначим через $H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$ замыкание множества функций из $C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, обращающихся в нуль в окрестности Γ_ε, по норме пространства $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Аналогично определяется пространство $H^1(\Omega,\Gamma_\varepsilon)$. Оценка для $\|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ может быть получена на основе неравенства Фридрихса в перфорированной области Ω_ε для любой функции $v_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$

$$\|v_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\int\limits_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}dx, \tag{7.16}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от ε. Это неравенство является прямым аналогом стандартного неравенства Фридрихса, однако трудность в его доказательстве состоит в том, что постоянная C не должна зависеть от ε. Доказательство основано на известном факте существования оператора продолжения $P_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon) \to H^1(\Omega)$ функций $u \in H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$ в область Ω (без перфорации), который удовлетворяет следующим условиям: (1) $P_\varepsilon u\big|_{\Omega_\varepsilon} = u$, (2) $\|P_\varepsilon u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|u\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$, (3) $\|\nabla(P_\varepsilon u)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$. Доказательство существования оператора P_ε с перечисленными свойствами можно найти, например, в [**97, 98, 7**].

С учетом свойств оператора продолжения P_ε на основании неравенства Фридрихса для функций из $H^1(\Omega,\Gamma_\varepsilon)$ с константой, не зависящей от параметра ε (см., например, [**128, 129**]), имеем

$$\|v_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant \|P_\varepsilon v_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C_1\int\limits_{\Omega}|\nabla(P_\varepsilon v_\varepsilon)|^2dx \leqslant C_2\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla v_\varepsilon|^2dx \leqslant C_3\int\limits_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}dx,$$

что и доказывает неравенство (7.16). Теперь из (7.15) получаем

$$\frac{1}{C}\|w_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} w_\varepsilon^2(x)dx + \alpha\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_0^2(x)dx + \alpha\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i=1}^d f_i^2(x)dx + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i=1}^d\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^2dx + \Lambda\alpha\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i=1}^d\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right|^2dx + \frac{\Lambda}{\alpha}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i=1}^d\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^2dx,$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$. При достаточно больших α после преобразований имеем

$$\|w_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K\Big\{\|f_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^d\|f_i\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\Big\}. \qquad \square$$

Рассмотренный асимптотический метод позволил не только получить результат об усреднении, но и оценить скорость сходимости решения исходной задачи к решению усредненной задачи. Это одно из преимуществ

метода асимптотических разложений. Недостаток — повышенные требования гладкости данных. При других методах (например, компенсированной компактности) можно существенно снизить требования регулярности.

Отметим, что результат об усреднении справедлив и в том случае, когда оператора продолжения с указанными выше свойствами не существует; для справедливости теоремы об усреднении достаточно, чтобы периодическое перфорированное множество было открытым и связным (см. [**53**]).

Анализ поведения решений краевых задач в перфорированных областях привел к пониманию следующего интересного явления. Чтобы процесс, протекающий в перфорированной среде, имел эффективные (усредненные) характеристики, т.е. для существования средних макроскопических показателей, связность перфорированного множества не обязательна. В некоторых случаях такой процесс (например, диффузия или электрический ток) может протекать как в едином целом во множестве, состоящем из большого числа несвязных компонент. Нужно лишь, чтобы замыкания компонент имели непустое пересечение и это пересечение обладало некоторыми свойствами ("не слишком мало"). Рассмотрим два примера.

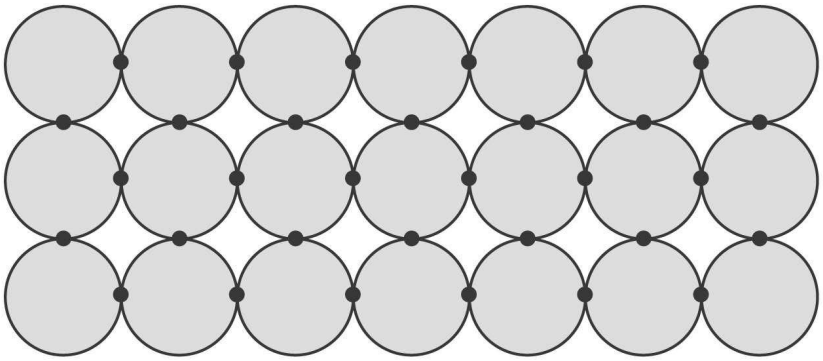

Рис. 7.3

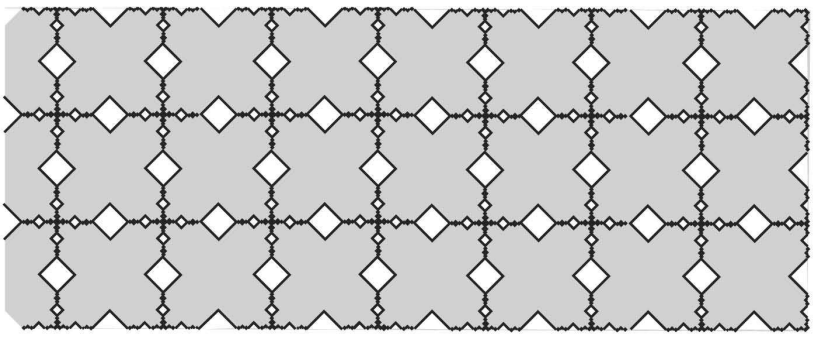

Рис. 7.4

На рис. 7.3 показана система периодически расположенных касающихся друг друга непересекающихся открытых кругов. Замыкания кругов пересекаются в точках касания. На рис. 7.4 изображена система периодически повторяющихся непересекающихся открытых множеств, замыкания которых пересекаются по канторовым множествам, расположенным на каждом из прямолинейных отрезков стандартной прямоугольной решетки.

В первом случае макроскопического распространения процесса не происходит, и усреднение не имеет места; вся структура распадается на несвязанные между собой элементы. Во втором случае процесс протекает во всей структуре как в едином целом. В чем же причина этого?

Оказывается, что в первом случае электростатическая емкость пересечения замыканий открытых шаров равна нулю, а во втором — пересечение замыканий представляет собой канторово множество на плоскости и его электростатическая емкость положительна. В следующем параграфе будет изложена техника p-связности, которая позволит сформулировать и доказать утверждение об усреднении периодических структур, представляющих собой объединение несвязных компонент.

§ 8. Техника p-связности (по В. В. Жикову)

8.1. p-Связность на торе периодичности. Пусть $\square = [0,1)^d$ — ячейка или тор периодичности, F — открытое периодическое множество. Мы рассматриваем периодические функции, определенные на F и принадлежащие пространству $L_{2,\mathrm{per}}(F)$. Соотношение $a = \mathrm{div} b$, где $a \in L_{2,\mathrm{per}}(F)$, $b \in (L_{2,\mathrm{per}}(F))^d$, будем здесь понимать в обобщенном смысле

$$\int\limits_{F\cap\square} a\varphi\,dx = -\int\limits_{F\cap\square} (b,\nabla\varphi)\,dx \quad \forall\,\varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square). \tag{8.1}$$

Условимся продолжать функции из $L_{2,\mathrm{per}}(F)$ нулем на все пространство $\mathbb{R}^d$. Тогда

$$\int\limits_{\square} a\varphi\,dx = -\int\limits_{\square} (b,\nabla\varphi)\,dx, \quad \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square).$$

В частности, если $a = 0$, то вектор b называется *соленоидальным* или F-*соленоидальным*, т.е.

$$\int\limits_{F\cap\square} (b,\nabla\varphi)\,dx = \int\limits_{\square} (b,\nabla\varphi)\,dx = 0 \quad \forall\varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square).$$

Задача 8.1. Из области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ выброшен шар B. В оставшемся шаровом слое задан гладкий соленоидальный вектор $b(x)$, т.е. $\dfrac{\partial b_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial b_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial b_3}{\partial x_3} = 0$. При каком условии этот вектор останется соленоидальным при продолжении его нулем на выброшенный шар?

Ответ. Необходимое и достаточное условие: $(b,n)\big|_{\partial B} = 0$, где n — нормаль к границе шара.

Введем пространство Соболева $W^1_{p,\mathrm{per}}(F)$ как замыкание множества $C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$ по норме

$$\left(\int\limits_{F\cap\square} (u^p + |\nabla u|^p)\,dx\right)^{1/p}.$$

В случае $p = 2$ используем также обозначение $H^1_{\mathrm{per}}(F) = W^1_{2,\mathrm{per}}(F)$.

Определение 8.1. Открытое периодическое множество F *p-связное*, если $u \in W^1_{p,\mathrm{per}}(F)$ и $\nabla u = 0$ влечет $u \equiv \mathrm{const}$ почти всюду на F.

Предложение 8.1. *Если множество F связно на торе периодичности, то оно p-связно при любом $p \geqslant 1$.*

Задача 8.2. Докажите предложение 8.1.

8.2. 2-Связные множества.

Пример 8.1. Докажем, что определенное в конце п. 7.2 периодическое множество F, состоящее из несвязных компонент, замыкания которых пересекаются по канторову множеству (см. рис. 8.1), является 2-связным. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in C^\infty(\overline{F})$ такая, что $u_n \to u$ в $H^1(F)$, $u \in H^1(F)$, $\nabla u_n \to 0$ в $L_2(F)$ и при этом $u \not\equiv \text{const}$ в F. Очевидно, что $u = \mathscr{C}_1$ в F_0 и $u = \mathscr{C}_2$ в F_1, где $F_0 = \big((0, \frac{1}{2}) \times (0,1)\big) \cap F$, $F_1 = ((1/2, 1) \times (0,1)) \cap F$. Пусть $\mathscr{C}_1 \neq \mathscr{C}_2$. Не

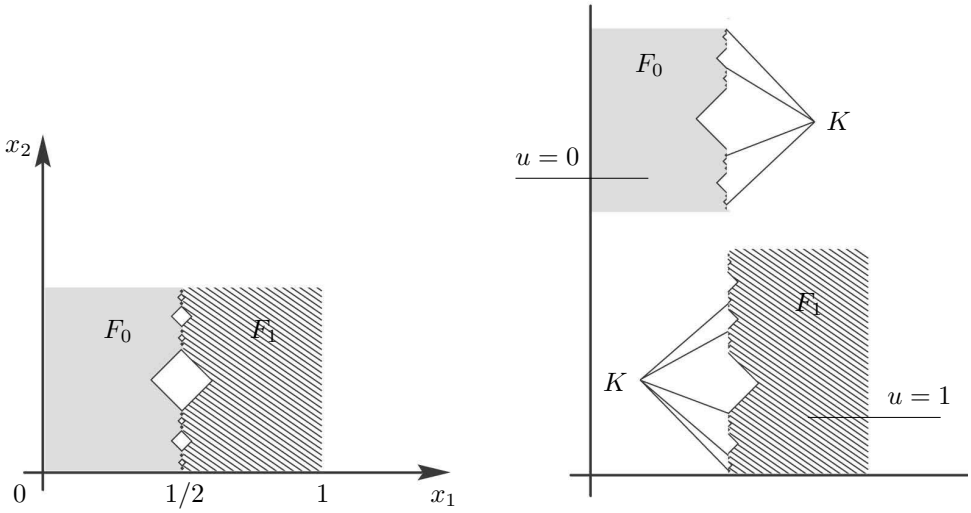

Рис. 8.1

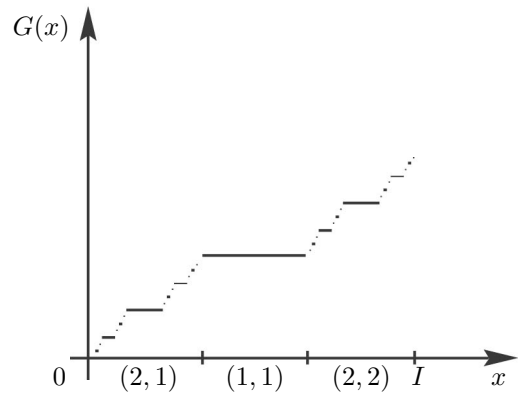

Рис. 8.2

Приведем это утверждение к противоречию. Заметим, что канторово множество K представляет собой часть границы как множества F_0, так и множества F_1. Пусть $G(x)$ — "канторова лестница", т.е. непрерывная функция, принимающая значение $(2k-1)/n$ на каждом (n,k)-м интервале дополнения канторова множества (см. рис. 8.2). Определим меру $d\mu$ с носителем в K по формуле

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)\,d\mu = \int\limits_{[0,1]} f(x)\,dG,$$

где в левой части стоит интеграл Лебега —- Стилтьеса, т.е. $\mu(0,\alpha) = G(\alpha)$.

Лемма 8.1. *Пусть $w(x) \in C^\infty(\overline{F}_0)$. Тогда существует не зависящая от $w(x)$ постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\int\limits_K w^2(x)\,d\mu \leqslant C\|w\|^2_{H^1(F_0)}.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для области F_1.

С помощью леммы 8.1 легко можно привести к противоречию предположение о непостоянстве функции u. С одной стороны,

$$\int\limits_K u_n^2(x)\,d\mu \leqslant C\int\limits_{F_0}(u_n^2(x) + |\nabla u_n|^2)\,dx \to 0$$

при $n \to \infty$. С другой стороны,

$$\int\limits_K [u_n(x)-1]^2\,d\mu \leqslant C\int\limits_{F_1}\left([u_n(x)-1]^2 + |\nabla u_n|^2\right)\,dx \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда $\int\limits_K 1\,d\mu = 0$, и мы приходим к противоречию.

Доказательство леммы 8.1. Пусть $G(x)$ — определенная выше "канторова лестница" и $P : H^1(F_0) \to H^1(\square^-)$ — оператор продолжения функций из $H^1(F_0)$ на область $\square^- = (0,1/2)\times(0,1)$ такой, что

(1) $\|Pu\|_{L_2(\square^-)} \leqslant C\|u\|_{L_2(F_0)}$ для всех $u \in H^1(F_0)$,

(2) $\|\nabla(Pu)\|_{L_2(\square^-)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L_2(F_0)}$ для всех $u \in H^1(F_0)$,

(3) если $u \in C(\overline{F}_0)$, то $\|Pu\|_{C(\square^-)} \leqslant C\|u\|_{C(\overline{F}_0)}$,

где $C > 0$ не зависит от функции $u \in H^1(F_0)$. Такой оператор существует в силу липшицевости границы F_0 (см., например, [**84**]).

Задача 8.3. Докажите существование оператора продолжения P.

Из свойств оператора продолжения следует, что

$$\int\limits_K w(x)\,d\mu = \int\limits_0^1 Pw(x)\,dG \quad \forall w \in C^\infty(\overline{F}_0).$$

Задача 8.4. Докажите, что любая гёльдерова функция с показателем $\alpha > 1/2$, определенная на на $[0,1]$, принадлежит пространству $H^{1/2}[0,1]$.

Указание. Используйте определение нормы в $H^{1/2}$ из п. 1.1.

Задача 8.5. Докажите, что "канторова лестница" $G(x)$ является гёльдеровой с показателем $\alpha = (\ln 2)/(\ln 3_{>}1/2$ и, следовательно, принадлежит $H^{1/2}[0,1]$.

Задача 8.6. Докажите, что для любой функции $\varphi(x) \in H^{1/2}[0,1]$

$$\int\limits_0^1 \varphi^2\, dG \leqslant C\|\varphi\|^2_{H^{1/2}[0,1]},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $\varphi(x) \in H^{1/2}[0,1]$.

Указание. Воспользуйтесь результатами задачи 8.5.

Продолжим доказательство леммы 8.1. На основании приведенных выше задач, теоремы о следах и свойств оператора продолжения имеем

$$\Big(\int\limits_K w^2(x)\, d\mu\Big)^{1/2} = \Big(\int\limits_0^1 [Pw(x)]^2\, dG\Big)^{1/2} \leqslant C\|Pw\|_{H^{1/2}[0,1]} \leqslant C\|Pw\|_{H^1(\square^-)}$$
$$\leqslant C_1\|w\|_{H^1(F_0)},$$

что и требовалось доказать. □

Важной характеристикой 2-связных множеств служит следующая лемма об аппроксимации.

Обозначим через $\langle f\rangle_F$ среднее значение $\int\limits_{F\cap\square} f(x)\, dx$ функции $f(x)$.

Лемма 8.2 (об аппроксимации)**.** *Пусть множество F 2-связно и $a \in L_{2,\mathrm{per}}(F)$ имеет нулевое среднее $\langle a\rangle_F = 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся $a_0, b_1, \ldots, b_d \in L_{2,\mathrm{per}}(F)$ такие, что $\|a_0\|_{L_{2,\mathrm{per}}(F)} \leqslant \delta$, $a - a_0 = \operatorname{div} b$ в $\square$, $b = (b_1, \ldots, b_d)$.*

Задача 8.7. Пусть F — связное периодическое множество с липшицевой границей. Верно ли, что в этом случае можно выбрать $a_0 = 0$?

Доказательство леммы 8.2. Пусть S —множество всех $\varsigma \in L_{2,\mathrm{per}}(F)$, допускающих представление $\varsigma = \operatorname{div}\vartheta$, $\vartheta \in (L_{2,\mathrm{per}}(F))^d$. Требуется доказать, что S плотно в подпространстве $X = \{a \in L_{2,\mathrm{per}}(F), \langle a\rangle_F = 0\}$. Пусть $\alpha \in L_{2,\mathrm{per}}(F)$ и $\langle\alpha\rangle_F = 0$, $\langle\alpha\varsigma\rangle_F = 0$ для любого $\varsigma \in S$. Если мы покажем, что $\alpha = 0$ в $L_{2,\mathrm{per}}(F)$, то требуемое утверждение будет доказано.

Рассмотрим периодическую задачу

$$-\Delta u + u = \alpha \quad \text{в} \quad F$$

с однородным краевыми условием Неймана на ∂F. По определению $u \in H^1_{\mathrm{per}}(F)$ есть решение этого уравнения, если

$$\int\limits_{F\cap\square} ((\nabla u, \nabla\varphi) + u\varphi)\, dx = \int\limits_{F\cap\square} \alpha\varphi\, dx \quad \forall\varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\overline{F}). \tag{8.2}$$

Из теоремы Рисса следует однозначная разрешимость этой задачи. Из (8.2) следует равенство $\alpha - u = -\Delta u$, поэтому $\alpha - u \in S$ и, следовательно, $\langle\alpha(\alpha - u)\rangle_F = 0$. Отсюда

$$\langle\alpha^2\rangle_F = \langle u\alpha\rangle_F \leqslant \langle u^2\rangle_F^{1/2}\langle\alpha^2\rangle_F^{1/2}, \tag{8.3}$$

т.е. $\langle\alpha^2\rangle_F \leqslant \langle u^2\rangle_F$. С другой стороны, из уравнения (8.2) следует

$$\int\limits_{F\cap\square} (|\nabla u|^2 + u^2)\,dx = \int\limits_{F\cap\square} \alpha u\,dx \leqslant \langle\alpha^2\rangle_F^{\frac{1}{2}} \langle u^2\rangle_F^{1/2},$$

откуда $\langle !u^2\rangle_F \leqslant \langle\alpha^2\rangle_F$. Следовательно, $\langle u^2\rangle_F = \langle\alpha^2\rangle_F$ и $\int\limits_{F\cap\square} |\nabla u|^2\,dx = 0$. Тогда по определению 2-связности $u \equiv \text{const}$. Используя равенство (8.3), получаем $\langle\alpha^2\rangle_F = \langle u\alpha\rangle_F = u\langle\alpha\rangle_F$. Так как $\langle\alpha\rangle_F = 0$, имеем $\alpha = 0$ в $L_{2,\mathrm{per}}(F)$. □

Вернемся к произвольным множествам F.

Замечание 8.1. Если F связно на торе периодичности, то лемму 8.2 можно доказать совсем просто. Достаточно проверить, что множество

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i} : \varphi_i \in C^\infty_{\mathrm{per}}(F), \operatorname{supp}\varphi_i \subset F \Big\}$$

плотно в пространстве X. Это утверждение мы оставляем в виде задачи.

Непосредственным следствием леммы 8.2 является следующее утверждение. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Обозначая $F^\varepsilon := \varepsilon F$, вводим, как и ранее, перфорированную область Ω^ε как пересечение $\Omega \cap F^\varepsilon$.

Лемма 8.3. *Пусть F — 2-связное множество и $a(\xi) \in L_{2,\mathrm{per}}(F)$ имеет нулевое среднее, $\langle a\rangle_F = 0$. Предположим, что семейство $w_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ обладает следующим свойством*:

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (|w_\varepsilon|^2 + |\nabla w_\varepsilon|^2)\,dx = A < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) w_\varepsilon(x)\,dx = 0. \tag{8.4}$$

Доказательство. По лемме 8.2 имеем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) w_\varepsilon(x)\,dx = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} a_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) w_\varepsilon(x)\,dx - \sum_{i=1}^{d} \varepsilon \int\limits_{\Omega^\varepsilon} b_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\,dx.$$

Так как по свойству среднего значения

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Big| b_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^2 dx = |\Omega|\langle b_i^2\rangle_F, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Big|a_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^2 dx = |\Omega|\langle a_0^2\rangle_F \leqslant |\Omega|\delta^2,$$

требуемое утверждение очевидно. □

8.3. Свойства p-связных микроструктур. Пусть задано семейство функций $u_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (|u_\varepsilon|^2 + |\nabla u_\varepsilon|^2)\,dx \leqslant C < \infty. \tag{8.5}$$

Изучим асимптотическое поведение семейства функций $\chi_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$, где $\chi_\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$ и $\chi(\xi)$ — характеристическая функция множества F:

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in F, \\ 0, & \xi \notin F. \end{cases}$$

Эта семейство ограничено в $L_2(\Omega)$, и без потери общности можно считать, что

$$\chi_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup \theta u, \quad \text{слабо в } \ L_2(\Omega), \quad \theta = |\square \cap F|. \tag{8.6}$$

Важный вопрос: принадлежит ли предельная функция u пространству Соболева $H^1(\Omega)$? Из самой оценки (8.5) на ∇u_ε это вовсе не следует. Ответ будет зависеть от того, насколько богат запас F-соленоидальных векторов.

Задача 8.8. Приведите пример периодического множества F и последовательности $u_\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ таких, что предельная функция u не принадлежит пространству $H^1(\Omega)$.

Следующая лемма имеет ключевое значение.

Лемма 8.4. *Пусть множество F 2-связно, z — соленоидальный вектор и $\zeta = \langle z \rangle_F$ — его среднее значение. Положим $z_\varepsilon(x) = z(x/\varepsilon)$ Тогда для u_ε и u имеем*

(i) $(\nabla u, \zeta) \in L_2(\Omega)$,

(ii) *для любой $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi(x)(\nabla u_\varepsilon(x), z_\varepsilon(x))\, dx = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)(\nabla u(x), \zeta)\, dx.$$

Кроме того, если $u_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, то $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ в следующем смысле:

$$\int\limits_{\Omega} u(\nabla \varphi, \zeta)\, dx = -\int\limits_{\Omega} \varphi(\nabla u, \zeta)\, dx, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{8.7}$$

Доказательство. По свойству среднего значения

$$\int\limits_{\Omega} \left| z\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \right|^2 dx \leqslant 2|\Omega| \langle z^2 \rangle_F$$

при достаточно малом ε. Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |(\nabla u_\varepsilon, z_\varepsilon)|\, dx \leqslant \left(\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega} |z_\varepsilon|^2\, dx \right)^{1/2} \leqslant C_1 < \infty.$$

Поэтому последовательность функционалов

$$l_\varepsilon(\varphi) = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi(\nabla u_\varepsilon, z_\varepsilon)\, dx$$

на $C(\overline{\Omega})$ ограничена по норме. Без потери общности считаем эту последовательность слабо сходящейся, так что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi(\nabla u_\varepsilon, z_\varepsilon)\, dx = l(\varphi).$$

С другой стороны,

$$|l_\varepsilon(\varphi)| \leqslant \left(\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\varphi|^2|z_\varepsilon|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant C\left(\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\varphi|^2|z_\varepsilon|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

По свойству среднего

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} |\varphi|^2|z_\varepsilon|^2\,dx = \langle z^2\rangle_F \int\limits_{\Omega} |\varphi|^2\,dx.$$

В результате имеем

$$|l(\varphi)| \leqslant C_2\left(\int\limits_{\Omega} |\varphi|^2\,dx\right)^{1/2},$$

т.е. $l(\varphi)$ — непрерывный функционал в $L_2(\Omega)$. Поэтому найдется функция $v_0 \in L_2(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi(\nabla u_\varepsilon, z_\varepsilon)\,dx = \int\limits_{\Omega} \varphi v_0\,dx, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Остается проверить, что $v_0 = (\nabla u, \zeta)$. Для этого надо доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi(\nabla u_\varepsilon, z_\varepsilon)\,dx = -\int\limits_{\Omega} u(\nabla\varphi, \zeta)\,dx \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

В случае $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ для получения равенства (8.7) необходимо доказать последнее соотношение для любых $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi(\nabla u_\varepsilon, z_\varepsilon)\,dx &= \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla(\varphi u_\varepsilon), z_\varepsilon)\,dx - \int\limits_{\Omega^\varepsilon} u_\varepsilon(\nabla\varphi, z_\varepsilon)\,dx \\ &= -\int\limits_{\Omega^\varepsilon} u_\varepsilon(\nabla\varphi, z_\varepsilon)\,dx, \qquad (8.8)\end{aligned}$$

так как первый интеграл равен нулю в силу соленоидальности z_ε и финитности φu_ε. Далее,

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} u_\varepsilon(\nabla\varphi, z_\varepsilon)\,dx = \frac{1}{\theta}\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon u_\varepsilon(\nabla\varphi, \zeta)\,dx + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} u_\varepsilon\Big(\nabla\varphi, \Big(z_\varepsilon - \frac{\zeta\chi_\varepsilon}{\theta}\Big)\Big)\,dx.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства сходится к $\displaystyle\int\limits_{\Omega} u(\nabla\varphi, \zeta)\,dx$ в силу (8.6). Второе слагаемое сходится к нулю по лемме 8.3 при $a = z_j - \dfrac{\chi\zeta_j}{\theta}$ и $w_\varepsilon = u_\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$. □

Докажем, что имеется достаточный запас соленоидальных векторов.

Предложение 8.2. *Если F связно в $\mathbb{R}^d$, то любой вектор из $\mathbb{R}^d$ является средним значением некоторого F-соленоидального вектора.*

Следствие 8.1. *Если F связно в $\mathbb{R}^d$, то предельная функция и принадлежит $H^1(\Omega)$. Если $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\partial\Omega$ липшицева, то $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только последнее утверждение. Из (8.6) имеем

$$\int\limits_{\Omega} u\nabla\varphi\,dx = -\int\limits_{\Omega} \varphi\nabla u\,dx \quad \forall\ \varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

Это означает, что $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ и $u(x) = 0$ вне области Ω. Ввиду липшицевости границы $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. □

8.4. Определение и свойства усредненной матрицы. Пусть $A(x)$ — измеримая симметрическая периодическая матрица, заданная на F и подчиненная условию эллиптичности $\alpha E \leqslant A(x) \leqslant \frac{1}{\alpha}E$, $\alpha > 0$, $x \in F$. Обозначим через $V_{\rm pot}$ замыкание множества $\{\nabla\varphi, \varphi \in C^{\infty}_{\rm per}(F)\}$ в пространстве $(L_{2,\rm per}(F))^d$. Вектор–функции из $V_{\rm pot}$ будем называть *потенциальными*. В отличие от соленоидальных они заданы только на F.

Для произвольного $\eta \in \mathbb{R}^d$ рассмотрим периодическую задачу: Найти $v_\eta \in V_{\rm pot}$ такую, что

$$\operatorname{div}(A(\eta + v_\eta)) = 0,$$

или, в подробной записи: Найти $v_\eta \in V_{\rm pot}$ такую, что

$$\int\limits_{\square\cap F} (A(\eta + v_\eta), \nabla\varphi)\,dx = 0 \quad \forall\varphi \in C^{\infty}_{\rm per}. \tag{8.9}$$

Покажем, что решение существует и единственно.

Введем в $V_{\rm pot}$ скалярное произведение

$$[u, v] := \int\limits_{\square\cap F} (A(x)u, v)\,dx.$$

В силу положительной определенности и симметричности матрицы $A(x)$ это действительно скалярное произведение. Задача (8.9) тогда записывается в виде: Найти $v(x) \in V_{\rm pot}$ такую, что

$$[v_\eta, \nabla\varphi] = -\int\limits_{\square\cap F} (A(x)\eta, \nabla\varphi)\,dx \quad \forall\ \varphi \in C^{\infty}_{\rm per}(F).$$

Поскольку выражение в правой части этого равенства задает линейный непрерывный функционал на $V_{\rm pot}$, по теореме Рисса такой элемент $v_\eta(x) \in V_{\rm pot}$ существует и определен единственным образом.

Заметим, что решение v_η зависит от η линейно, при этом вектор $A(\eta + v_\eta)$ соленоидален. Определим матрицу $A^{\rm hom}$ равенством

$$A^{\rm hom}\eta = \int\limits_{\square\cap F} A(\eta + v_\eta)\,dx \tag{8.10}$$

и проверим, что она симметрична. Рассмотрев задачу (8.9), заменив η на ζ и v_η — на w_ζ, приходим к соотношению

$$\zeta A^{\rm hom}\eta = \left(\zeta, \int\limits_{\square\cap F} A(\eta + v_\eta)\,dx\right) = \int\limits_{\square\cap F} (A(\zeta + w_\zeta), (\eta + v_\eta))\,dx$$
$$= \int\limits_{\square\cap F} (A(\zeta + w_\zeta), \eta)\,dx = \eta A^{\rm hom}\zeta,$$

и симметричность доказана. Справедливо вариационное представление

$$\eta A^{\hom}\eta = \min_{v\in V_{\mathrm{pot}}} \int\limits_{\square\cap F} (\eta+v_\eta)A(\eta+v_\eta)\,dx,$$

так как (8.9) есть уравнение Эйлера данной вариационной задачи. Возникает естественный вопрос, когда матрица $A^{\hom}$ вырождается? Очевидно, что это происходит только тогда, когда $\eta + v_\eta = 0$, т.е. когда постоянный вектор потенциален.

Задача 8.9. Приведите пример периодического множества F и постоянного (не равного нулю) потенциального вектора на F (ответ указан на рис. 8.3).

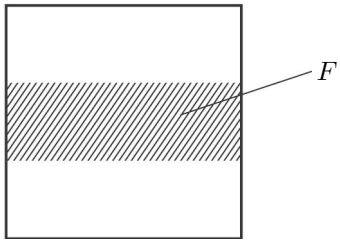

Рис. 8.3

Если матрица $A^{\hom}$ положительно определенная, то каждый вектор $\zeta \in \mathbb{R}^d$ служит средним значением некоторой соленоидальной вектор–функции ввиду (8.10).

Лемма 8.5. *Если F связно в $\mathbb{R}^d$, то усредненная матрица положительно определенная.*

Доказательство. Из вариационного представления имеем

$$\eta A^{\hom}\eta \geqslant \alpha \min_{v\in V_{\mathrm{pot}}} \int\limits_{\square\cap F} |\eta+v|^2\,dx = \alpha \inf_{\varphi\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)} \int\limits_{\square\cap F} |\eta+\nabla\varphi|^2\,dx.$$

Пусть F_1 — открытое связное периодическое подмножество F с гладкой границей.

Задача 8.10. Докажите существование такого множества F_1.

В силу очевидного неравенства

$$\inf_{\varphi\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)} \int\limits_{\square\cap F} |\eta+\nabla\varphi|^2\,dx \geqslant \inf_{\varphi\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)} \int\limits_{\square\cap F_1} |\eta+\nabla\varphi|^2\,dx$$

и достижимости инфимума в его правой части, находим

$$\eta A^{\hom}\eta \geqslant \alpha \min_{\varphi\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)} \int\limits_{\square\cap F_1} |\eta+\nabla\varphi|^2\,dx.$$

Квадратичная форма в правой части задает усредненную матрицу для оператора Лапласа на гладкой периодической структуре F_1, и положительная определенность этой матрицы следует из задачи 7.2. □

8.5. Лемма о сходимости потоков. Теперь подготовлен необходимый математический аппарат для исследования задач усреднения в перфорированных областях Ω^ε в случае, когда $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon F$, где F — произвольное 2-связное периодическое множество. Как мы уже отмечали, F не обязательно геометрически связно. Подчеркнем также, что мы не накладываем никаких условий на гладкость его границы.

Рассмотрим краевую задачу

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{div}\Big(A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon\Big)+u_\varepsilon=f(x)\quad \text{в}\ \ \Omega^\varepsilon,\\
&a_{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\nu_j=0\quad \text{на}\ \ S^\varepsilon,\qquad u_\varepsilon\big|_{\Gamma_\varepsilon}=0,
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

которую мы понимаем в обобщенном смысле, т.е. решением этой задачи назовем функцию u_ε из $H^1(\Omega^\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$ такую, что

$$
\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Big[\Big(A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon,\nabla\psi\Big)+(u_\varepsilon,\psi)\Big]\,dx=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}f(x)\psi(x)\,dx \tag{8.12}
$$

для каждой $\psi\in H^1(\Omega^\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$. Существование и единственность решения этой задачи элементарно вытекает из леммы Лакса — Мильграма. Кроме того, полагая $\psi(x)\equiv u_\varepsilon(x)$, нетрудно получить оценку $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C$, где постоянная $C>0$ не зависит от ε.

Полагая в в интегральном тождестве (8.12) $\psi(x)=\varepsilon w(x/\varepsilon)\varphi(x)$, где $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, $w(\xi)\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$, получим

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Big(A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon,\nabla_\xi w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\varphi(x)\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Big(A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon,\nabla\varphi(x)\Big)w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx\\
&+\varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon}u_\varepsilon w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\varphi(x)\,dx=\varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon}f(x)w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Big(A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon,\nabla_\xi w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\varphi(x)\,dx\to 0\quad\text{при}\ \ \varepsilon\to 0 \tag{8.13}
$$

для любых $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, $w(\xi)\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$. Обозначим через $u(x)$ слабый предел в $L_2(\Omega)$ подпоследовательности $\{\chi_{\varepsilon'}u_{\varepsilon'}\}$, где χ_ε — характеристическая функция области Ω^ε. Какому уравнению и какому краевому условию удовлетворяет эта функция? Следующая лемма дает ответ на этот вопрос.

Обозначим через χ_ε характеристическую функцию области Ω^ε.

Лемма 8.6. *Пусть $\{u_\varepsilon\}$ — произвольное семейство функций из $H^1(\Omega^\varepsilon)$ таких, что $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C$ и $\chi_\varepsilon u_\varepsilon\rightharpoonup u$ слабо в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$. Пусть также выполнено условие*

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Big(A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon,\nabla_\xi w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\varphi(x)\,dx=0\quad\forall w\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square),\varphi\in C_0^\infty(\Omega). \tag{8.14}
$$

Тогда имеет место сходимость потоков $\chi_\varepsilon A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\rightharpoonup A^{\mathrm{hom}}\nabla u$ слабо в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$, т.е.

$$
\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\varphi(x)A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon(x)\,dx\to\int\limits_{\Omega}\varphi(x)A^{\mathrm{hom}}\nabla u\,dx\quad\forall\varphi\in L_2(\Omega).
$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ — евклидово скалярное произведение d-мерных векторов.

Доказательство леммы 8.6. Пусть $v_\eta\in V_{\mathrm{pot}}$ — решение задачи (8.9). Тогда вектор $z(\xi)=\chi(\xi)A(\xi)(\eta+v_\eta)$ соленоидальный, т.е. $\operatorname{div}(\chi_\varepsilon A_\varepsilon(\eta+v))=$

0 в $\square$ в обобщенном смысле, и $\langle z\rangle_F = A^{\hom}\eta$. Положим $z_\varepsilon(x) = z(x/\varepsilon)$. По лемме 8.4

$$\int\limits_\Omega \varphi\nabla u_\varepsilon z_\varepsilon\,dx \to \int\limits_\Omega \varphi\nabla u A^{\hom}\eta\,dx \quad \text{при } \varepsilon\to 0. \tag{8.15}$$

Замечание 8.2. Отметим, что лемма о компенсированной компактности не может быть использована для вывода предельного соотношения (8.15), поскольку в общем случае u_ε не допускает продолжения в пространство $H^1(\square)$.

Нетрудно проверить, что равенство (8.14) сохраняется, если вместо $\nabla_\xi w(x/\varepsilon)$ взять $v_\eta(x/\varepsilon)$ (докажите!), т.е.

$$\int\limits_\Omega \chi_\varepsilon(x)\left(A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon(x), v_\eta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right)\varphi(x)\,dx \to 0 \quad \text{при } \varepsilon\to 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \varphi A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\eta\,dx \to \int\limits_\Omega \varphi\nabla u A^{\hom}\eta\,dx.$$

Ввиду произвольности $\eta\in\mathbb{R}^d$ получаем требуемое утверждение о сходимости потоков. $\square$

Мы видим, что любой слабый предел $u(x)$ последовательности решений задач (8.11) удовлетворяет уравнению $\operatorname{div}\big(A^{\hom}\nabla u\big) + u = f$ в смысле теории обобщенных функций. Однако $u(x)$ не обязательно принадлежит $H^1(\Omega)$ и матрица $A^{\hom}$ не обязательно положительно определена, поэтому полученное уравнение на $u(x)$ может оказаться неэллиптическим. Мы не можем утверждать также, что $u\big|_{\partial\Omega} = 0$. Чтобы понять, будет ли предельное уравнение эллиптическим, мы должны изучить множество соленоидальных вектор–функций на F и выяснить, какие постоянные векторы из $\mathbb{R}^d$ могут служить средними значениями соленоидальных векторных полей на F. Если это множество составляет все пространство $\mathbb{R}^d$, то предельная задача является эллиптической; если же размерность указанного пространства меньше d, то $A^{\hom}$ — вырожденная матрица и функция u имеет первые производные по Соболеву только в определенных направлениях (см. лемму 8.4 и равенство (8.10)).

§ 9. Метод двухмасштабной сходимости

9.1. Основные определения и формулировки. Изложим еще один широко используемый метод анализа задач теории усреднения — метод двухмасштабной сходимости. Первоначально метод был предложен Нгуетсенгом [**94**], а затем развит в работах Аллера [**3**] и ряда других авторов. Введем определение двухмасштабной сходимости.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область.

Определение 9.1. Последовательность $u_\varepsilon(x)\in L_2(\Omega)$, ограниченная в $L_2(\Omega)$ равномерно по ε, называется *двухмасштабно сходящейся* к функции $u(x,\xi)\in L_2(\Omega\times\square)$, если для любых $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ и $\Phi(\xi)\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$

$$\int\limits_{\Omega} u_\varepsilon(x)\varphi(x)\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx \to \int\limits_{\Omega\times\square} u(x,\xi)\varphi(x)\Phi(\xi)\,dxd\xi \quad \text{при} \ \ \varepsilon\to 0.$$

Двухмасштабная сходимость обозначается следующим образом:

$$u_\varepsilon(x) \overset{2}{\to} u(x,\xi) \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Если $u_\varepsilon(x)\to u(x)$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$, то $u_\varepsilon(x)\overset{2}{\to} u(x)$ при $\varepsilon\to 0$ (проверьте!). Заметим также, что если $F(\xi)$ — 1-периодическая функция, то $F(x/\varepsilon)\rightharpoonup \langle F\rangle_\square$ слабо в Ω и $F(x/\varepsilon)\overset{2}{\to} F(\xi)$. Понятие двухмасштабной сходимости обобщает понятие слабой сходимости.

Задача 9.1. Пусть периодическая по переменной ξ функция $u(x,\xi)$ непрерывна на $\overline{\Omega\times\square}$. Докажите, что $u(x,x/\varepsilon)\overset{2}{\to} u(x,\xi)$.

Задача 9.2. Пусть $f(\xi)\in L_2(\square)$ — периодическая функция. Имеет ли последовательность функций $\{f(x/\varepsilon^2)\}$ двухмасштабный предел? Если "да", то чему он равен?

Сформулируем (пока без доказательства) основные теоремы о двухмасштабной сходимости функций, доказанные впервые Нгуетсенгом.

Теорема 9.1. *Предположим, что*

$$\int\limits_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2\,dx < C,$$

где $C>0$ не зависит от $\varepsilon>0$. Тогда из последовательности $\{u_\varepsilon(x)\}$ можно выбрать двухмасштабно сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 9.2. *Предположим, что $u_\varepsilon(x)\in H^1(\Omega)$ и*

$$\int\limits_{\Omega} (|u_\varepsilon(x)|^2 + |\nabla_x u_\varepsilon(x)|^2)\,dx < C,$$

где $C>0$ не зависит от $\varepsilon>0$. Тогда из последовательности $\{u_\varepsilon(x)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u_{\varepsilon'}(x)\}$ такую, что $u_{\varepsilon'}\overset{2}{\to} u(x)$ при $\varepsilon'\to 0$ и $\nabla_x u_{\varepsilon'}\overset{2}{\to}\nabla_x u(x)+\nabla_\xi u^{(1)}(x,\xi)$ при $\varepsilon'\to 0$, где $u(x)\in H^1(\Omega)$ и $u^{(1)}(x,\xi)$ — некоторая функция переменных $x\in\Omega$ и $\xi\in\square$ такая, что $u^{(1)}\in L_2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(\square))$.

Теорема 9.3. *Предположим, что $u_\varepsilon(x)\in H^1(\Omega)$,*

$$\int\limits_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2\,dx < C, \quad \varepsilon^2\int\limits_{\Omega} |\nabla_x u_\varepsilon(x)|^2\,dx < C,$$

где $C>0$ не зависит от $\varepsilon>0$. Тогда из последовательности $\{u_\varepsilon(x)\}$ можно выбрать подпоследовательность такую, что $u_{\varepsilon'}\overset{2}{\to} u(x,\xi)$ при $\varepsilon'\to 0$ и $\varepsilon\nabla_x u_{\varepsilon'}\overset{2}{\to}\nabla_\xi u(x,\xi)$ при $\varepsilon'\to 0$, где $u(x,\xi)\in L_2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(\square))$.

Пусть $\Omega^h_\varepsilon := \Omega\cap\varepsilon E$, $\Omega^s_\varepsilon := \Omega\backslash\Omega^h_\varepsilon$, где E — открытое связное периодическое множество в $\mathbb{R}^d$, $\square^h := \square\cap E$, $\square^s := \square\backslash\square^h$.

Теорема 9.4. *Предположим, что* $u_\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$,

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \bigl(|u_\varepsilon(x)|^2 + |\nabla_x u_\varepsilon(x)|^2\bigr)\,dx < C, \quad \varepsilon^2 \int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\,dx + \int\limits_\Omega u_\varepsilon^2\,dx < C,$$

где $C > 0$ *не зависит от* $\varepsilon > 0$. *Тогда из последовательности функций* $\{u_\varepsilon(x)\}$ *можно выбрать подпоследовательность такую, что* $u_{\varepsilon'} \overset{2}{\to} u(x,\xi)$ *при* $\varepsilon' \to 0$, $u(x,\xi) \in L_2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(\square))$, *причем* $u(x,\xi) = u(x)$ *при* $\xi \in \square^h$, $u(x) \in H^1(\Omega)$ *и имеет место сходимость* $\chi_{\Omega^h_{\varepsilon'}} \nabla_x u_{\varepsilon'} \overset{2}{\to} \chi_{\square^h}(\nabla_x u(x) + \nabla_\xi u^{(1)}(x,\xi))$ *при* $\varepsilon' \to 0$, *где* $u^{(1)}(x,\xi)$ *— некоторая функция переменных* $x \in \Omega$ *и* $\xi \in \square$, $u^{(1)}(x,\xi) \in L_2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(\square^h))$. *Кроме того* $\varepsilon' \chi_{\Omega^s_{\varepsilon'}} \nabla_x u_{\varepsilon'} \overset{2}{\to} \nabla_\xi u(x,\xi)$ *при* $\varepsilon' \to 0$.

Теоремы 9.1–9.4 представляют собой удобный и эффективный инструмент исследования задач усреднения. Доказательства даны ниже, а сейчас покажем, как применяются эти теоремы на примере задачи усреднения для дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа.

9.2. Два примера. 1. Пусть $u_\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$ — решения задач Дирихле

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{9.1}$$

где $u_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $f(x) \in L_2(\Omega)$. Решение задачи (9.1) мы понимаем, как обычно, в смысле интегрального тождества

$$-\int\limits_\Omega a_{ij}\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_\Omega f(x)v(x)\,dx, \tag{9.2}$$

которое должно выполняться для любой пробной функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Изучим поведение последовательности функций $u_\varepsilon(x)$ с помощью теорем 9.1–9.4. Отметим, что ранее мы уже исследовали эту задачу и получили результат об ее усреднении другими методами. Здесь мы докажем теоремы об усреднении, используя технику двухмасштабной сходимости.

Подставим сначала в качестве пробной функции в интегральное тождество (9.2) функцию вида $\varepsilon\varphi(x)\Phi(x/\varepsilon)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, а $\Phi(\xi)$ — гладкая 1-периодическая по $\xi_1, \ldots, \xi_d$ функция. Получим

$$\begin{aligned} &-\int\limits_\Omega a_{ij}\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}\varphi(x)\,dx - \varepsilon\int\limits_\Omega a_{ij}\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\Phi\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx \\ &= \varepsilon\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\Phi\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\,dx. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Поскольку для решений $u_\varepsilon(x)$ задачи (9.1) справедлива оценка $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C$, где $C > 0$ не зависит от ε, из последовательности $\{u_\varepsilon\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u_{\varepsilon'}\}$ такую, что (теорема 9.2)

$$u_{\varepsilon'} \overset{2}{\to} u(x), \nabla_x u_{\varepsilon'} \overset{2}{\to} \nabla_x u(x) + \nabla_\xi u^{(1)}(x,\xi) \quad \text{при} \quad \varepsilon' \to 0, \tag{9.4}$$

где $u^{(1)}(x,\xi)$ — некоторая функция на $\Omega\times\square$ класса $L_2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(\square))$. Переходя к пределу при $\varepsilon'\to 0$ в интегральном тождестве (9.3), получим

$$\int\limits_{\Omega\times\square} a_{ij}(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)+\frac{\partial}{\partial\xi_i}u^{(1)}(x,\xi)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\varphi(x)\,dx\,d\xi=0 \tag{9.5}$$

для любых Φ и φ. Поскольку $\varphi(x)$ произвольна, из (9.5) следует равенство

$$\int\limits_{\square} a_{ij}(\xi)\frac{\partial u^{(1)}(x,\xi)}{\partial\xi_i}\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial\xi_i}\,d\xi=-\int\limits_{\square} a_{ij}(\xi)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial\xi_i}\,d\xi$$

для любой $\Phi\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$; здесь $x\in\Omega$ играет роль параметра. Определим функции $N^p(\xi)\in H^1_{\mathrm{per}}(\square)$ как решения следующих задач: Найти $N^p(\xi)\in H^1_{\mathrm{per}}(\square)$ такие, что

$$\int\limits_{\square} a_{ij}(\xi)\frac{\partial N^p(\xi)}{\partial\xi_i}\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial\xi_i}\,d\xi=-\int\limits_{\square} a_{ip}(\xi)\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial\xi_i}\,d\xi$$

для любой $\Phi\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$. Существование таких функций следует из леммы Лакса — Мильграма. Функция $u^{(1)}(x,\xi)$ может быть представлена в виде

$$u^{(1)}(x,\xi)=\sum_{p=1}^{d} N^p(\xi)\frac{\partial u(x)}{\partial x_p}. \tag{9.6}$$

Далее подставим в исходное интегральное тождество (9.2) пробную функцию $v(x)\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, не зависящую от ε и ξ, и перейдем к пределу при $\varepsilon'\to 0$, вновь используя теорему 9.2. Получим равенство

$$-\int\limits_{\Omega\times\square} a_{ij}(\xi)\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial u^{(1)}(x,\xi)}{\partial\xi_j}\right)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx\,d\xi=\int\limits_{\Omega} f(x)v(x)\,dx.$$

Подставив в последнее равенство представление (9.6) для функции $u^{(1)}(x,\xi)$ и поменяв порядок интегрирования (сначала интегрируем по ξ, потом — по x), получим

$$-\int\limits_{\Omega}\left\{\int\limits_{\square}\left(a_{ij}(\xi)+\frac{\partial N^j}{\partial\xi_k}a_{ik}(\xi)\right)d\xi\right\}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx=\int\limits_{\Omega} f(x)v(x)\,dx.$$

Обозначая

$$\widehat{a}_{ij}\equiv\int\limits_{\square}\left(a_{ij}(\xi)+\frac{\partial N^j}{\partial\xi_k}a_{ik}(\xi)\right)d\xi,$$

приходим к выводу, что функция $u(x)$ удовлетворяет усредненной краевой задаче, записанной в виде интегрального тождества

$$-\int\limits_{\Omega}\widehat{a}_{ij}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx=\int\limits_{\Omega} f(x)v(x)\,dx\quad\forall\ v(x)\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{9.7}$$

Задача 9.3. Докажите, что функция $u(x)\in H^1(\Omega)$, определенная в (9.4), принадлежит $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Найденные здесь значения коэффициентов усредненного уравнения совпадают со значениями, полученными другими методами в предыдущих параграфах. Ранее уже отмечалось, что $(\widehat{a}_{ij})$ — положительно определенная матрица.

Поскольку решение задачи (9.7x) единственно, к $u(x)$ сходится не только выбранная подпоследовательность $\{u_{\varepsilon'}\}$, но и вся последовательность $\{u_\varepsilon\}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 9.5. *Последовательность решений $u_\varepsilon(x)$ задачи* (9.1) *сходится двухмасштабно к $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ — решению задачи* (9.7); *при этом*

$$\nabla_x u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_x u(x) + \sum_{p=1}^{d} \nabla_\xi N^p(\xi) \frac{\partial u(x)}{\partial x_p}.$$

Заметим, что в приведенных выше рассуждениях мы использовали только теорему 9.2, остальные теоремы "не работали". Однако существует широкий класс задач, в которых активно применяются теоремы 9.1, 9.3, 9.4.

2. В этом примере использованы рукописные материалы, предоставленные В. В. Жиковым (см. также [**55**]).

Пусть F_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — связные открытые периодические множества с липшицевыми границами такие, что $\overline{F}_i \cap \overline{F}_j = \varnothing$. Обозначим $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ и $S = \mathbb{R}^d \backslash F$. Будем называть области F_i *жесткими фазами*, а S — *мягкой фазой*. Положим $F^\varepsilon = \varepsilon F$, $F_j^\varepsilon = \varepsilon F_j$, $S^\varepsilon = \varepsilon S$.

Определим функцию

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{в } F^\varepsilon, \\ \varepsilon^2 & \text{в } S^\varepsilon \end{cases}$$

и рассмотрим в произвольной области Ω задачу Дирихле

$$-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega, \quad u_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \quad f \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

где λ — положительный параметр. Эквивалентная формулировка в виде интегрального тождества имеет вид

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi \, dx + \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi \, dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u_\varepsilon \psi \, dx = \int\limits_{\Omega} f \psi \, dx \tag{9.8}$$

для любой $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, где $\Omega_\varepsilon^h = \Omega \cap F^\varepsilon$, $\Omega_\varepsilon^s = \Omega \cap S^\varepsilon$. Для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ задача (9.8) однозначно разрешима, но поскольку нижняя константа эллиптичности для коэффициентов $a_\varepsilon(x)$ вырождается при $\varepsilon \to 0$, оценка $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} < C$, где постоянная $C > 0$ не зависит от ε, не имеет места. Энергетическая оценка для этой задачи принимает вид (докажите!)

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx + \lambda \int\limits_{\Omega} (u_\varepsilon)^2 \, dx \leqslant C(\lambda) \int\limits_{\Omega} f^2(x) \, dx.$$

Введем функции $\Phi_0(\xi), \Phi_1(\xi), \ldots, \Phi_k(\xi) \in H^1_{\mathrm{per}}(\square \cap S)$, которые являются решениями задач

$$-\Delta_\xi \Phi_0(\xi) + \lambda \Phi_0(\xi) = 1 \quad \text{в } S, \quad \Phi_0(\xi)\big|_{\partial S} = 0,$$
$$-\Delta_\xi \Phi_i(\xi) + \lambda \Phi_i(\xi) = 0 \quad \text{в } S, \quad \Phi_i(\xi)\big|_{\partial F_j} = \delta_{ij}.$$

Определим на F_j 1-периодические функции $N_j^p(\xi)$, $p=1,\dots,d$, $j=1,\dots,k$, принадлежащие $H^1_{\mathrm{per}}(F_j)$ и удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\int\limits_{\square\cap F_j} \bigl(\overline{e}_k+\nabla_\xi N_j^k(\xi)\bigr)\,\nabla_\xi\Psi(\xi)\,d\xi=0 \quad \forall\ \Psi(\xi)\in H^1_{\mathrm{per}}(\square\cap F_j). \tag{9.9}$$

Нам также потребуются вспомогательные функции $E_j(\xi)\in H^1_{\mathrm{per}}(\square\cap S)$, $j=1,\dots,k$, определенные как решения задач

$$\Delta_\xi E_j(\xi)=0 \quad \text{в } S, \quad E_j(\xi)\big|_{\partial F_i}=\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Продолжим функции Φ_j и E_j на $\mathbb{R}^d_\xi$ так, что $\Phi_0\equiv 0$ в $\square\setminus S$, $\Phi_j\equiv 1$ в F_j, $\Phi_j\equiv 0$ в F_i при $j\neq i$; $E_j\equiv 1$ в F_j, $E_j\equiv 0$ в E_i при $j\neq i$. Нетрудно видеть, что $E_1+E_2+\dots+E_k\equiv 1$ в $\mathbb{R}^d$ (докажите!).

Задача 9.4. Докажите (используя обобщенную постановку краевых задач и лемму Лакса — Мильграма) существование и единственность $\Phi_0(\xi)$, $\Phi_i(\xi)$, $E_j(\xi)$.

Обозначим через $\widehat{A}_j$ матрицу с элементами $a^j_{il}\equiv\Bigl\langle\delta_{il}+\frac{\partial N^i_j}{\partial x_l}\Bigr\rangle_{\square\cap F_j}$. Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 9.6. *Для решений $u_\varepsilon(x)$ задачи (9.8) справедливы равенства*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega\cap F_j^\varepsilon}\bigl(u_\varepsilon(x)-u_j(x)\bigr)^2\,dx=0, \quad j=1,\dots,k,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega\cap S^\varepsilon}\Bigl(u_\varepsilon(x)-u_0(x,\frac{x}{\varepsilon})\Bigr)^2\,dx=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega\cap F_j^\varepsilon}\Bigl(\nabla_x u_\varepsilon(x)-\nabla_x u_j(x)-\sum_{k=1}^d\nabla_\xi N_j^k\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(x)\Bigr)^2dx=0$$

(по j суммирование не выполняется, $j=1,\dots,k$), и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\int\limits_{\Omega\cap S^\varepsilon}\Bigl(\nabla_x u_\varepsilon(x)-\nabla_x u_0(x,\xi)\big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon})}\Bigr)^2dx=0,$$

где $u_j(x)$, $j=1,\dots,k$, — решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&-\operatorname{div}(\widehat{A}_j\nabla_x u_j)+\sum_{i=1}^k c_{ji}u_i(x)+\lambda\theta_j u_j(x)+\lambda\sum_{i=1}^k b_{ji}u_i(x)\\&=f(x)\Bigl\{\langle E_j\rangle-\lambda\int\limits_{S\cap\square}E_j(\xi)\Phi_0(\xi)\,d\xi\Bigr\}, \quad j=1,\dots,k,\end{aligned}\tag{9.10}$$

с краевыми условиями

$$u_j=0 \quad \textit{на } \partial\Omega, \quad j=1,\dots,k. \tag{9.11}$$

Здесь

$$c_{ji} = \int\limits_{S\cap\square} (\nabla_\xi E_j(\xi), \nabla_\xi \Phi_i(\xi))\, d\xi \ - \textit{матрица связи},$$

$$b_{ji} = \int\limits_{S\cap\square} E_j(\xi)\Phi_i(\xi)\, d\xi \ - \textit{матрица памяти},$$

$$\theta_j = \langle 1\rangle_{F_j\cap\square} \ - \textit{коэффициент пористости}$$

и $u_0(x,\xi) \equiv \sum\limits_{j=1}^{k} \Phi_j(\xi)u_j(x) + \Phi_0(\xi)f(x)$.

Задача 9.5. Докажите, что коэффициенты матрицы связи c_{ji} удовлетворяют равенству $c_{ij} = c_{ji} = \langle \nabla_\xi E_j, \nabla_\xi E_i\rangle$. Поэтому c_{ij} не зависят от λ.

Замечание 9.1. Можно определить коэффициенты предельной системы (9.10), пользуясь только функциями Φ_j, без использования функций E_j, $j = 1,\dots,k$. В этом случае предельная система принимает вид

$$-\operatorname{div}(\widehat{A}_j\nabla_x u_j) + \sum_{i=1}^{k}\langle\nabla_\xi\Phi_i, \nabla_\xi\Phi_j\rangle u_i(x) + \lambda\theta_j u_j(x) + \lambda\sum_{i=1}^{k}\langle\Phi_i,\Phi_j\rangle u_i(x)$$

$$= f(x)\int\limits_{S\cap\square}\Phi_j(\xi)d\xi, \quad j = 1,\dots,k, \tag{9.12}$$

с краевыми условиями (9.11).

Прежде, чем переходить к доказательству теоремы 9.6, обсудим ее формулировку. Мы рассматриваем задачу усреднения для семейства задач Дирихле с операторами, нижняя постоянная эллиптичности которых не отделена от нуля при $\varepsilon \to 0$, она вырождается как ε^2 на множестве, геометрия которого также зависит от ε. Отказ от условия равномерной эллиптичности приводит к новому интересному явлению: чтобы описать предел решений при $\varepsilon \to 0$, недостаточно одной предельной функции $u_0(x)$, как это было в предыдущем примере: здесь нужно решить систему дифференциальных уравнений для определения функций $u_1(x),\dots,u_k(x)$. Каждая из этих функций описывает предельное поведение решения не во всей области Ω, а только в ее части $\widetilde{F}_j^\varepsilon = F_j^\varepsilon \cap \Omega$, причем эта часть зависит от ε. Очевидно, что $\widetilde{F}_j^\varepsilon \cap \widetilde{F}_i^\varepsilon = \varnothing$, $i \neq j$, но $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\widetilde{F}_i^\varepsilon \neq \Omega$, т.е. в области $\widetilde{S}_\varepsilon = \Omega\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}\widetilde{F}_i^\varepsilon$ ни одна из функций $u_i(x)$, $i = 1,\dots,k$, не приближает решение $u_\varepsilon(x)$.

В области $\widetilde{S}_\varepsilon$ последовательность функций $\{u_\varepsilon(x)\}$ быстро осциллирует. Однако теорема 9.6 позволяет установить величину и характер этих осцилляций, так как указывает в явном виде функцию $u_0(x, x/\varepsilon)$, с которой "сближается" функция $u_\varepsilon(x)$ на $\widetilde{S}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ (см. рис. 9.1).

Важно также отметить, что параметр λ входит в предельную задачу нелинейно (матрица памяти зависит от λ). Поэтому при интерпретации λ как спектрального параметра, появляющегося при преобразовании Лапласа в соответствующей эволюционной задаче, после применения обратного преобразования Лапласа в предельной задаче возникают интегральные операторы, соответствующие среде с "последействием" или "памятью". Это важное явление детально изучалось многими авторами. Оно представляет существенный интерес в связи с рядом прикладных задач, возникающих, в частности, в нефтедобыче (см., например, [**5, 125, 29, 27, 28, 29, 123**]).

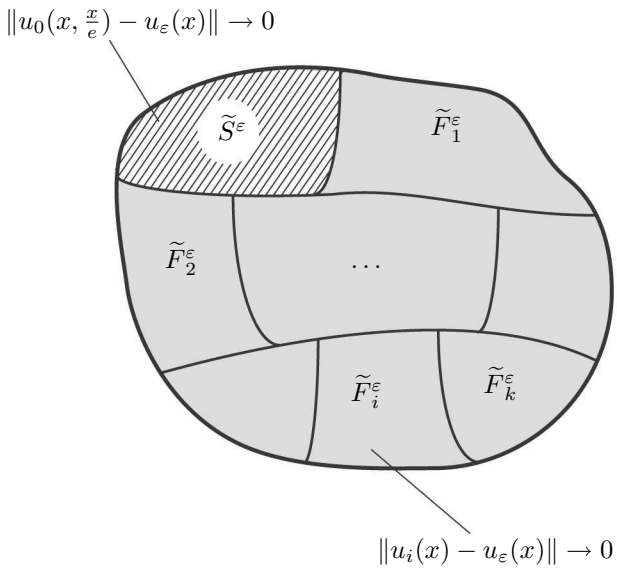

Рис. 9.1

Доказательство теоремы 9.6. Подставив в интегральное тождество (9.8) пробную функцию вида $\psi(x) = E_j(x/\varepsilon)\varphi(x)$, где $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, получим

$$\int\limits_{\widetilde{F}_j^\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla\varphi\, dx + \varepsilon \int\limits_{\widetilde{S}_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla_\xi E_j \varphi\, dx + \varepsilon^2 \int\limits_{\widetilde{S}_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla\varphi E_j\, dx$$
$$+ \lambda \int\limits_{\widetilde{F}_j^\varepsilon} u_\varepsilon \varphi\, dx + \lambda \int\limits_{\widetilde{S}_\varepsilon} u_\varepsilon \varphi E_j\, dx = \int\limits_\Omega f\varphi E_j\, dx. \tag{9.13}$$

Подставляя $\varphi = \varepsilon\Psi(x/\varepsilon)v(x)$, где $\Psi(\xi)$ — гладкая периодическая функция, $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, и переходя к пределу по двухмасштабно сходящейся подпоследовательности $\{u_\varepsilon\}$, получим с помощью теоремы 9.4 равенство

$$\int\limits_{\Omega\times(\square\cap F_j)} [\nabla_x u_j(x) + \nabla_\xi u_j^{(1)}(x,\xi)]\nabla_\xi\Psi(\xi)v(x)\, dx\, d\xi = 0.$$

В силу произвольности $v(x)$

$$\int\limits_{\square\cap F_j} \nabla_\xi u_j^{(1)}(x,\xi)\nabla_\xi\Psi(\xi)\, d\xi = -\nabla_x u_j(x) \int\limits_{\square\cap F_j} \nabla_\xi\Psi(\xi)\, d\xi$$

для почти всех $x \in \Omega$. Следовательно,

$$u_j^{(1)}(x,\xi) = \sum_{p=1}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_p} N_j^p(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in \square \cap F_j, \tag{9.14}$$

где функции $N_j^p(\xi)$ были определены ранее как решения задач (9.9).

Подставим в интегральное тождество (9.13) в качестве пробной функции $\varphi = \Psi(x/\varepsilon)v(x)$, где $\Psi(\xi)$ — 1-периодическая по $\xi_1, \dots, \xi_d$ функция такая, что $\operatorname{supp}\Psi(\xi) \subset \square \cap S$. Переходя к пределу по двухмасштабно сходящейся подпоследовательности $\{u_{\varepsilon'}\}$ и пользуясь теоремой 9.3, получим

$$\int\limits_{\Omega\times(\square\cap S)} \nabla_\xi u(x,\xi)\nabla_\xi E_j(\xi)\Psi(\xi)v(x)\,dx\,d\xi + \int\limits_{\Omega\times(\square\cap S)} \nabla_\xi u(x,\xi)E_j(\xi)\nabla_\xi\Psi(\xi)v(x)\,dx\,d\xi$$
$$+ \lambda \int\limits_{\Omega\times(\square\cap S)} u(x,\xi)E_j(\xi)\Psi(\xi)v(x)\,dx\,d\xi = \int\limits_{\Omega\times(\square\cap S)} E_j f(x)\Psi(\xi)v(x)\,dx\,d\xi.$$

Поскольку $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ — произвольная функция, заключаем, что

$$\int\limits_{\square\cap S} \nabla_\xi u(x,\xi)\nabla_\xi E_j(\xi)\Psi(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\square\cap S} \nabla_\xi u(x,\xi)E_j(\xi)\nabla_\xi\Psi(\xi)\,d\xi$$
$$+ \lambda \int\limits_{(\square\cap S)} u(x,\xi)E_j(\xi)\Psi(\xi)\,d\xi = \Big(\int\limits_{(\square\cap S)} E_j(\xi)\Psi(\xi)\,d\xi\Big) f(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$, или

$$\int\limits_{\square\cap S} \nabla_\xi u(x,\xi)\nabla_\xi \left(E_j(\xi)\Psi(\xi)\right)\,d\xi + \lambda \int\limits_{(\square\cap S)} u(x,\xi)\left(E_j(\xi)\Psi(\xi)\right)\,d\xi$$
$$= \Big(\int\limits_{(\square\cap S)} E_j(\xi)\Psi(\xi)\,d\xi\Big) f(x).$$

Последнее интегральное тождество эквивалентно уравнению

$$-\Delta_\xi u(x,\xi) + \lambda u(x,\xi) = f(x), \quad \xi \in \square \cap S,$$

ввиду произвольности $E_j(\xi)\Psi(\xi)$ в $\square \cap S$ (докажите, что $E_j > 0$ в S !)

Кроме того, поскольку $u(x,\cdot) \in H^1_{\mathrm{per}}(\square)$ при почти всех $x \in \Omega$, должны выполняться краевые условия $u(x,\xi)\big|_{\partial F_j} = u_j(x)$. Отсюда получаем

$$u(x,\xi) = u_0(x,\xi) = \sum_{j=1}^{k} \Phi_j(\xi)u_j(x) + f(x)\Phi_0(\xi), \quad \xi \in \square \cap S, \tag{9.15}$$

где $\Phi_j(\xi)$ и $\Phi_0(\xi)$ определены ранее.

Теперь выберем в интегральном тождестве (9.13) пробную функцию $\varphi = \varphi(x)$ и перейдем к пределу при $\varepsilon' \to 0$ по двухмасштабно сходящейся подпоследовательности. Имеем

$$\int\limits_{\Omega\times(\square\cap F_j)} [\nabla_x u_j(x) + \nabla_\xi u_j^{(1)}(x,\xi)]\nabla_x\varphi(x)\,dx\,d\xi$$
$$+ \int\limits_{\Omega\times(\square\cap S)} \nabla_\xi u(x,\xi)\varphi(x)\nabla_\xi E_j(\xi)\,dx\,d\xi + \lambda \int\limits_{\Omega\times(\square\cap F_j)} u_j(x)\varphi(x)\,dx\,d\xi$$
$$+ \lambda \int\limits_{\Omega\times(\square\cap S)} u(x,\xi)\varphi(x)E_j(\xi)\,dx\,d\xi = \lambda \int\limits_{\Omega\times\square} f(x)\varphi(x)E_j(\xi)\,dx\,d\xi.$$

Подставив в это уравнение полученные ранее представления (9.14) и (9.15), окончательно приходим к равенству

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{div}\int\limits_{\square\cap F_j}\Big(\nabla_x u_j(x)+\frac{\partial u_j}{\partial x_p}\nabla_\xi N_j^p(\xi)\Big)\,d\xi+\sum_{i=1}^{k}\Big(u_i(x)\int\limits_{\square\cap S}\nabla_\xi\Phi_i(\xi)\nabla_\xi E_j(\xi)\,d\xi\Big)\\
&+f(x)\int\limits_{\square\cap S}\nabla_\xi\Phi_0(\xi)\nabla_\xi E_j(\xi)\,d\xi+\lambda\theta_j u_j(x)+\lambda\sum_{i=1}^{k}u_i(x)\int\limits_{\square\cap S}\Phi_i(\xi)E_j(\xi)\,d\xi\\
&+\lambda\Big(\int\limits_{S\cap\square}\Phi_0(\xi)E_j(\xi)\,d\xi\Big)f(x)=f(x)\int\limits_{\square}E_j(\xi)\,d\xi,
\end{aligned}
$$

которое эквивалентно системе (9.10).

Отметим, что в приведенном выводе системы (9.10) можно взять вместо вспомогательных пробных функций E_j функции Φ_j. В этом случае предельная система (9.10) примет вид (9.12).

Мы доказали утверждения теоремы о двухмасштабной сходимости функций $u_\varepsilon(x)$. Для доказательства утверждения о сходимости по норме пространства $L_2(\Omega)$ заметим сначала, что в определении двухмасштабной сходимости в качестве "пробных" можно брать не только функции вида $\varphi(x)\psi(\xi)$, но также функции из более широких классов, например $\Psi(x,\xi)\in C(\Omega\times\square)$ (проверьте!). С другой стороны, произвольная функция из $L_2(\Omega\times\square)$ не подходит в качестве пробной функции. В первую очередь потому, что для произвольной функции $v(x,\xi)\in L_2(\Omega,\square)$ след $v(x,x/\varepsilon)$, вообще говоря, не определен. К тому же известны примеры последовательностей $\{u_\varepsilon(x)\}$, двухмасштабно сходящихся к функции $u_0\in L_2(\Omega\times\square)$, и пробных функций $v(x,\xi)$ из $L_2(\Omega\times\square)$ таких, что

$$
\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\Omega}u_\varepsilon(x)v\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx\neq\int\limits_{\Omega\times\square}u_0(x,\xi)v(x,\xi)\,dx\,d\xi.
$$

Задача 9.6. Пусть для последовательности $\{u_\varepsilon(x)\}$ имеет место оценка $\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C$, где $C>0$ не зависит от ε, и $\{u_\varepsilon(x)\}$ сходится в смысле двухмасштабной сходимости к функции $u(x,\xi)\in L_2(\Omega\times\square)$. Докажите, что

$$
\varliminf_{\varepsilon\to0}\|u_\varepsilon(x)\|^2_{L_2(\Omega)}\geqslant\int\limits_{\Omega\times\square}u^2(x,\xi)\,dx\,d\xi.
$$

Указание. Рассмотрите "сглаженную" функцию $u^\delta(x,\xi)$, близкую к $u(x,\xi)$ по норме пространства $L_2(\Omega\times\square)$ и далее рассмотрите неравенство

$$
\int\limits_{\Omega}\Big(u_\varepsilon(x)-u^\delta\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)^2\,dx\geqslant0.
$$

Задача 9.7. Пусть последовательность функций $\{u_\varepsilon(x)\}$, равномерно ограниченная в $L_2(\Omega)$, сходится двухмасштабно к функции $u(x,\xi)\in C(\overline{\Omega}\times\square)$, и пусть

$$
\lim_{\varepsilon\to0}\|u_\varepsilon(x)\|^2_{L_2(\Omega)}=\int\limits_{\Omega\times\square}u^2(x,\xi)\,dx\,d\xi. \tag{9.16}
$$

Докажите, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|u_\varepsilon(x)-u(x,x/\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)}=0$.

Указание. Перейдите к пределу в интеграле $\int\limits_\Omega (u_\varepsilon(x)-u(x,x/\varepsilon))^2 dx$ при $\varepsilon \to 0$, пользуясь свойствами двухмасштабной сходимости.

Замечание 9.2. Если двухмасштабно сходящаяся последовательность $\{u_\varepsilon(x)\}$ удовлетворяет условию (9.16), то ее называют *сильно двухмасштабно сходящейся* последовательностью.

Согласно задаче 9.7, если сильный двухмасштабный предел $u(x,\xi)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям регулярности (мы требуем непрерывность на $\Omega \times \square$), то $\|u_\varepsilon(x) - u(x,x/\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. в этом случае условие сильной двухмасштабной сходимости можно переформулировать в терминах обычной сходимости по норме пространства $L_2(\Omega)$. Этот факт весьма важен в приложениях, поскольку двухмасштабная сходимость, как и слабая сходимость, не дает полной информации об асимптотической структуре функций u_ε. Эта информация часто бывает очень полезна при описании реальных физических процессов в неоднородных средах.

Заметим также, что требование непрерывности функции $u(x,\xi)$ на $\Omega \times \square$ может быть ослаблено. В действительности нам нужны такие условия на $u(x,\xi)$, при которых сужение $u(x,x/\varepsilon)$ корректно определено в пространстве $L_2(\Omega)$ и удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega u^2\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx = \int\limits_{\Omega\times\square} u^2(x,\xi)\,dx\,d\xi.$$

Здесь часто предполагают выполненным так называемое *условие Каратеодори*: $u(x,\xi) \in L_2(\Omega; C_{\mathrm{per}}(\square))$.

Возвращаясь к доказательству теоремы, продолжим функции N_j^p, первоначально определенные на множествах F_j, на всю ячейку периодичности $\square$ так, чтобы продолжения принадлежали пространству $H^1_{\mathrm{per}}(\square)$ и носитель продолжения лежал в множестве $\overline{F}_j \cup S$. В интегральном тождестве (9.8) положим

$$\psi \equiv \psi_\varepsilon(x) \equiv u\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \varepsilon \sum_{j=1}^k u_j^{(1)}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \delta_\varepsilon^{(1)}(x) + \delta_\varepsilon^{(2)}(x),$$

где

$$u(x,\xi) = \begin{cases} u_0(x,\xi), & \xi \in S, \\ u_j(x), & \xi \in F_j, \quad j = 1,\dots,k, \end{cases}$$

$u_j^{(1)}$ определены формулами (9.14), а $\delta_\varepsilon^{(1)}$ и $\delta_\varepsilon^{(2)}$ — функции типа пограничного слоя в окрестности $\partial\Omega$, обеспечивающие принадлежность $\psi_\varepsilon(x)$ пространству $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, причем $\|\delta_\varepsilon^{(1)}\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и $\|\delta_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \to 0$, $\varepsilon\|\nabla\delta_\varepsilon^{(2)}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\operatorname{supp}\delta_\varepsilon^{(2)} \subset \Omega_\varepsilon^s$. Ниже эти функции будут заданы в явном виде.

Легко проверить, что при поставленных условиях функции $u(x,x/\varepsilon)$ и $u_j^{(1)}(x,x/\varepsilon)$, $j = 1,\dots,k$, принадлежат пространству $H^1(\Omega)$, поэтому ψ_ε может быть взята в качестве пробной функции в (9.8).

Функции $\delta_\varepsilon^{(1)}$, $\delta_\varepsilon^{(2)}$ "подправляют" ненулевые на границе области Ω значения функций $\varepsilon \sum\limits_{j=1}^k u_j^{(1)}$ и $f\Phi_0$, делая сумму нулевой на $\partial\Omega$. В качестве

$\delta_\varepsilon^{(1)}(x)$ и $\delta_\varepsilon^{(2)}(x)$ можно выбрать функции

$$\delta_\varepsilon^{(1)}(x) = -\varepsilon\Big[\sum_{j=1}^{k} u_j^{(1)}(x, x/\varepsilon)\Big]\gamma\Big(\frac{\rho(x)}{\varepsilon}\Big),$$
$$\delta_\varepsilon^{(2)}(x) = -f(x)\Phi_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\gamma\Big(\frac{\rho(x)}{\varepsilon}\Big),$$

где $\rho(x)$ — расстояние от точки x до границы области Ω, а $\gamma(s) \geqslant 0$ — функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R})$, равная 1 в окрестности нуля.

Задача 9.8. Проверьте, что так определенные функции $\delta_\varepsilon^{(1)}$ и $\delta_\varepsilon^{(2)}$ действительно удовлетворяют указанным выше условиям.

Перейдем в интегральном тождестве (9.8) к пределу при $\varepsilon \to 0$, выбрав в качестве пробной функции $\psi_\varepsilon(x)$. На основании равенства

$$\nabla_x \psi_\varepsilon(x) = \nabla_x u_j(x) + \nabla_\xi u_j^{(1)}\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) + \text{“добавки”} \quad (x \in F_\varepsilon^j)$$

и предельных соотношений

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x,\xi), \quad \chi_{\Omega\cap S^\varepsilon}(x)\varepsilon\nabla u_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \nabla_\xi u(x,\xi),$$
$$\chi_{\Omega\cap F_\varepsilon^j}(x)(\nabla u_\varepsilon(x)) \xrightarrow{2} (\nabla_x u_j(x) + \nabla_\xi u_j^{(1)}(x,\xi))\chi_{F_j}(\xi)$$

с учетом того, что $u(x,\xi)$ и $u_j^{(1)}(x,\xi)$ — непрерывные кусочно-гладкие функции, получим

$$\int\limits_{\Omega\times(\square\cap S)} |\nabla_\xi u_0(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi + \sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\Omega\times(\square\cap F_j)} |\nabla_x u_j(x) + \nabla_\xi u_j^{(1)}(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi$$
$$+ \lambda\int\limits_{\Omega\times\square} u^2(x,\xi)\,dx\,d\xi = \int\limits_{\Omega\times\square} f(x)u(x,\xi)\,dx\,d\xi. \tag{9.17}$$

С другой стороны, переходя к пределу по произвольной сходящейся подпоследовательности в равенстве

$$\varepsilon^2\int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \lambda\int\limits_{\Omega} (u_\varepsilon)^2 dx = \int\limits_{\Omega} f u_\varepsilon dx$$

(вытекающим из (9.8) при $\psi = u_\varepsilon$), получим

$$\varepsilon^2\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\,dx + \lambda\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} (u_\varepsilon(x))^2\,dx$$
$$= \int\limits_{\Omega\times\square} f(x)u_0(x,\xi)\,dx\,d\xi. \tag{9.18}$$

Поскольку все слагаемые в левых частях (9.17) почленно не больше соответствующих слагаемых в (9.18), находим

$$\varepsilon^2 \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\,dx = \int\limits_{\Omega\times(\square\cap S)} |\nabla u_0(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\,dx = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\Omega\times(\square\cap F_j)} |\nabla_x u_j(x) + \nabla_\xi u_j^{(1)}(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} (u_\varepsilon(x))^2\,dx = \int\limits_{\Omega\times\square} (u(x,\xi))^2\,dx\,d\xi.$$

На основании результата задачи 9.7 (заметим, что при $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ функции $u(x,\xi)$, $u_j^{(1)}(x,\xi)$ непрерывны) получаем утверждение теоремы. $\square$

9.3. Доказательство теорем Нгуетсенга.

Доказательство теоремы 9.1. Согласно условию теоремы $\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C$. Для любой функции $\psi(x,\xi) \in C_{\rm per}(\overline{\Omega},\square)$, где $C_{\rm per}(\overline{\Omega},\square)$ — пространство непрерывных 1-периодических по ξ функций на $\overline{\Omega}\times\square$, имеем

$$\left|\int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx\right| \leqslant C\|\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|\psi(x,\xi)\|_{C_{\rm per}(\overline{\Omega},\square)},$$

при этом $C_{\rm per}(\overline{\Omega},\square)$ — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\psi\| = \sup|\psi(x,\xi)|$, где супремум берется по всем $x\in\Omega$, $\xi\in\square$. Таким образом, при фиксированном ε интеграл в левой части последнего неравенства представляет собой линейный непрерывный функционал μ_ε на $C_{\rm per}(\overline{\Omega},\square)$:

$$\langle\mu_\varepsilon,\psi\rangle = \int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx.$$

Следовательно, из μ_ε можно выбрать подпоследовательность $\mu_{\varepsilon'}$ такую, что $\mu_{\varepsilon'}\to\mu_0$ при $\varepsilon'\to 0$ в слабой топологии пространства $C_{\rm per}(\overline{\Omega},\square)$, т.е. для любой $\psi\in C_{\rm per}(\overline{\Omega},\square)$ имеем $\langle\mu_{\varepsilon'},\psi\rangle\to\langle\mu_0,\psi\rangle$ или

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx = \langle\mu_0,\psi\rangle.$$

Задача 9.9. Пусть $\psi(x,\xi)$ — непрерывная на $\overline{\Omega}\times\square$ функция, 1-периодическая по ξ. Докажите, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|\psi(x,x\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)} = \|\psi(x,\xi)\|_{L_2(\Omega\times\square)}$.

Ввиду задачи 9.9 $\langle\mu_0,\psi\rangle \leqslant C\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|\psi(x,x/\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)} = C\|\psi(x,\xi)\|_{L_2(\Omega\times\square)}$. Поскольку $C_{\rm per}(\overline{\Omega},\square)$ плотно в $L_2(\Omega\times\square)$, в силу последней оценки можно продолжить μ_0 на $L_2(\Omega\times\square)$ как непрерывный функционал. По теореме Рисса существует функция $u(x,\xi)\in L_2(\Omega\times\square)$ такая, что

$$\langle\mu_0,\psi\rangle = \int\limits_{\Omega\times\square} u(x,\xi)\psi(x,\xi)\,dx\,d\xi, \quad u(x,\xi)\in L_2(\Omega\times\square).$$

Теорема 9.1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 9.2. По теореме 9.1 и условию $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C$ существует вектор–функция $\chi_0(x,\xi)$ такая, что по подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$ имеет место сходимость

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} \int\limits_\Omega \Big(\nabla u_{\varepsilon'}(x), \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon'}\Big)\Big)\, dx = \int\limits_{\Omega\times\square} \chi_0(x,\xi)\psi(x,\xi)\, dx\, d\xi \tag{9.19}$$

для любой вектор–функции $\psi(x,\xi) \in (C_0^\infty(\Omega, C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)))^d$ (здесь и далее обозначаем через $C_0^\infty(\Omega, C^\infty_{\mathrm{per}}(\square))$ пространство бесконечно гладких в $\Omega\times\square$ функций, 1-периодических по ξ и финитных в Ω). Интегрируя по частям, получаем

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \Big(\nabla u_\varepsilon(x), \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\, dx = -\int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\Big[\mathrm{div}_\xi \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) + \varepsilon \mathrm{div}_x \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] dx. \tag{9.20}$$

Поскольку левая часть и второе слагаемое в правой части этого равенства сходятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\mathrm{div}_\xi \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\, dx = 0$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega\times\square} u_0(x,\xi)\mathrm{div}_\xi \psi(x,\xi)\, dx\, d\xi = 0,$$

где $u_0(x,\xi)$ — двухмасштабный предел семейства $\{u_\varepsilon\}$ по некоторой подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$, существование которой обеспечивается теоремой 9.1. Ввиду произвольности выбора $\psi(x,\xi)$ из предыдущего равенства следует, что

$$\int\limits_\square u_0(x,\xi)\, \mathrm{div}\, \Psi(\xi)\, d\xi = 0 \quad \text{при п.в. } x \in \Omega$$

для любой $\Psi(\xi) \in (C^\infty_{\mathrm{per}}(\square))^d$. Покажем, что u_0 не зависит от ξ. Для этого определим обобщенную функцию, действующую в пространстве $C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$ по формуле

$$\langle \overline{F}, \Phi\rangle = \int\limits_\square u_0(x,\xi)\Phi(\xi)\, d\xi.$$

Тогда

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_k}\overline{F}, \Phi\Big) = -\int\limits_\square u_0(x,\xi)\, \Big(\frac{\partial}{\partial\xi_k}\Phi(\xi)\Big)\, d\xi = 0.$$

Следовательно, обобщенные производные $u_0(x,\xi)$ по переменным $\xi_1,\dots,\xi_d$ равны нулю. Поэтому $u_0(x,\xi) = u(x) \in L_2(\Omega)$. Пусть пробная вектор–функция $\psi(x,\xi)$ такова, что $\mathrm{div}_\xi\, \psi(x,\xi) = 0$. Тогда

$$\int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\mathrm{div}_x \psi(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon} dx \to -\int\limits_{\Omega\times\square} (\chi_0(x,\xi), \psi(x,\xi))\, dx\, d\xi$$

при $\varepsilon \to 0$, что вытекает из (9.19) и (9.20).

С другой стороны,

$$\int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\mathrm{div}_x \psi(x,\xi)\, dx \to \int\limits_{\Omega\times\square} u_0(x)\mathrm{div}_x \psi(x,\xi)\, dx\, d\xi$$

при $\varepsilon \to 0$. Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega\times\square} (\chi_0(x,\xi),\psi(x,\xi))\,dx\,d\xi = \int\limits_{\Omega\times\square} u_0(x)\mathrm{div}_x\psi(x,\xi)\,dx\,d\xi$$

для любой $\psi(x,\xi)$ такой, что $\mathrm{div}_\xi\psi(x,\xi)=0$. Из последнего соотношения следует, что $u_0(x)\in H^1(\Omega)$. В самом деле, это соотношение можно рассматривать как определение "действия" функции $u_0(x)$ на производные от пробных функций. Из него нетрудно получить оценку (проверьте!)

$$\left|\int\limits_\Omega u_0(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant C\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}, \quad i=1,\dots,d,$$

что влечет принадлежность $u_0(x)$ пространству $H^1(\Omega)$. Интегрируя по частям в правой части последнего равенства, получим

$$\int\limits_{\Omega\times\square} \left(\left[\chi_0(x,\xi)-\nabla_x u_0(x)\right],\psi(x,\xi)\right)dx\,d\xi = 0.$$

Мы видим, что вектор–функция $\chi_0(x,\xi)-\nabla_x u_0(x)$ ортогональна в $(L_2(\square))^d$ подпространству вектор–функций $\Psi(\xi)$, удовлетворяющих условию $\mathrm{div}_\xi\Psi(\xi)=0$. Поэтому существует функция $u_j^{(1)}(x,\xi)\in L^2(\Omega,H^1_{\mathrm{per}}(\square))$ такая, что $\nabla_\xi u_j^{(1)}(x,\xi)=\chi_0(x,\xi)-\nabla_x u_0(x)$ при почти всех $x\in\Omega$. Существование $u_j^{(1)}(x,\xi)$ доказывается так же, как и в п. 4.2 при доказательстве теоремы де Рама. Однако в случае, когда исследуемые функции заданы на торе, можно существенно упростить доказательство существования потенциала, используя разложение рассматриваемых функций в ряды Фурье. Тогда задача об определении "потенциала" вектора $\overline{v}(\xi)$, ортогонального всем соленоидальным векторам, сведется к алгебраической задаче определения коэффициентов A_n в разложении $V(\xi)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^d\setminus 0} A_n e^{i(\xi,n)}$ искомого потенциала $V(x)$ такого, что $\nabla V=\overline{v}(\xi)$ в $\square$ (проверьте!). Кроме того, легко проверяется оценка $\|V\|_{H^1(\square)}\leqslant C\|\overline{v}\|_{L_2(\square)}$ (неравенство Пуанкаре на торе), где постоянная $C>0$ не зависит от $\overline{v}(\xi)$.

По теореме Фубини функция $\|\overline{\chi}_0(x,\xi)-\nabla_x u_0(x)\|_{L_2(\square)}$ квадратично интегрируема по $x\in\Omega$, поэтому $u_j^{(1)}(x,\xi)\in L_2(\Omega,H^1(\square))$. $\square$

Доказательство теоремы 9.3. Поскольку последовательность $\varepsilon\nabla u_\varepsilon$ равномерно ограничена в $L_2(\Omega)$, по теореме 9.1 из нее можно выбрать подпоследовательность $\{\varepsilon'\}$ (штрих при ε мы в дальнейшем опускаем) такую, что для любой пробной функции $\psi(x,\xi)$

$$\int\limits_\Omega \varepsilon\nabla u_\varepsilon\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx \to \int\limits_{\Omega\times\square}\chi(x,\xi)\psi(x,\xi)\,dx\,d\xi \tag{9.21}$$

при $\varepsilon\to 0$, где $\chi(x,\xi)$ — некоторая функция из $L_2(\Omega\times\square)$. С другой стороны, интегрируя по частям в левой части (9.21), получаем

$$\int\limits_\Omega u_\varepsilon\left(\mathrm{div}_\xi\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)+\varepsilon\mathrm{div}_x\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right)dx \to \int\limits_{\Omega\times\square} u_0(x,\xi)\mathrm{div}_\xi\psi(x,\xi)\,dx\,d\xi$$

при $\varepsilon \to 0$, где $u_0(x,\xi)$ — двухмасштабный предел $\{u_\varepsilon(x)\}$. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega\times\square} (\chi(x,\xi) - \nabla_\xi u_0(x,\xi))\,\psi(x,\xi)\,dx\,d\xi = 0 \quad \forall\ \psi(x,\xi),$$

откуда следует утверждение теоремы 9.3. Заметим, что последнее равенство может быть обосновано методами теории обобщенных функций так же, как при доказательстве теоремы 9.2. □

Доказательство теоремы 9.4. Согласно теореме 9.1 из последовательности $\{u_\varepsilon\}$ можно выделить двухмасштабно сходящуюся подпоследовательность $\{u_{\varepsilon'}\}$ такую, что $u_{\varepsilon'}(x) \overset{2}{\to} u_0(x,\xi)$ (в дальнейшем штрих при ε будем опускать). Определим функции $z_\varepsilon^i(x) \in L_2(\Omega)$ по формуле

$$z_\varepsilon^i(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} & \text{в } \square^h, \\ 0 & \text{в } \square^s. \end{cases}$$

Тогда для любой $v \in L_2(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega z_\varepsilon^i v\,dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} v\,dx. \tag{9.22}$$

На основании теоремы 9.1 из последовательности $\{z_\varepsilon^i\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{\varepsilon'}^i\}$ (штрих будем опускать) такую, что

$$\int\limits_\Omega z_\varepsilon^i w^\varepsilon \varphi\,dx \to \int\limits_{\Omega\times\square^h} z^i(x,\xi) w(\xi)\varphi(x)\,dx\,d\xi, \tag{9.23}$$

где $z^i(x,\xi) \in L_2(\Omega\times\square)$, $w^\varepsilon = w(x/\varepsilon)$, $w(\xi) \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$. Выбирая пробные функции $w(\xi)$ с носителем в $\square^s$, убеждаемся, что $z^i(x,\cdot) = 0$ вне $\square^h$.

Подставим в (9.22) в качестве пробной функции $v = \varepsilon w^\varepsilon \varphi$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} w(\xi) \in \square^h$. Интегрируя по частям, находим

$$\varepsilon \int\limits_\Omega z_\varepsilon^i w^\varepsilon \varphi\,dx = -\int\limits_\Omega u_\varepsilon \frac{\partial w}{\partial \xi_i}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\varphi\,dx - \varepsilon \int\limits_\Omega u_\varepsilon w^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx. \tag{9.24}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\int\limits_{\Omega\times\square} u_0(x,\xi)\frac{\partial w}{\partial \xi_i}(\xi)\varphi(x)\,dx\,d\xi = 0 \quad \forall\ w(\xi) \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square),\ \ \operatorname{supp} w \in \square^h.$$

Отсюда в силу связности E следует, что $u_0(x,\xi) = u(x)$, если $\xi \in \square^h$.

Задача 9.10. Докажите, что $u \in H^1(\Omega)$.

Указание. Пусть $\overline{\psi}(x,\xi) = (\varphi(x)\Phi_1(\xi), \dots, \varphi(x)\Phi_d(\xi))$, $\operatorname{supp}\overline{\psi}(x,\cdot) \in \square^h$ при всех $x \in \Omega$, $\operatorname{div}_\xi \overline{\psi}(x,\xi) = 0$. Положим

$$\overline{\zeta} \equiv \int\limits_{\square^h} \overline{\Phi}(\xi)\,d\xi, \quad \overline{\Phi}(\xi) = (\Phi_1(\xi), \dots, \Phi_d(\xi).$$

Тогда имеет место формула (проверьте!)

$$\int\limits_\Omega u(x)(\nabla\varphi(x), \overline{\zeta})dx = -\int\limits_{\Omega\times\square^h} \big(\overline{z}(x,\xi), \overline{\psi}(x,\xi)\big)\,dx\,d\xi,$$

где $\overline{z}(x,\xi) = (z^1(x,\xi),\dots,z^d(x,\xi))$ — двухмасштабный предел последовательности вектор–функций

$$\overline{z}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \nabla u_\varepsilon(x), & x \in \Omega^h_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega^s_\varepsilon, \end{cases}$$

$u_0(x,\xi) = u(x)$ при $\xi \in \square^h$, $u_0(x,\xi)$ — двухмасштабный предел последовательности функций $u_\varepsilon(x)$.

Последнее равенство определяет "действие" обобщенной функции $\nabla u(x)$ на гладкие финитные функции; $u(x) \in H^1(\Omega)$, если вектор $\overline{\zeta} \in \mathbb{R}^d$ может быть выбран произвольным, что возможно благодаря связности множества E (этот вопрос уже обсуждался в §8.

Докажем, что $z^i(x,\xi)$ допускает представление при $x \in \Omega$, $\xi \in \square^h$

$$z^i(x,\xi) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi_i}(x,\xi), \tag{9.25}$$

где $u^{(1)}(x,\xi) \in L_2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(\square^h))$. Обозначим, как и выше, через $\overline{z}(x,\xi)$ вектор–функцию с компонентами $z^1,\dots,z^d$. Пусть $\overline{w}(\xi)$ — вектор–функция из $H^1(\square^h)$ с носителем в $\square^h$ такая, что $\operatorname{div}_\xi \overline{w}(\xi) = 0$. Тогда из (9.24) следует

$$\int\limits_\Omega (\overline{z}_\varepsilon, \overline{w}^\varepsilon)\varphi\,dx = -\int\limits_\Omega u_\varepsilon(\overline{w}^\varepsilon, \nabla_x\varphi)\,dx.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ на основании свойств двухмасштабной сходимости, получим

$$\int\limits_\Omega \biggl(\int\limits_{\square^h} (\overline{z}(x,\xi), \overline{w}(\xi))\,d\xi\biggr)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_\Omega u(x)\biggl(\int\limits_{\square^h} \overline{w}(\xi)\,d\xi\biggr)\nabla_x\varphi(x)\,dx$$

или, учитывая принадлежность $u(x)$ пространству $H^1(\Omega)$,

$$\int\limits_{\Omega\times\square^h} [(\overline{z}(x,\xi) - \nabla_x u), \overline{w}(\xi)]\varphi(x)\,dx\,d\xi = 0.$$

В силу произвольности $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ при почти всех $x \in \Omega$

$$\int\limits_{\square^h} (\overline{z} - \nabla_x u)\overline{w}(\xi)\,d\xi = 0$$

для любой $\overline{w}(\xi) \in L_2(\square^h)$ такой, что $\operatorname{div}\overline{w} = 0$. Поэтому для почти всех $x \in \Omega$ существует функция $u^{(1)}(x,\xi) \in H^1_{\mathrm{per}}(\square^h)$ такая, что $\nabla_\xi u^{(1)}(x,\xi) = \overline{z} - \nabla_x u(x)$. Выбрав при каждом x аддитивную константу таким образом, что $\int\limits_{\square^h} u^{(1)}(x,\xi)d\xi = 0$, на основании неравенства Пуанкаре имеем $\|u^{(1)}\|_{L_2(\square^h)} \leqslant C\|\overline{z} - \nabla_x u\|_{L_2(\square^h)}$. Отсюда $u^{(1)}_j(x,\xi) \in L_2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(\square^h))$. □

Задача 9.11. Докажите, что $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, если $u_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Указание. С помощью предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ докажите равенство

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx = -\int\limits_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx \quad \forall\ \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

которое влечет требуемое включение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

§ 10. Усреднение тонких структур и сингулярных мер

Вопросам асимптотического поведения тонких структур, таких как оболочки, пластины, тонкие пленки, стержневые конструкции и т.п., уделяется много внимания как в математической, так и в физической и механической литературе. Как правило, целью такого асимптотического анализа является понижение размерности, т.е. сведéние исходной задачи к задаче на структуре меньшей размерности. Например, уравнение в тонкой трехмерной пластине заменяется уравнением в двумерной области, система, описывающая стержневую конструкцию, сводится к совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений и т.д.

Обычно редуцированная система оказывается проще, особенно с точки зрения численного моделирования. Действительно, уменьшение числа переменных существенно снижает объем вычислений. Разумеется, процедура понижения размерности требует строгого обоснования, в случае задач усреднения тонких структур возникает также вопрос о коммутативности соответствующей диаграммы. Асимптотические методы для таких задач описаны в литературе, однако, как правило, они могут применяться лишь при весьма существенных ограничениях на геометрию и гладкость структуры. Имеется обширная механическая литература по данному предмету, где на физическом уровне строгости были получены асимптотики для различных конкретных моделей.

С математической точки зрения представляет большой интерес построение общей теории усреднения периодических мер, включая сингулярные, частично сингулярные меры, а также меры,сходящиеся к сингулярным. Попытки создания такой теории были предприняты в работах [**53, 54, 31, 55, 32**]. В этом параграфе, следуя этим и более поздним работам, мы определим пространства Соболева с произвольной мерой, введем сходимость в переменных пространствах, придадим смысл уравнениям в пространствах с мерой. Будет дано естественное достаточное условие существования усредненного оператора и справедливости теоремы усреднения (так называемая связность или эргодичность меры). При выполнении этого условия метод двухмасштабной сходимости будет адаптирован к рассматриваемым задачам.

Поясним идею введения пространства Соболева с мерой на простом примере. Пусть μ — положительная конечная борелевская мера в гладкой ограниченной области G. Рассмотрим вариационную задачу

$$\inf_{\varphi\in C_0^\infty(G)}\int\limits_G \big(a(x)\nabla\varphi(x)\cdot\nabla\varphi(x)+\varphi^2(x)-2f(x)\varphi(x)\big)d\mu(x),$$

где $a(x)$ — непрерывная в $\overline{G}$ положительно определенная матрица коэффициентов, $f(x)$ — непрерывная в $\overline{G}$ заданная функция. Мы хотим так определить пространство Соболева с мерой μ, чтобы в нем достигался минимум в вариационной задаче, и функция, на которой достигается минимум, могла быть найдена как решение соответствующего уравнения Эйлера.

10.1. Пространства с мерой.

10.1.1. *Пространства Соболева.* Пусть $\mu(x)$ — положительная конечная борелевская мера на стандартном n-мерном торе $\mathbb{T}^n\equiv\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. В дальнейшем будем отождествлять ее с соответствующей периодической мерой в $\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности можем считать, что $\int\limits_{\mathbb{T}^n} d\mu(x)=1$.

Напомним, что $L^2(\mathbb{T}^n, d\mu)$ — это пространство измеримых по Борелю функций $g(x)$ таких, что $\int\limits_{\mathbb{T}^n} g^2(x)d\mu(x) < \infty$. Это пространство гильбертово относительно скалярного произведения

$$(g_1, g_2) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} g_1(x)g_2(x)d\mu(x), \quad g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{T}^n, d\mu).$$

Определим теперь пространство Соболева с мерой μ.

Определение 10.1. Будем говорить, что функция $u \in L^2(\mathbb{T}^n, d\mu)$ принадлежит пространству $H^1(\mathbb{T}^n, d\mu)$, если найдутся вектор–функция $z \in (L^2(\mathbb{T}^n, d\mu))^n$ и последовательность $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ такие, что

$$\varphi_k \longrightarrow u \ \text{ в } L^2(\mathbb{T}^n, d\mu), \quad \nabla\varphi_k \longrightarrow z \ \text{ в } (L^2(\mathbb{T}^n, d\mu))^n \quad \text{при } k \to \infty.$$

Функцию $z(x)$ называют *градиентом* или *μ-градиентом* функции $u(x)$ и обозначают $z = \nabla^\mu u$.

Аналогично определяются пространства $H^1(\mathbb{R}^n, d\mu)$ и $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, d\mu)$, а также пространство $H^1(G, d\mu)$ для произвольной области $G \subset \mathbb{R}^n$ и (локально) конечной борелевской меры μ в G.

Отметим, что градиент функции класса $H^1(\mathbb{T}^n, \mu)$. вообще говоря, не единствен. В частности, нулевая функция может иметь нетривиальный градиент. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 10.1. В квадрате $[-1/2, 1/2]^2$ рассмотрим сегмент $\{-1/4 \leqslant x_1 \leqslant 1/4, \ x_2 = 0\}$ и определим меру $\mu(x)$ как удвоенную меру Лебега на этом сегменте:

$$d\mu = 2\chi(x_1)\, dx_1 \times \delta(x_2), \tag{10.1}$$

где $\chi(t)$ — характеристическая функция отрезка $[-1/4, 1/4]$ и $\delta(t)$ — масса Дирака, сконцентрированная в нуле. Пусть $\psi(x)$ — гладкая функция с носителем в окрестности сегмента, и пусть в достаточно малой окрестности сегмента $\psi(x)$ совпадает с функцией вида $\theta(x_1)x_2$. Поскольку $\psi = 0$ на носителе меры μ, $\psi = 0$ как элемент пространства $L_2(\mathbb{T}^2, \mu)$. В определении 10.1 выберем $\varphi_k(x) = \psi(x)$ при всех k. Тогда $z(x) = \nabla^\mu\psi(x) = (0, \theta(x_1))$. Таким образом, любая вектор-функция вида $(0, \theta(x_1))$ с гладкой $\theta(s)$ служит μ-градиентом нулевой функции. В действительности это утверждение справедливо для любой $\theta(s) \in L_2$ (докажите!).

Задача 10.1. Докажите, что множество градиентов нуля образует замкнутое подпространство пространства $(L_2(\mathbb{T}^n, \mu))^n$. Множество градиентов любой функции из $H^1(\mathbb{T}^n, \mu)$ представляет собой сумму одного из ее градиентов и множества градиентов нуля.

Подпространство градиентов нуля будем обозначать $\Gamma_\mu(0)$.

Задача 10.2. Докажите, что множество пар вида $\{(u, z)\}$, $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$, $z = \nabla^\mu u$, образует замкнутое в $(L^2(\mathbb{R}^n, \mu))^{n+1}$ подпространство. Если $u_k \to u_0$ при $k \to \infty$ в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, и $z_k = \nabla^\mu u_k \to z_0$ в $(L^2(\mathbb{R}^n, \mu))^n$, то $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$, и $z_0 = \nabla^\mu u_0$.

Это подпространство, которое понадобится ниже, обозначим H:

$$H(\mathbb{R}^n, \mu) = \{(u, z) : u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu), \ z = \nabla^\mu u)\}. \tag{10.2}$$

Пространство $H(\mathbb{T}^n, \mu)$ определяется аналогично.

Пример 10.2 (сегмент, рис. 10.1). Изучим вид пространства $H^1(\mathbb{T}^n, \mu)$ (или пространства $H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$), когда μ — одномерная мера Лебега на сегменте I. Без ограничения общности можно считать, что $I = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_1 \leqslant a, x_2 =$

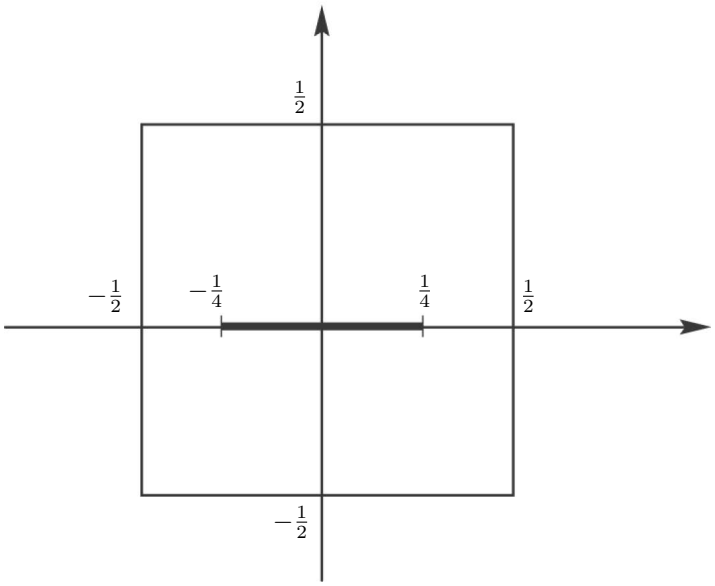

Рис.10.1

Предложение 10.1. *Пространство $H^1(\mathbb{T}^n, \mu)$ состоит из всех борелевских функций $u(x)$ таких, что $u(s, 0, 0, \ldots, 0) \in H^1(0, a)$. При этом $\nabla^\mu u(x) = (u'_{x_1}(x_1, 0), \psi_2(x_1), \ldots, \psi_n(x_1))$, где $u'_{x_1} \equiv \dfrac{d}{ds} u(s, 0, 0, \ldots, 0)|_{s=x_1}$, и $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$ — произвольные функции класса $L_2(0, a)$.*

Замечание 10.1. Поскольку мера μ дополнения к сегменту I равна нулю, функцию u как элемент пространства $L_2(\mathbb{T}^n, \mu)$ достаточно задать только на сегменте I.

Задача 10.3. Докажите предложение 10.1.

Приведем еще несколько примеров, в которых нетрудно описать структуру пространства $H^1(\mathbb{T}^n, \mu)$. Доказательства соответствующих утверждений мы оставляем читателю.

Пример 10.3 (еж, рис. 10.2). Рассмотрим сегменты I_1, I_2, I_N, начинающиеся в начале координат, с направляющими векторами v_1, $v_2, \ldots, v_N$, причем $\dfrac{v_i}{|v_i|} \neq \dfrac{v_j}{|v_j|}$ при $i \neq j$. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ — стандартные одномерные меры Лебега на сегментах $I_1, \ldots, I_N$ соответственно, и $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — произвольные положительные числа. Определим меру μ равенством $\mu = \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j \mu_j$.

Задача 10.4. Покажите, что борелевская функция $u(x)$ принадлежит пространству $H^1(\mathbb{T}^n, \mu)$ тогда и только тогда, когда ее сужение на каждый из сегментов I_j является H^1-функцией одной переменной, и вдоль всех

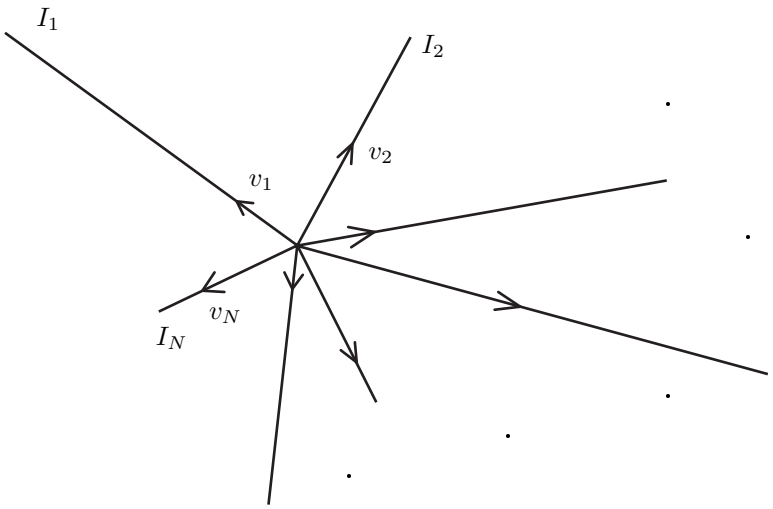

Рис. 10.2

сегментов значения в нуле совпадают (напомним, что H^1-функция одной переменной непрерывна).

Пример 10.4 (армированные пленки, рис. 10.3). Пусть сегмент I и мера μтакие же, как в примере 10.2, и пусть dx — стандартная мера Лебега на двумерном торе $\mathbb{T}^2$. Определим меру $\widetilde{\mu}$ на $\mathbb{T}^2$ равенством $d\widetilde{\mu}(x) = d\mu(x)+dx$.

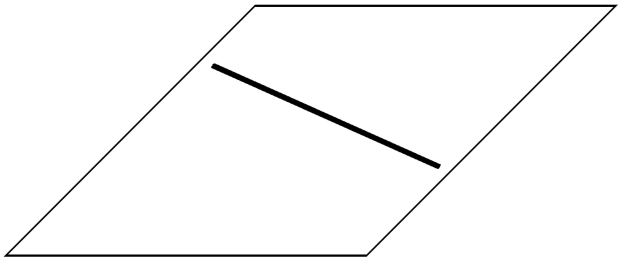

Рис. 10.3

Задача 10.5. Докажите, что борелевская функция $u(x)$ принадлежит пространству $H^1(\mathbb{T}^2, \widetilde{\mu})$ тогда и только тогда, когда $u \in H^1(\mathbb{T}^2)$, и сужение (след) $u(x)$ на сегмент I является H^1-функцией одной переменной.

Замечание 10.2. Отметим, что в отличие от двумерного случая, в размерностях 3 и выше след H^1-функции на одномерном сегменте не определен, поэтому пространство $H^1(\mathbb{T}^n, \widetilde{\mu})$, $n \geqslant 3$, изоморфно прямой сумме пространств $H^1(\mathbb{T}^n)$ и $H^1(\mathbb{T}^n, \mu)$ (докажите!).

Пример 10.5 (сочленение, рис. 10.4). Пусть $G = [-1/8, 1/8]^3$,

$$\Pi = \{x \in [-1/2, 1/2]^3 : x_3 = 0, (x_1, x_2) \in [0, 3/8] \times [-1/8, 1/8]\},$$

$$I = \{x \in [-1/2, 1/2]^3 : x_3 = x_2 = 0,\ 1/4 \leqslant x_1 \leqslant 1/2g\},$$

μ_1 — стандартная мера Лебега на сегменте I, μ_2 — плоская мера Лебега на Π и dx — объемная мера Лебега в кубе G. Определим меру

$$d\mu(x) = d\mu_1(x) + d\mu_2(x) + dx.$$

Отметим, что для функции класса $H^1(G)$ ее след на $G \cap \Pi$ определен и является элементом пространства $H^{1/2}(\Pi)$. След функции класса $H^1(\Pi)$ на сегменте $\Pi \cap I$ также корректно определен.

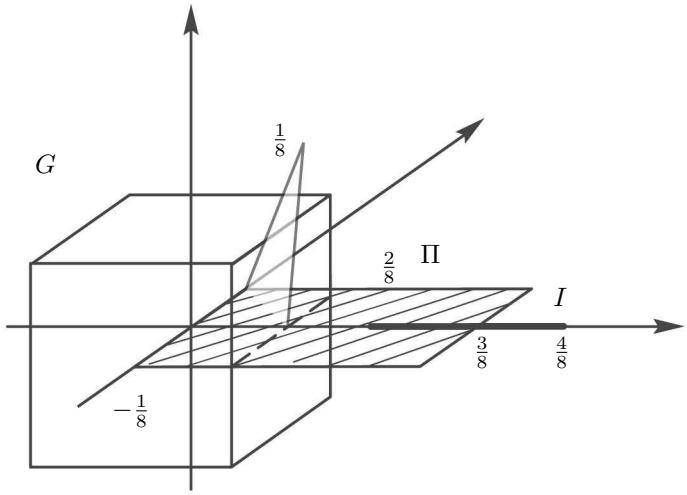

Рис. 10.4

Задача 10.6. Опишите структуру пространства $H^1(\mathbb{T}^3, \mu)$.

10.1.2. *Сходимость в переменных пространствах.* В задачах усреднения в пространствах с мерой мы будем иметь дело с семейством мер, получаемых масштабированием (а иногда еще и сглаживанием) заданной периодической меры. В связи с этим мы переходим к определению сходимости последовательности функций в переменных пространствах.

Пусть последовательность мер μ_k, $k = 1, 2 \ldots$, заданных в $\mathbb{R}^n$ (либо в ограниченной области G), сходится слабо к мере μ при $k \to \infty$.

Определение 10.2. Будем говорить, что последовательность функций $\{g_k\}$, $g_k \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_k)$, *сходится слабо* в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_k)$ к функции $g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ при $k \to \infty$, если $\|g_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu)} \leqslant C$ и для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\varphi(x)d\mu_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)d\mu(x).$$

Последовательность $\{g_k\}$ называется *сильно сходящейся* к $g(x)$ в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_k)$ при $k \to \infty$, если она сходится слабо и

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_k(x)h_k(x)d\mu_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)h(x)d\mu(x)$$

для любой последовательности $\{h_k(x)\}$, которая слабо сходится к $h(x) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_k)$.

Задача 10.7. Пусть $\{g_k\}$ сходится слабо к $g(x)$ в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_k)$ при $k \to \infty$. Покажите, что $\{g_k\}$ сходится сильно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu_k)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu)}.$$

В качестве примера такой последовательности мер рассмотрим масштабирование фиксированной периодической меры. Пусть μ — произвольная периодическая борелевская мера такая, что $\mu(\mathbb{T}^n) = 1$. Обозначим $\mu_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \mu(x/\varepsilon)$. По определению для произвольного борелевского множества B должно выполняться соотношение $\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^n \mu(\varepsilon^{-1}B)$.

Задача 10.8. Докажите, что меры $\mu_\varepsilon(x)$ слабо сходятся к стандартной мере Лебега dx в $\mathbb{R}^n$.

Важное свойство слабой компактности ограниченных множеств в сепарабельном гильбертовом пространстве остается в силе для сходимости в переменных пространствах.

Лемма 10.1. *Пусть $\{\mu_k\}$ — последовательность борелевских мер в $\mathbb{R}^n$, слабо сходящаяся к мере μ. Тогда из любой последовательности функций $g_k(x)$, удовлетворяющих оценке $\|g_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu_k)} \leqslant C$, можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции $g(x) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.*

Это утверждение может быть доказано так же, как в классическом случае, когда последовательность задана в фиксированном пространстве, поэтому мы оставляем доказательство читателю.

10.1.3. *Потенциальные и соленоидальные вектор-функции.* В задачах усреднения важную роль будут играть потенциальные и соленоидальные функции. Ниже мы дадим их определения и обсудим основные свойства. Всюду в этом разделе предполагаем, что μ — мера Радона в $\mathbb{R}^n$ или на торе $\mathbb{T}^n$.

Определение 10.3. Пространство $L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{R}^n, \mu)$ потенциальных вектор-функций определяется как замыкание линейного множества $\{\nabla\varphi : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ по норме $(L^2(\mathbb{R}^n, \mu))^n$. Аналогично $(L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{T}^n, \mu))$ определяется как замыкание множества $\{\nabla\varphi : \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)\}$ по норме пространства $(L^2(\mathbb{T}^n, \mu))^n$.

Определение 10.4. *Пространством соленоидальных вектор-функций* $L^2_{\mathrm{sol}}(\mathbb{R}^n, \mu)$ называется ортогональное дополнение в $(L^2(\mathbb{T}^n, \mu))^n$ к пространству $L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{R}^n, \mu)$. Аналогично $L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{T}^n, \mu)$ определяется как ортогональное дополнение к $L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{T}^n, \mu)$ в $(L^2(\mathbb{T}^n, \mu))^n$.

10.1.4. *Сглаживание периодических мер. Вопросы аппроксимации.* Пусть $K(x)$ — неотрицательная функция из C_0^∞ такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x)dx = 1$ и $K(-x) = K(x)$. Для произвольной меры Радона $\mu(x)$ в $\mathbb{R}^n$ или на $\mathbb{T}^n$ (меру на $\mathbb{T}^n$ представим как соответствующую периодическую меру в $\mathbb{R}^n$) положим

$$d\mu^\delta(x) \equiv d\mathscr{K}^\delta(\mu)(x) = \rho^\delta(x)dx, \tag{10.3}$$

где

$$\rho^\delta(x) = \delta^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big) d\mu(y). \tag{10.4}$$

Меры μ^δ сходятся локально слабо в $\mathbb{R}^n$ к мере μ. Действительно, для произвольной непрерывной функции $\varphi(x)$ с компактным носителем при $\delta \to 0$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d\mu^\delta(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d\mu(x)\Big|$$
$$= \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta^{-n}\varphi(x)K\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big)d\mu(y)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta^{-n}\varphi(y)K\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big)d\mu(y)dx\Big|$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta^{-n}|\varphi(x)-\varphi(y)|\,K\Big(\frac{x-y}{\delta}\Big)d\mu(y)dx \leqslant \max_{|x-y|\leqslant C_K\delta} |\varphi(x)-\varphi(y)|,$$

где константа C_K выбрана так, что $K(y) = 0$ при $|y| > C_K$. Правая часть в последней формуле стремится к нулю при $\delta \to 0$ в силу равномерной непрерывности $\varphi(x)$.

Определим также обычный оператор сглаживания равенством

$$\varphi^\delta(x) \equiv (\widetilde{\mathscr{K}}^\delta\varphi)(x) = \delta^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} K\Big(\frac{y}{\delta}\Big)\varphi(x-y)dy. \tag{10.5}$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^\delta(x)d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d\mu^\delta(x) \tag{10.6}$$

(проверьте!). Следующее утверждение позволяет определить специальный оператор сглаживания, согласованный с мерой μ.

Лемма 10.2. *Для каждого $v \in L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$ найдется $v_\delta \in L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$ такая, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\delta(x)\varphi(x)d\mu^\delta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi^\delta(x)d\mu(x) \tag{10.7}$$

для всех $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$. При $\delta \to 0$ семейство $\{v_\delta(x)\}$ сильно сходится к $v(x)$ в $L^2(\mathbb{R}^n,\mu^\delta)$.

Доказательство. Обозначим $F_\delta(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi^\delta(x)d\mu(x)$. Тогда для всех $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$

$$F_\delta^2(\varphi) \leqslant \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} v^2(x)d\mu(x)\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^\delta)^2 d\mu(x).$$

Пусть $C(v) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v^2(x)d\mu(x)$. В силу интегрального неравенства Йенсена

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^\delta(x))^2 d\mu(x) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^2(x))^\delta d\mu(x),$$

поэтому

$$F_\delta^2(\varphi) \leqslant C(v)\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^2(x))^\delta d\mu(x) = C(v)\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(x)d\mu^\delta(x);$$

здесь использовано равенство (10.6). Тем самым линейный функционал $F_\delta(\varphi)$ ограничен в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta)$ и по теореме Рисса $F_\delta(\varphi)$ представим в виде

$$F_\delta(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\delta(x)\varphi(x)d\mu^\delta(x), \quad v_\delta \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta),$$

причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\delta^2(x)d\mu^\delta(x) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} v^2(x)d\mu(x). \tag{10.8}$$

Поскольку для каждой $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ функции $\varphi^\delta(x)$ равномерно сходятся к $\varphi(x)$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\delta(x)\varphi(x)d\mu^\delta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi^\delta(x)d\mu(x) \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)d\mu(x),$$

т.е. $v_\delta \rightharpoonup v$ слабо в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta)$. Сильная сходимость немедленно следует из неравенства (10.8). □

Введем понятие дивергенции относительно меры μ.

Определение 10.5. Пусть $g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ и $v \in (L^2(\mathbb{R}^n, \mu))^n$. Пишем $g(x) = \operatorname{div}_\mu v(x)$, если

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)d\mu(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\cdot\nabla\varphi(x)d\mu(x) \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Легко видеть, что в определении 10.5 вместо гладких функций φ можно использовать $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$.

10.1.5. *Эллиптические уравнения, связанные с мерой μ.* Пусть $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — непрерывная функция со значениями в пространстве симметричных $n \times n$ матриц, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности $\Lambda|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda^{-1}|\xi|^2$, $\Lambda > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ и $\lambda > 0$.

Определение 10.6. Скажем, что пара $(u, \nabla^\mu u)$, где $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ и $\nabla^\mu u$ — некоторый ее μ-градиент, удовлетворяет уравнению

$$-\operatorname{div}_\mu(a(x)\nabla^\mu u(x)) + \lambda u(x) = f(x) \tag{10.9}$$

в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, если для любой $v \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ и любого ее градиента $\nabla^\mu v$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)\nabla^\mu u(x)\cdot\nabla^\mu v(x)d\mu(x) + \lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)d\mu(x). \tag{10.10}$$

Функцию $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ назовем *решением уравнения* (10.9,) если равенство 10.10 выполняется для какого-то из градиентов функции u.

Аналогично определяется решение эллиптического уравнения на торе $\mathbb{T}^n$. Краевые задачи в ограниченных областях будут обсуждаться ниже.

Отметим, что в определении решения вместо пробных функций $v \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ можно брать функции класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 10.3. *Уравнение* (10.9) *имеет единственное решение* $(u, \nabla^\mu u)$, $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$. *При этом выбор* μ*-градиента функции* u *однозначно определяется условием ортогональности вектора* $a(x)\nabla^\mu u(x)$ *подпространству* $\Gamma_\mu(0)$ *градиентов нуля.*

Доказательство. Отметим, что благодаря положительной определенности матрицы $a(x)$ левая часть в (10.10) представляет собой скалярное произведение в $H(\mathbb{R}^n, \mu)$, в то время как правая часть этой формулы является непрерывным линейным функционалом в $H(\mathbb{R}^n, \mu)$. По теореме Рисса найдется $(u, \nabla^\mu u) \in H(\mathbb{R}^n, \mu)$, удовлетворяющая (10.10). Выбрав теперь в качестве пробной функции в (10.10) пару $(0, z)$, $z \in \Gamma_\mu(0)$, приходим к выводу, что $a(x)\nabla^\mu u$ ортогональна $\Gamma_\mu(0)$. Еще раз используя теорему Рисса, заключаем, что во множестве μ-градиентов функции u найдется единственный элемент z, для которого выполняется указанное условие ортогональности. Отсюда легко следует единственность решения $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$. □

Если $a(x)$ — единичная матрица, (10.10) принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla^\mu u(x) \cdot \nabla^\mu v(x) d\mu(x) + \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)d\mu(x). \quad (10.11)$$

Выражение $\mathrm{div}_\mu \nabla^\mu u$ называется *μ-лапласианом* функции u.

Тангенциальным градиентом функции $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ называется такой ее μ-градиент z, который ортогонален $\Gamma_\mu(0)$, т.е. z — это проекция произвольного μ-градиента функции u на $(\Gamma_\mu(0))^\perp$ (ортогональное дополнение $\Gamma_\mu(0)$ в $(L^2(\mathbb{R}^n, \mu)^n)$). По лемме 10.3 градиент, выбираемый решением задачи (10.11), тангенциален.

10.1.6. *Эргодичность меры и ее следствия.* Свойство 2-связности или эргодичности меры оказывается принципиальным при усреднении периодических мер, а также при изучении свойств вариационных задач и уравнений, связанных с такими мерами.

Определение 10.7. Периодическая мера μ *эргодична* или 2*-связна*, если $u = \mathrm{const}$ μ-п.н. для любой функции $u \in H^1(\mathbb{T}^n, \mu)$ такой, что некоторый ее градиент равен нулю.

Важным следствием 2-связности меры является свойство аппроксимации.

Лемма 10.4. *Пусть мера* μ *— 2-связна. Тогда множество функций* $\{g(x) \in L^2(\mathbb{T}^n, \mu) : g(x) = \mathrm{div}_\mu v(x)\}$ *плотно в пространстве*

$$\{u \in L^2(\mathbb{T}^n) : \int\limits_{\mathbb{T}^n} u(x)d\mu(x) = 0)\}.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется ненулевой элемент $\zeta \in L^2(\mathbb{T}^n, \mu)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \zeta(x)d\mu(x) = 0$, который ортогонален любой функции вида $\mathrm{div}_\mu v(x)$. Выбирая функцию ζ в качестве правой части в (10.11), полагая $\lambda = 1$ и используя $u(x)$ как пробную функцию, находим

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} |\nabla^\mu u(x)|^2 d\mu(x) + \int\limits_{\mathbb{T}^n} (u(x))^2 d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} u(x)\zeta(x)d\mu(x),$$

откуда с помощью неравенства Коши — Буняковского получаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n}(u(x))^2 d\mu(x) \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^n}(\zeta(x))^2 d\mu(x).$$

С другой стороны, уравнение (10.11) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n}(\zeta(x)-u(x))v(x)d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{T}^n}\nabla^\mu u(x)\cdot\nabla^\mu v(x)d\mu(x) \quad \forall\, v\in H^1(\mathbb{T}^n,\mu),$$

поэтому $\zeta - u = \operatorname{div}_\mu u$. Ввиду выбора ζ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n}(\zeta-u)\zeta d\mu(x) = 0,$$

откуда

$$0 \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^n}(\zeta-u)^2 d\mu(x) = -\int\limits_{\mathbb{T}^n}(\zeta-u)u d\mu(x).$$

Окончательно, в силу уравнения находим

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n}|\nabla^\mu u(x)|^2 d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{T}^n}(\zeta-u)u d\mu(x) \leqslant 0,$$

что дает $\nabla^\mu u = 0$ и, следовательно, $u = \text{const}$ ввиду эргодичности меры μ. Итак, $\zeta = \text{const}$. Поскольку среднее значение ζ равно нулю, имеем $\zeta = 0$, что противоречит условию нетривиальности ζ. □

Приведем примеры 2-связных и 2-несвязных мер. Начнем с простого примера перфорированной области.

Задача 10.9. Пусть Q — открытое связное множество на торе $\mathbb{T}^n$ и мера μ задана равенством $d\mu(x) = \chi_Q dx$. Тогда мера μ 2-связна.

Задача 10.10. Если $Q = Q_1 \cup Q_2$, причем Q_1 и Q_2 — открытые множества на $\mathbb{T}^n$ такие, что $\operatorname{dist}(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2) > 0$, то мера μ, заданная равенством $d\mu(x) = \chi_Q dx$, не будет 2-связной.

10.1.7. *Построение самосопряженного оператора.* Пусть матрица коэффициентов $a_{ij}(x)$ в (10.9) симметрична и положительно определена.

Лемма 10.5. *Множество решений уравнения*

$$-\operatorname{div}_\mu(a(x)\nabla^\mu u(x)) + u(x) = f, \qquad f\in L^2(\mathbb{R}^n,\mu), \tag{10.12}$$

плотно в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$.

Доказательство. Обозначим совокупность решений уравнения (10.12) через $\mathscr{D}$. Допустим, что найдется нетривиальный элемент $g\in L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$, ортогональный $\mathscr{D}$. Обозначим через $u_0(x)$ решение уравнения

$$-\operatorname{div}_\mu(a(x)\nabla^\mu u_0(x)) + u_0(x) = g.$$

Используя $u_0(x)$ как пробную функцию в (10.12), а $u(x)$ — в последнем уравнении, и вычитая полученные интегральные тождества, убеждаемся, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)u_0(x)d\mu(x) = 0$ при всех $f\in L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$. Поэтому $u_0 = 0$ и, следовательно, $g = 0$, что противоречит нетривиальности g. □

На элементе $u \in \mathscr{D}$, т.е. на решении уравнения (10.12) положим $Au = f - u$. Тогда оператор $(A+I)^{-1}$ отображает функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ в соответствующие решения уравнения (10.12). Этот оператор неотрицателен, ограничен и симметричен, поэтому оператор A самосопряженный.

Будем обозначать область определения этого оператора через $\mathscr{D}(A)$. Уравнение (10.9) можно теперь записать в операторной форме $Au+\lambda u = f$.

10.1.8. *Вариационные задачи.* Уравнение (10.9) или эквивалентное ему уравнение $Au + \lambda u = f$ служит уравнением Эйлера соответствующей вариационной задачи вида

$$\inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (a(x)\nabla^\mu u(x) \cdot \nabla^\mu u(x) + \lambda u^2(x)) d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}^n} 2f(x)u(x)d\mu(x) \right\} \tag{10.13}$$

Следующее предложение можно доказать так же, как для классических вариационных задач в пространстве $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 10.2. *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Тогда при каждом $\lambda > 0$ задача* (10.13) *имеет единственную точку минимума в пространстве $H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$, которая является решением уравнения* (10.9).

Задача 10.11. Докажите предложение 10.2.

Аналогично может быть изучена вариационная задача

$$\inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (a(x)\nabla^\mu u(x) \cdot \nabla^\mu u(x) + (x)u^2(x)) d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}^n} 2f(x)u(x)d\mu(x) \right\}, \tag{10.14}$$

с функцией $c(x)$, удовлетворяющей оценке $\Lambda \leqslant c(x) \leqslant \Lambda^{-1}$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda > 0$, и соответствующее уравнение

$$-\mathrm{div}_\mu(a(x)\nabla^\mu u(x)) + c(x)u(x) = f(x). \tag{10.15}$$

Такие же утверждения могут быть получены для аналогичных вариационных задач и уравнений, заданных на торе.

10.1.9. *Краевые задачи в пространствах с мерой.* Наряду с задачами во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ развитая выше техника позволяет исследовать различные краевые задачи, заданные в пространствах с мерой. Здесь на примере задачи Дирихле мы покажем, как могут быть рассмотрены такие задачи.

Пусть G — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$ и $\mu(dx)$ — конечная положительная борелевская мера в G.

Определение 10.8. Будем говорить, что $u \in L^2(G, \mu)$ принадлежит пространству $H_0^1(G, \mu)$, и $z \in (L^2(G, \mu))^n$ — градиент функции u, если найдется последовательность $\varphi_k \in C_0^\infty(G)$, такая что

$$\varphi_k \longrightarrow u \ \text{ в } \ L^2(G, \mu), \quad \nabla\varphi_k \longrightarrow z \ \text{ в } \ (L^2(G, \mu))^n \quad \text{при } \ k \to \infty.$$

Рассмотрим задачу Дирихле вида

$$-\mathrm{div}a(x)\nabla^\mu u(x) + c(x)u(x) = f(x) \ \text{ в } \ L^2(G, \mu), \quad u\big|_{\partial G} = 0. \tag{10.16}$$

Как и прежде, предполагаем, что матрица $a(x)$ симметрична и удовлетворяет условию равномерной эллиптичности в G и, кроме того, $c(x)$ ограничена и отделена от нуля положительной константой при всех $x \in G$. Пусть $f(x) \in L^2(G, \mu)$.

Определение 10.9. Будем говорить, что $u \in H_0^1(G,\mu)$ является решением задачи (10.16), если для любой $v \in H_0^1(G,\mu)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_G a(x)\big(\nabla^\mu u(x)\cdot\nabla^\mu v(x) + c(x)u(x)v(x)\big)d\mu(x) = \int\limits_G f(x)v(x)d\mu(x).$$

Существование и единственность решения задачи (10.16) проверяются так же, как при доказательстве леммы 10.3. Напомним, что выбор градиента решения, для которого справедливо приведенное выше интегральное тождество, определен однозначно.

10.1.10. *Двойственное определение пространств Соболева.* При анализе пространств Соболева с мерой часто оказывается удобным двойственное определение таких пространств. Приведем определение и докажем эквивалентность основному определению 10.1.

Определение 10.10. Будем говорить, что $u(x) \in H^1(\mathbb{R}^n,\mu)$, и $z(x) \in (L^2(\mathbb{R}^n,\mu))^n$ есть μ-градиент $u(x)$, если

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)g(x)d\mu(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} z(x)\cdot v(x)d\mu(x) \tag{10.17}$$

для $g(x) = \mathrm{div}_\mu v(x)$.

Проверим эквивалентность двух определений пространства $H^1(\mathbb{R}^n,\mu)$.

Предложение 10.3. *Определения* 10.10 *и* 10.1 *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $u \in H^1(\mathbb{R}^n,\mu)$ в смысле определения 10.1. Поскольку в определении 10.5 в качестве пробных функций можно взять любые функции из $u \in H^1(\mathbb{R}^n,\mu)$, пара $(u,\nabla^\mu u)$ удовлетворяет соотношению (10.17) и поэтому $u \in H^1(\mathbb{R}^n,\mu)$ в смысле второго определения.

Для доказательства обратного включения заметим, что множество функций (u,z), удовлетворяющих (10.17), образует замкнутое подпространство в $(L^2(\mathbb{R}^n,\mu))^{n+1}$. Допустим, что оно шире множества $\{(u,\nabla^\mu u) : u \in H^1(\mathbb{R}^n,\mu)\}$. Тогда для некоторого ненулевого $(u_0,z_0) \in (L^2(\mathbb{R}^n,\mu))^{n+1}$ выполняются одновременно (10.17) и равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x)u(x)d\mu(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} z_0(x)\cdot\nabla^\mu u(x)d\mu(x), \qquad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^n,\mu).$$

(Докажите существование такого элемента (u_0,z_0)!) По определению оператора μ-дивергенции это означает, что $u_0 = \mathrm{div}_\mu z_0$. Выбирая (u_0,z_0) в качестве пробной функции в (10.17), приходим к соотношению

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0^2 d\mu(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} |z_0|^2 d\mu(x),$$

которое противоречит нетривиальности (u_0,z_0). □

10.1.11. *Аппроксимация с помощью сглаживания.* Двойственное определение пространств Соболева, обсуждавшееся выше, позволяет рассмотреть вопросы аппроксимации сингулярных мер путем сглаживания. Для произвольной радоновой меры μ в $\mathbb{R}^n$ (или на торе) определим меру μ^δ равенствами (10.3)–(10.4). Напомним, что так определенные меры μ^δ локально слабо сходятся к μ при $\delta \to 0$.

Лемма 10.6. *Пусть* $g(x) = \mathrm{div}_\mu v(x)$. *Тогда найдутся* $g_\delta \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta)$ *и* $v_\delta \in (L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta))^n$ *такие, что*

$$\mathrm{div}_{\mu^\delta} v_\delta = g_\delta \tag{10.18}$$

и при $\delta \to 0$

$$g_\delta \to g \ \text{ сильно в } \ L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta), \qquad v_\delta \to v \ \text{ сильно в } \ (L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta))^n. \tag{10.19}$$

Доказательство. Покажем, что достаточно определить функции g_δ и v_δ, как в лемме 10.2. Требуемая сильная сходимость обеспечивается этой леммой. Проверим соотношение (10.18). Для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mu)$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\delta(x) \cdot \nabla\varphi(x) d\mu^\delta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x) \cdot \nabla(\varphi^\delta)(x) d\mu(x)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi^\delta(x) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_\delta(x)\varphi(x) d\mu^\delta(x).$$

□

В следующем утверждении мера μ^δ по-прежнему определена равенствами (10.3)–(10.4), но $u_\delta \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu^\delta)$ — произвольное семейство, не связанное со сглаживанием какой-либо фиксированной функции.

Теорема 10.1. *Пусть* $u_\delta \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu^\delta)$, *и пусть при* $\delta \to 0$

$$u_\delta \rightharpoonup u \ \text{ слабо в } L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta), \quad \nabla^{\mu^\delta} u_\delta \rightharpoonup z \ \text{ слабо в } (L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta))^n.$$

Тогда $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$, *и* $z = \nabla^\mu u$.

Доказательство. Для функций $g(x)$ и $v(x)$, связанных соотношением $g(x) = \mathrm{div}_\mu v(x)$, будем использовать аппроксимации g_δ и v_δ, построенные в лемме 10.6, так что $g_\delta(x) = \mathrm{div}_{\mu^\delta} v_\delta(x)$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_\delta(x) g_\delta(x) d\mu^\delta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla^{\mu^\delta} u_\delta(x) v_\delta(x) d\mu^\delta(x).$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to 0$ и учитывая свойства сильной сходимости функций g_δ и v_δ, приходим к равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) g(x) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} z(x) \cdot v(x) d\mu(x).$$

Отсюда с помощью двойственного определения пространства Соболева находим $u \in H^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ и $z = \nabla^\mu u$. □

Предыдущие утверждения позволяют получить важный результат об аппроксимации и сходимости решений эллиптических уравнений.

Пусть μ — мера Радона в $\mathbb{R}^n$, и μ^δ — сглаженные меры. Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$-\mathrm{div}_\mu a(x) \nabla^\mu u + \lambda u = f \ \text{ в } L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \tag{10.20}$$

и семейство аппроксимационных уравнений вида

$$-\mathrm{div}_{\mu^\delta} a_\delta(x) \nabla^{\mu^\delta} u + \lambda u = f_\delta \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, \mu^\delta). \tag{10.21}$$

Теорема 10.2. *Пусть*

$$\Lambda|\xi|^2 \leqslant a(x)\xi\cdot\xi \leqslant \Lambda^{-1}|\xi|^2, \quad \Lambda|\xi|^2 \leqslant a_\delta(x)\xi\cdot\xi \leqslant \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^n,\ x\in\mathbb{R}^n,$$

и $a_\delta(x)\to a(x)$ *сильно в* $L^2(\mathbb{R}^n,\mu^\delta)$, $f_\delta(x)\to f(x)$ *сильно в* $L^2(\mathbb{R}^n,\mu^\delta)$. *Тогда решение* $u_\delta(x)$ *уравнения* (10.21) *сильно сходится при* $\delta\to 0$ *к решению* $u(x)$ *уравнения* (10.20) *в* $L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$.

Доказательство. Поскольку семейство $(u_\delta,\nabla^{\mu^\delta}u_\delta)$ удовлетворяет оценке $\|u_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu^\delta)}+\|\nabla^{\mu^\delta}u_\delta\|_{(L^2(\mathbb{R}^n,\mu^\delta))^n}\leqslant C$, по подпоследовательности $\delta_k\to 0$ имеет место слабая сходимость $(u_\delta,\nabla^{\mu^\delta}u_\delta)\to(u_0,z_0)$ в $(L^2(\mathbb{R}^n,\mu^\delta))^{n+1}$. Согласно теореме 10.1 имеем $u_0\in H^1(\mathbb{R}^n,\mu^\delta)$ и $v_0=\nabla^\mu u_0$. Далее, легко проверить, что

$$a_\delta(x)\nabla^{\mu^\delta}u^\delta(x)\rightharpoonup a(x)\nabla^\mu u_0(x) \quad \text{слабо в } (L^2(\mathbb{R}^n,\mu^\delta))^n.$$

Переходя к пределу в интегральном тождестве

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(a_\delta(x)\nabla^{\mu^\delta}u_\delta(x)\cdot\nabla\varphi(x)+\lambda u_\delta(x)\varphi(x)\big)d\mu^\delta(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f_\delta(x)\varphi(x)d\mu^\delta(x),$$

заключаем, что $(u_0(x),\nabla^\mu u_0(x))$ — решение уравнения (10.20). Сильная сходимость проверяется с помощью приема, основанного на сходимости энергий. Используя $(u_\delta,\nabla^{\mu^\delta}u_\delta)$ как пробную функцию в интегральном тождестве уравнения (10.21) и принимая во внимание сильную сходимость f_δ, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(a_\delta(x)\nabla^{\mu^\delta}u_\delta(x)\cdot\nabla^{\mu^\delta}u_\delta(x)+\lambda u_\delta^2\Big)d\mu^\delta(x)\\
&=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_\delta(x)f_\delta(x)d\mu^\delta(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_(x)f(x)d\mu(x)\\
&=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(a(x)\nabla^\mu u(x)\cdot\nabla^\mu u(x)+\lambda u^2\Big)d\mu(x).
\end{aligned}$$

Оба квадратичных члена в левой части этого равенства полунепрерывны снизу при слабой сходимости:

$$\liminf_{\delta\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}a_\delta(x)\nabla^{\mu^\delta}u_\delta(x)\cdot\nabla^{\mu^\delta}u_\delta(x)d\mu^\delta(x)\geqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}a(x)\nabla^\mu u(x)\cdot\nabla^\mu u(x)d\mu(x),$$

$$\liminf_{\delta\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\lambda u_\delta^2(x)d\mu^\delta(x)\geqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}\lambda u^2(x)d\mu(x),$$

поэтому предыдущее соотношение может выполняться только тогда, когда оба последних неравенства обращаются в равенства. Это влечет сильную сходимость. □

10.1.12. *Невырожденность периодической меры.* Пусть μ — периодическая эргодическая мера Радона в $\mathbb{R}^n$. Как обычно, мы отождествляем ее с мерой на торе $\mathbb{T}^n$. Для каждого $\xi\in\mathbb{R}^n$ рассмотрим вариационную задачу

$$\widehat{A}\xi\cdot\xi=\min_{v\in L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{T}^n)}\int\limits_{\mathbb{T}^n}(\xi+v(x))\cdot(\xi+v(x))d\mu(x).$$

Легко проверить, что минимум является неотрицательной квадратичной формой в $\mathbb{R}^n$, матрицу которой обозначим через $\widehat{A}$ и будем называть ее *эффективной*.

Определение 10.11. Периодическая мера Радона μ называется *невырожденной*, если $\widehat{A}$ положительно определенная, т.е. $\widehat{A}\xi\cdot\xi \geqslant c|\xi|^2$, $c>0$.

Матрица $\widehat{A}$ может вырождаться в некоторых направлениях или всюду. Подпространство векторов, образующих ядро матрицы $\widehat{A}$, обозначим $\mathscr{K}^\mu$.

Задача 10.12. Пусть $a(x)$ — периодическая матрица такая, что $\Lambda|\xi|^2 \leqslant a(x)\xi\cdot\xi \leqslant \Lambda^{-1}|\xi|^2$ μ-п.в. Положим

$$\widehat{A}_1\xi\cdot\xi = \min_{v\in L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{T}^n)} \int\limits_{\mathbb{T}^n} a(x)(\xi+v(x))\cdot(\xi+v(x))d\mu(x). \tag{10.22}$$

Докажите, что ядро матрицы $\widehat{A}_1$ совпадает с ядром матрицы $\widehat{A}$.

Будем называть $\widehat{A}_1$ *эффективной матрицей* оператора $-\mathrm{div}_\mu(a(x)\nabla^\mu\cdot)$. Уравнение Эйлера вариационной задачи (10.22) принимает вид: Найти $v_\xi(x)\in L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{T}^n,\mu)$ такую, что

$$a(x)(\xi+v_\xi(x))\in L^2_{\mathrm{sol}}(\mathbb{T}^n,\mu). \tag{10.23}$$

Обозначив Π_{pot} оператор ортогонального проектирования в $(L^2(\mathbb{T}^n,\mu))^n$ на подпространство $L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{T}^n,\mu)$, мы перепишем уравнение (10.23) в следующем виде: Найти $v_\xi(x)\in L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{T}^n,\mu)$ такую, что

$$\Pi_{\mathrm{pot}}(a(x)v_\xi(x)) = -\Pi_{\mathrm{pot}}(a(x)\xi).$$

Задача 10.13. Докажите, что оператор, отображающий $v\in L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{T}^n,\mu)$ в $\Pi_{\mathrm{pot}}\big(a(x)v_\xi(x)\big)$, коэрцитивен в $L^2_{\mathrm{pot}}(\mathbb{T}^n,\mu)$.

Отсюда следует однозначная разрешимость задачи (10.23). Матрица $\widehat{A}_1$ записывается в виде

$$\widehat{A}_1\xi = \int\limits_{\mathbb{T}^n} a(x)(v_\xi(x)+\xi))d\mu(x), \quad \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{10.24}$$

Обозначив через $V(x)$ матрицу, столбцы которой образованы вектор-функциями $v_{e_1}(x),\dots,v_{e_n}(x)$ (e_j — базисные орты в $\mathbb{R}^n$), перепишем (10.24) в матричной форме

$$\widehat{A}_1 = \int\limits_{\mathbb{T}^n} a(x)(Id+V(x)))d\mu(x). \tag{10.25}$$

Предложение 10.4. *Ядро $\mathscr{K}^\mu$ эффективной матрицы $\widehat{A}$ (или $\widehat{A}_1$) совпадает со множеством постоянных потенциальных векторов, т.е. $\xi\in\mathscr{K}^\mu$ тогда и только тогда, когда вектор функция, равная ξ при μ-п.в. x, является потенциальной. Вектор $\eta\in\mathbb{R}^n$ лежит в ортогональном дополнении к $\mathscr{K}^\mu$ тогда и только тогда, когда существует функция $v\in L^2_{\mathrm{sol}}(\mathbb{T}^n,\mu)$ такая, что $\int\limits_{\mathbb{T}^n} v(x)d\mu(x)=\eta$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из вариационной формулы (10.22). Для доказательства второго утверждения предположим сначала, что $\eta = \int\limits_{\mathbb{T}^n} v(x)d\mu(x)$ для некоторой $v \in L^2_{\rm sol}(\mathbb{T}^n, \mu)$. Если $\xi \in \mathscr{K}^\mu$, то вектор ξ потенциален, поэтому $0 = \int\limits_{\mathbb{T}^n} \xi \cdot v(x)d\mu(x) = \xi \cdot \eta$. Для получения обратного включения заметим, что множество $\widehat{A}_1\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, совпадает с ортогональным дополнением к $\mathscr{K}^\mu$. В силу (10.24) любой вектор вида $\widehat{A}_1\xi$ является μ-средним значением некоторой функции класса $L^2_{\rm sol}(\mathbb{T}^n, \mu)$. $\square$

Рассмотрим модифицированную ячеичную задачу: Найти $v^+_\xi(x) \in L^2_{\rm pot}(\mathbb{T}^n, \mu)$ такую, что

$$a(x)(\Pi^{\rm eff}\xi + v^+_\xi(x)) \in L^2_{\rm sol}(\mathbb{T}^n, \mu), \tag{10.26}$$

где $\Pi^{\rm eff}$ — оператор ортогонального проектирования на ортогональное дополнение к $\mathscr{K}^\mu$. Существование и единственность решения этой задачи устанавливаются так же как для задачи (10.23). Из предложения 10.4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 10.1. *Справедливо равенство* $a(x)(\xi+v_\xi(x)) = a(x)(\Pi^{\rm eff}\xi+v^+)$. *Эффективная матрица* $\widehat{A}_1$, *определенная формулой* (10.24), *может быть также определена по формуле*

$$\widehat{A}_1\xi = \int\limits_{\mathbb{T}^n} a(x)(v^+_\xi(x) + \Pi^{\rm eff}\xi))d\mu(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{10.27}$$

10.2. Двухмасштабная сходимость в переменных пространствах. Техника двухмасштабной сходимости (см. §9) была введена в работах [**94, 3**] и оказалась очень эффективной во многих задачах усреднения. Здесь мы расширим классическое понятие двухмасштабной сходимости на случай переменных пространств с периодической быстроосциллирующей мерой. Будут даны определения и рассмотрены основные свойства такой сходимости. В математической литературе эти вопросы исследовались в [**32, 55, 57**].

Пусть μ — периодическая мера Радона в $\mathbb{R}^n$ с периодом единица по каждому из координатных направлений, и пусть ε — произвольное положительное число. Всюду в дальнейшем будем использовать обозначение $\mu_\varepsilon(dx) = \varepsilon^n\mu(\frac{dx}{\varepsilon})$, т.е. $\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^n\mu(\varepsilon^{-1}B)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$. Напомним (см. задачу 10.8), что семейство мер μ_ε слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к мере $\mu(\square)dx$, где $\square = [0,1)^n$. В частности, если $\mu(\square) = 1$, то μ_ε сходится к стандартной мере Лебега. Пусть G — жорданова область в $\mathbb{R}^n$ (здесь рассматриваем только липшицевы и гладкие области либо все пространство $\mathbb{R}^n$).

Определение 10.12. Будем говорить, что при $\varepsilon \to 0$ семейство функций $u_\varepsilon \in L^2(G, \mu_\varepsilon)$ *двухмасштабно сходится* в $L^2(G, \mu_\varepsilon)$ к функции $u(x, y) \in L^2(G \times \square, dx \times \mu(y))$, если $\|u_\varepsilon\|_{L^2(G,\mu_\varepsilon)} \leqslant C$, $\varepsilon > 0$ и

$$\int\limits_G u_\varepsilon(x)\varphi(x)\psi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)d\mu_\varepsilon(x) \longrightarrow \int\limits_G \int\limits_\square u(x,y)\varphi(x)\psi(y)dxd\mu(y) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

для любых функций $\varphi \in C^\infty_0(G)$ и $\psi \in C^\infty_{\rm per}(\square)$.

Замечание 10.3. Как уже обсуждалось в §9, в данном определении пробная функция не может быть произвольной функцией из класса $L^2(G\times\square, dx\times\mu(y))$. Тем не менее, класс пробных функций в определении двухмасштабной сходимости можно расширить, в частности, можно использовать функции из пространства $C(\overline{G}, C_{\rm per}(\square))$ (докажите!).

Другим допустимым классом является множество функций вида

$$\psi(x,y)=\sum_1^N \varphi_i(x)g_i(y), \tag{10.28}$$

где $\varphi_i\in C^\infty(G)$, $g_i\in L^2(\square,\mu)$ и N — произвольное число (докажите!).

При дополнительном условии равномерной интегрируемости могут быть также использованы функции Каратеодори (см. [**57**, лемма 3.1, теорема 3.3]), но мы ограничимся здесь лишь пробными функциями из одного из указанных выше классов.

Приведем простое техническое утверждение (*свойство среднего значения*), которое многократно используется в дальнейшем.

Лемма 10.7. *Пусть $g(x,y)\in C(\overline{G}; C_{\rm per}(\square))$, т.е. $g(x,y)$ непрерывна по обоим аргументам в $\overline{G}\times\square$ и $\square$-периодична по y. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_G g\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)d\mu_\varepsilon(x)=\int\limits_{G\times\square} g(x,y)dxd\mu(y). \tag{10.29}$$

Задача 10.14. Докажите лемму 10.7.

Аналогичное утверждение для функций (10.28) тривиально.

Описание свойств двухмасштабной сходимости начнем с результата о слабой компактности семейства ограниченных в $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ функций.

Предложение 10.5. *Пусть $u^\varepsilon\in L^2(G,\mu_\varepsilon)$ и $\|u^\varepsilon\|_{L^2(G,\mu_\varepsilon)}\leqslant C$. Тогда по подпоследовательности $\varepsilon_k\to0$ функции u^ε сходятся двухмасштабно в $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ к некоторой функции $u(x,y)\in L^2(G\times\square, dx\times\mu(y))$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное счетное всюду плотное в $C(\overline{G}; C_{\rm per}(\square))$ семейство функций $\{g_j(x,y)\}$, $j=1,2,\dots$. Это семейство также плотно в $L^2(G\times\square, dx\times\mu(y))$. Обозначим

$$\mathscr{H}_\varepsilon(\psi)\equiv\int\limits_G u^\varepsilon(x)\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\mu_\varepsilon(x).$$

По лемме 10.7 для любой непрерывной функции $\psi(x,y)$ имеем

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to0}\mathscr{H}^2_\varepsilon(\psi)&\leqslant\limsup_{\varepsilon\to0}\|u^\varepsilon\|^2_{L^2(G,\mu_\varepsilon)}\int\limits_G\psi^2\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)d\mu_\varepsilon(x)\\&\leqslant C\|\psi(x,y)\|^2_{L^2(G\times\square,dx\times\mu(y))}.\end{aligned}\tag{10.30}$$

Выберем подпоследовательность ε_k такую, что $\mathscr{H}_{\varepsilon_k}(\psi_1)$ сходится, и обозначим предел через $\mathscr{H}_0(\psi_1)$. Далее, из последовательности ε_k выберем подпоследовательность, для которой используем то же обозначение ε_k, так что $\mathscr{H}_{\varepsilon_k}(\psi_2)$ сходится. Предел обозначим через $\mathscr{H}_0(\psi_2)$. Продолжая этот процесс и применяя диагональную процедуру, построим последовательность $\varepsilon_k\to0$ такую, что $\mathscr{H}_{\varepsilon_k}(\psi_j)$ сходится к $\mathscr{H}_0(\psi_j)$ при всех $j=1,2,\dots$. По построению и в силу (10.30) отображение $\mathscr{H}_0(\psi)$, $\psi\in\{\psi_j\}$, продолжается

до непрерывного линейного оператора в $L^2(G\times\square, dx\times\mu(y))$, причем для любой $\psi\in C(\overline{G};C_{\rm per}(\square))$ выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\mathscr{H}_{\varepsilon_k}(\psi)=\mathscr{H}_0(\psi).$$

Применяя теорему Рисса, находим функцию $u(x,y)\in L^2(G\times\square, dx\times\mu(y))$ такую, что

$$\mathscr{H}_0(\psi)=\int\limits_{G\times\square}\psi(x,y)u(x,y)dxd\mu(y)$$

для любой $\psi(x,y)\in L^2(G\times\square, dx\times\mu(y))$, что завершает доказательство. $\square$

Еще одним важным свойством двухмасштабной сходимости является полунепрерывность L^2-нормы в топологии этой сходимости.

Предложение 10.6. *Предположим, что функция $u^\varepsilon(x)$ сходится двухмасштабно в $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ к функции $u(x,y)$. Тогда*

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\bigl\|u^\varepsilon\bigr\|_{L^2(G,\mu_\varepsilon)}\geqslant\bigl\|u(x,y)\bigr\|_{L^2(G\times\square,dx\times\mu(y))}.$$

Доказательство. Вообще говоря, мы не можем использовать $u(x,y)$ в качестве пробной функции, поскольку она не обязана быть непрерывной. В связи с этим рассмотрим непрерывную периодическую по y функцию $u_\delta(x,y)$, аппроксимирующую $u(x,y)$ в норме L^2, так что

$$\bigl\|u(x,y)-u_\delta(x,y)\bigr\|_{L^2(G\times\square,dx\times\mu(y))}\leqslant\delta.$$

По определению двухмасштабной сходимости и в силу леммы 10.7 имеем

$$\begin{aligned}0&\leqslant\liminf_{\varepsilon\to0}\int\limits_G\Bigl(u^\varepsilon(x)-u_\delta\Bigl(x,\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\Bigr)^2d\mu_\varepsilon(x)\\&\leqslant\liminf_{\varepsilon\to0}\int\limits_G(u^\varepsilon(x))^2d\mu_\varepsilon(x)-2\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_G u^\varepsilon(x)u_\delta\Bigl(x,\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)d\mu_\varepsilon(x)+\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_G u_\delta^2\Bigl(x,\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)d\mu_\varepsilon(x)\\&=\liminf_{\varepsilon\to0}\int\limits_G(u^\varepsilon(x))^2d\mu_\varepsilon(x)-2\int\limits_{G\times\square}u(x,y)u_\delta(x,y)dxd\mu(y)+\int\limits_{G\times\square}u_\delta^2(x,y)dxd\mu(y).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\int\limits_G(u^\varepsilon(x))^2d\mu_\varepsilon(x)\geqslant2\int\limits_{G\times\square}u(x,y)u_\delta(x,y)dxd\mu(y)-\int\limits_{G\times\square}u_\delta^2(x,y)dxd\mu(y).$$

Ввиду выбора u_δ выражение в правой части сходится при $\delta\to0$ к величине $\|u(x,y)\|^2_{L^2(G\times\square,dx\times\mu(y))}$. Поскольку левая часть от δ не зависит, переходом к пределу по δ получаем требуемое неравенство. $\square$

Введем теперь понятие сильной двухмасштабной сходимости.

Определение 10.13. Будем говорить, что семейство функций $u^\varepsilon(x)\in L^2(G,\mu_\varepsilon)$ сходится *сильно двухмасштабно* в $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ к $u(x,y)\in L^2(G\times\square, dx\times\mu(y))$, если $u^\varepsilon(x)$ сходится к $u(x,y)$ двухмасштабно в $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ и для любой последовательности $v^\varepsilon(x)$, сходящейся двухмасштабно в $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ к $v(x,y)$, справедливо предельное соотношение

$$\int\limits_G u^\varepsilon(x)v^\varepsilon(x)\,d\mu_\varepsilon(x)\longrightarrow\int\limits_{G\times\square}u(x,y)v(x,y)dxd\mu(y)\quad\text{при}\quad\varepsilon\to0.$$

Можно дать эквивалентное определение, не использующее вспомогательного семейства.

Определение 10.14. Будем говорить, что семейство функций $u^\varepsilon(x) \in L^2(G,\mu_\varepsilon)$ сходится *сильно двухмасштабно* в $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ к $u(x,y) \in L^2(G\times\square, dx\times\mu(y))$, если $u^\varepsilon(x)$ сходится к $u(x,y)$ двухмасштабно в $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_G |u^\varepsilon(x)|^2 d\mu_\varepsilon(x) = \int\limits_{G\times\square} |u(x,y)|^2 dx d\mu(y).$$

Задача 10.15. Докажите эквивалентность определений 10.13 и 10.14 сильной двухмасштабной сходимости.

При усреднении будут использоваться приводимые ниже результаты о структуре двухмасштабного предела. Они являются обобщением на случай переменных пространств результатов из §9.

Предложение 10.7. *Пусть* $u^\varepsilon(x) \in H^1(G,\mu_\varepsilon)$ *и*

$$\bigl\|u^\varepsilon\bigr\|_{L^2(G,\mu_\varepsilon)} \leqslant C, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\bigl\|\nabla^\mu u^\varepsilon(x)\bigr\|_{(L^2(G,\mu_\varepsilon))^n} = 0.$$

Тогда по подпоследовательности u^ε *сходится двухмасштабно в* $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ *к некоторой функции* $u^0(x)$, *которая не зависит от* y.

Доказательство. В силу предложения 10.5 по подпоследовательности функции $u^\varepsilon(x)$ сходятся двухмасштабно в $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ к $u(x,y) \in L^2(G\times\square, dx\times\mu(y))$. Предположим, что для функций $v(y) \in (L^2(G,\mu_\varepsilon))^n$ и $g(y) \in L^2(G,\mu_\varepsilon)$ выполнено соотношение $g(y) = \operatorname{div}_\mu v(y)$. Для произвольной $\varphi(x) \in C_0^\infty(G)$ имеем

$$\int\limits_G u^\varepsilon(x)\varphi(x) g\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr) d\mu_\varepsilon(x) = -\varepsilon\int\limits_G \nabla^\mu\bigl(u^\varepsilon(x)\varphi(x)\bigr)\cdot v\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr) d\mu_\varepsilon(x).$$

Переходом к двухмасштабному пределу получим

$$\int\limits_{G\times\square} u(x,y)\varphi(x) g(y) dx d\mu(y) = 0.$$

Поскольку $\varphi(x)$ — произвольная функция из $C_0^\infty(G)$, имеем

$$\int\limits_{G\times\square} u(x,y) g(y) d\mu(y) = 0$$

при почти всех x. На основании леммы 10.4 выводим, что

$$\int\limits_{G\times\square} u(x,y) g(y) d\mu(y) = 0$$

для любой функции $g(y) \in L^2(\square,\mu)$ с нулевым средним относительно меры μ. Поэтому $u(x,y)$ не зависит от y, т.е. $u(x,y) = u(x)$. □

Напомним, что через $\mathscr{K}^\mu$ мы обозначили ядро матрицы $\widehat{A}$. Обозначим через Π^{eff} оператор ортогонального проектирования в $\mathbb{R}^n$ на ортогональное дополнение к $\mathscr{K}^\mu$. Положим $\nabla^{\text{eff}} = \Pi^{\text{eff}}\nabla$ и определим пространство $H^{\text{eff}}(G) = \{u \in L^2(G) : \Pi^{\text{eff}}\nabla u \in (L^2(G))^n\}$.

Теорема 10.3. *Пусть u^ε удовлетворяют оценкам*

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(G,\mu_\varepsilon)} \leqslant C, \qquad \|\nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon\|_{(L^2(G,\mu_\varepsilon))^n} \leqslant C.$$

Тогда по подпоследовательности при $\varepsilon \to 0$

$$u^\varepsilon(x) \rightharpoonup u^0(x) \quad \textit{двухмасштабно в } L^2(G,\mu_\varepsilon), \tag{10.31}$$

$$\nabla^\mu u^\varepsilon(x) \rightharpoonup \nabla^{\text{eff}} u^0(x) + u_1(x,y) \quad \textit{двухмасштабно в } (L^2(G,\mu_\varepsilon)), \tag{10.32}$$

причем $u^0 \in H^{\text{eff}}(G)$ и $u_1 \in L^2(G; L^2_{\text{pot}}(\square,\mu))$.

Замечание 10.4. Отметим, что для невырожденных мер $H^{\text{eff}}(G)$ совпадает с $H^1(G)$ и $\nabla^{\text{eff}} = \nabla$. В частности, если в условиях теоремы 10.3 $\mu(y)$ — невырожденная мера, то $u^0 \in H^1(G)$ и $\nabla^{\text{eff}} u^0 = \nabla u^0$.

Доказательство. Независимость u^0 от y доказана в предложении 10.7. Обозначим через $q(x,y)$ двухмасштабный предел последовательности $\nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon$ в $(L^2(G,\mu_\varepsilon))^n$. Его существование гарантируется предложением 10.5. Выберем пробную функцию вида $\varphi(x)v(x/\varepsilon)$, где $\varphi(x) \in C_0^\infty(G)$ и $v(y) \in L^2_{\text{sol}}(\square,\mu)$, и обозначим $\xi = \int\limits_\square v(y)d\mu(y)$. Тогда

$$\int\limits_G \nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \cdot v\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\varphi(x)d\mu_\varepsilon(x) = \int\limits_G \nabla^{\mu_\varepsilon}\big(u^\varepsilon(x)\varphi(x)\big) \cdot v\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)d\mu_\varepsilon(x)$$

$$-\int\limits_G u^\varepsilon(x)\nabla\varphi(x) \cdot v\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)d\mu_\varepsilon(x) = -\int\limits_G u^\varepsilon(x)\nabla\varphi(x) \cdot v\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)d\mu_\varepsilon(x)$$

После перехода к двухмасштабному пределу приходим к равенству

$$\int\limits_{G\times\square} q(x,y) \cdot v(y)\varphi(x)dxd\mu(y) = -\int\limits_{G\times\square} u^0(x)v(y) \cdot \nabla\varphi(x)dxd\mu(y)$$
$$-\xi \cdot \int\limits_G u^0(x)\varphi(x)dx.$$

Используя определение обобщенной производной, заключаем, что

$$\xi \cdot \nabla u^0(x) = -\int\limits_\square q(x,y) \cdot v(y)d\mu(y) \tag{10.33}$$

для почти всех $x \in G$. Поскольку $q \in L^2(G\times\square, dx\times\mu(y))$, имеем $\xi\cdot\nabla u^0(x) \in L^2(G)$. Включение $\nabla^{\text{eff}} u^0 \in (L^2(G))^n$ следует из предложения 10.4.

Осталось доказать, что $u_1(x,y) \in L^2(G; L^2_{\text{pot}}(\square))$. С этой целью преобразуем равенство (10.33) к виду

$$\int\limits_\square \big((q(x,y) - \nabla^{\text{eff}} u^0(x)\big) \cdot v(y)d\mu(y) = 0$$

для почти всех x. Тогда $((q(x,y) - \nabla^{\text{eff}} u^0(x)) \in L^2(G; L^2_{\text{pot}}(\square))$. □

Приведем еще один результат о структуре двухмасштабного предела.

Теорема 10.4. *При выполнении оценок*

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(G,\mu_\varepsilon)} \leqslant C, \qquad \varepsilon\|\nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon\|_{(L^2(G,\mu_\varepsilon))^n} \leqslant C.$$

найдутся подпоследовательность $\varepsilon_k \to 0$ *и* $u^0(x,y) \in L^2(G; H^1_{\mathrm{per}}(\square,\mu))$ *такие, что*

$$u^\varepsilon(x) \rightharpoonup u^0(x,y) \quad \textit{двухмасштабно в } \ L^2(G,\mu_\varepsilon), \tag{10.34}$$

$$\varepsilon\nabla^\mu u^\varepsilon(x) \rightharpoonup \nabla^\mu_y u^0(x,y) \quad \textit{двухмасштабно в } \ (L^2(G,\mu_\varepsilon)). \tag{10.35}$$

Доказательство. Пусть $g(y) = \mathrm{div}_\mu v(y)$. Тогда $g(x/\varepsilon) = \varepsilon \mathrm{div}_{\mu_\varepsilon} v(x/\varepsilon)$ и, следовательно,

$$\int\limits_G u^\varepsilon(x)\varphi(x) g\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) d\mu_\varepsilon(x) = -\int\limits_G \varepsilon\nabla^{\mu_\varepsilon}\big(u^\varepsilon(x)\varphi(x)\big)\cdot v\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) d\mu_\varepsilon(x)$$

для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(G)$. Обозначим двухмасштабный предел последовательности $\varepsilon\nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon(x)$ в $(L^2(G,\mu_\varepsilon))^n$ через $q(x,y)$. Переходя в предыдущем равенстве к двухмасштабному пределу, находим

$$\int\limits_{G\times\square} u^0(x,y)\varphi(x)g(y)dx\mu(dy) = -\int\limits_{G\times\square} q(x,y)\varphi(x)v(y)dx\mu(dy).$$

Поэтому при почти всех x справедливо равенство

$$\int\limits_{\square} u^0(x,y)g(y)\mu(dy) = -\int\limits_{\square} q(x,y)v(y)\mu(dy).$$

Следовательно, $q(x,y) = \nabla^\mu u^0(x,y)$; здесь мы использовали двойственное определение пространства $H^1(\mathbb{T}^n,\mu)$. □

При изучении краевых задач возникает вопрос о выполнении краевых условий для двухмасштабного предела последовательности решений.

Пусть $\mathscr{K}^\mu$ — ядро эффективной матрицы $\widehat{A}$ периодической меры Радона μ в $\mathbb{R}^n$ и Π^{eff} — ортогональный проектор в $\mathbb{R}^n$ на ортогональное дополнение к $\mathscr{K}^\mu$. Введем норму

$$\|u\|^2_{H^{\mathrm{eff}}(G)} = \int\limits_G \big(u^2(x) + |\Pi^{\mathrm{eff}}\nabla u(x)|^2\big)dx$$

и определим пространство $H_0^{\mathrm{eff}}(G)$ как замыкание множества $C_0^\infty(G)$ функций по этой норме. Известно (см. [**138**, гл. X, § 2, лемма 2.6]), что это пространство совпадает со множеством функций $u(x)$ с носителем в G, для которых справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(u^2(x) + |\Pi^{\mathrm{eff}}\nabla u(x)|^2\big)dx \leqslant \infty.$$

Из теоремы 10.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 10.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 10.3, *и пусть* $u^\varepsilon \in H^1_0(G;\mu_\varepsilon)$. *Тогда предельная функция* $u^0(x) \in H_0^{\mathrm{eff}}(G)$. *В частности, если* μ *невырождена, то* $u^0 \in H^1_0(G)$.

10.3. Усреднение. Применим результаты о двухмасштабной сходимости и другие результаты, полученные выше, доказательства теоремы об усреднении периодических эллиптических уравнений в переменных пространствах.

Пусть μ — периодическая мера Радона в $\mathbb{R}^n$ и $\mu_\varepsilon = \varepsilon^n \mu(dx/\varepsilon)$. Начнем с изучения эллиптического уравнения вида

$$-\mathrm{div}_{\mu_\varepsilon}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla^{\mu_\varepsilon} u\Big) + c\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u = f^\varepsilon(x) \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\varepsilon), \tag{10.36}$$

заданного во всем пространстве. Как и ранее, предположим, что $a(y)$ равномерно эллиптична, т.е. $\Lambda|\xi|^2 \leqslant a(y)\xi\cdot\xi \leqslant \Lambda^{-1}|\xi|^2$ при μ-п.в. $y \in \square$ и при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, а также что $0 < c_0 \leqslant c(y) \leqslant c_1$.

Определим функцию $v_\xi(y)$ как решение задачи (10.23), и матрицу $\widehat{A}_1$ по формуле (10.25) либо (10.22). Обозначим $\widehat{c} = \int\limits_{\square} c(y)d\mu(y)$. Уравнение

$$-\mathrm{div}\big(\widehat{A}_1\nabla u\big) + \widehat{c}u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{10.37}$$

будем называть *усредненным* и его решение обозначать через $u^0(x)$. В наших предположениях это уравнение коэрцитивно, поэтому оно имеет единственное решение в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 10.5. *Пусть $f^\varepsilon(x)$ сходится сильно (слабо) в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\varepsilon)$ к функции $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда при выполнении перечисленных выше условий справедливо предельное соотношение*

$$u^\varepsilon(x) \longrightarrow u^0(x) \quad \textit{сильно (слабо) в} \quad L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\varepsilon) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где $u^\varepsilon(x)$ — решение уравнения (10.36). Более того, имеет место сходимость потоков

$$a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon \rightharpoonup \widehat{A}_1\nabla^{\mathrm{eff}} u^0(x) \quad \textit{слабо в} \quad (L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\varepsilon))^n \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0$$

и, в случае сильной сходимости f^ε к f, сходимость энергий

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon(x)\cdot\nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon(x)d\mu_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{A}_1\nabla^{\mathrm{eff}} u^0\cdot\nabla^{\mathrm{eff}} u^0 dx.$$

Доказательство. Используя $u^\varepsilon(x)$ в качестве пробной функции в интегральном тождестве уравнения (10.36), приходим к априорной оценке

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu_\varepsilon)} + \|\nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon\|_{(L^2(\mathbb{R}^n,\mu_\varepsilon))^n} \leqslant C\|f^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu_\varepsilon)}.$$

По теореме 10.3 можно выбрать подпоследовательность $\varepsilon_k \to 0$ такую, что $u^\varepsilon \rightharpoonup u^0(x)$ слабо в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\varepsilon)$ при $\varepsilon_k \to 0$ и $\nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon \rightharpoonup \nabla^{\mathrm{eff}} u^0(x) + u_1(x,y)$ двухмасштабно в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_\varepsilon)$ при $\varepsilon_k \to 0$, причем $u^0 \in H^{\mathrm{eff}}(\mathbb{R}^n)$ и $u_1 \in L^2(G; L^2_{\mathrm{pot}}(\square, \mu))$. Подставляя в интегральное тождество задачи (10.36) пробную функцию вида $\varepsilon\varphi(x)g(x/\varepsilon)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g(y) \in H^1(\square, \mu)$, находим

$$\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n} a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla^{\mu_\varepsilon} u^\varepsilon(x)\cdot\Big\{\varphi(x)\nabla^{\mu_\varepsilon} g\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + g\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla\varphi(x)\Big\}d\mu_\varepsilon(x)$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n} c\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u^\varepsilon(x)\varphi(x)g\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)d\mu_\varepsilon(x) = \varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(x)\varphi(x)g\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)d\mu_\varepsilon(x).$$

Переход в этом равенстве к двухмасштабному пределу приводит к соотношению

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\square} a(y)\big(\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)+u_1(x,y)\big)\cdot\varphi(x)\nabla^{\mu}g(y)dxd\mu(y)=0,$$

из которого следует, что

$$\int\limits_{\square} a(y)\big(\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)+u_1(x,y)\big)\nabla^{\mu}g(y)\mu(y)=0$$

при почти всех $x\in\mathbb{R}^n$. Поскольку решение задачи (10.27) зависит от ξ линейно, и $\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)=\Pi^{\mathrm{eff}}\nabla u^0(x)$, имеем $u_1(x,y)=v^+_{(\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x))}(y)$.

Выбрав теперь в качестве пробной функции $\varphi\in C_0^\infty(x)$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla^{\mu_\varepsilon}u^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)d\mu_\varepsilon(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n} c\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u^\varepsilon(x)\varphi(x)d\mu_\varepsilon(x)$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(x)\varphi(x)d\mu_\varepsilon(x).$$

После перехода к двухмасштабному пределу получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\square} a(y)\big(\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)+v^+_{(\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x))}(y)\big)\cdot\nabla\varphi(x)dxd\mu(y)$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\square} c(y)u^0(x)\varphi(x)dxd\mu(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\square} f(x)\varphi(x)dxd\mu(y). \tag{10.38}$$

В силу следствия 10.1

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\square} a(y)\big(\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)+v^+_{(\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x))}(y)\big)d\mu(y)=\widehat{A}_1\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)$$

поэтому уравнение (10.38) принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{A}_1\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{c}u^0(x)\varphi(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Остается заметить, что в силу единственности решения предельной задачи все семейство $u^\varepsilon(x)$ сходится к $u^0(x)$.

Докажем теперь, что $u^\varepsilon(x)$ сходится к $u^0(x)$ сильно в $L^2(\mathbb{R}^n,\mu_\varepsilon)$, если f^ε сходятся сильно. С этой целью рассмотрим вспомогательное уравнение

$$-\mathrm{div}_{\mu_\varepsilon}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla^{\mu_\varepsilon}z^\varepsilon\Big)+c\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)z^\varepsilon=u^\varepsilon(x)\quad\text{в } L^2(\mathbb{R}^n,\mu_\varepsilon). \tag{10.39}$$

Поскольку u^ε сходятся слабо в $L^2(\mathbb{R}^n,\mu_\varepsilon)$ к $u^0(x)$, по доказанному уже утверждению $z^\varepsilon(x)$ сходятся в том же переменном пространстве к решению $z^0(x)$ уравнения

$$-\mathrm{div}(\widehat{A}_1\nabla^{\mathrm{eff}}z^0(x))+\widehat{c}z^0=u^0(x).$$

Используя пробную функцию u^ε в интегральном тождестве уравнения (10.39) и пробную функцию $z^\varepsilon(x)$ в интегральном тождестве уравнения (10.36), а затем вычитая полученные равенства, найдем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u^\varepsilon(x))^2d\mu_\varepsilon(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(x)z^\varepsilon(x)d\mu_\varepsilon(x).$$

Поступая аналогично с предельными уравнениями, приходим к равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u^0(x))^2dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x)z^0(x)dx.$$

Выполнив предельный переход в последних двух соотношениях, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u^\varepsilon(x))^2d\mu_\varepsilon(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x)z^0(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u^0(x))^2dx.$$

Для доказательства сходимости потоков вспомним, что

$$a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla^{\mu_\varepsilon}u^\varepsilon\rightharpoonup a(y)(\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)+v^+_{\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)})\quad\text{двухмасштабно в } L^2(\mathbb{R}^n,\mu_\varepsilon).$$

Отсюда следует требуемая сходимость потоков, поскольку

$$\int\limits_{\square}\big(a(y)(\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)+v^+_{\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)})\big)d\mu(y)=\widehat{A}_1\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x).$$

Доказательство сходимости энергий оставляем читателю в качестве упражнения. □

Теорема об усреднении справедлива также для краевых задач. Проиллюстрируем это на примере задачи Дирихле. Пусть G — липшицева ограниченная область. Рассмотрим задачу Дирихле

$$-\mathrm{div}_{\mu_\varepsilon}\Big(a\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\nabla^{\mu_\varepsilon}u^\varepsilon\Big)+c\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)u^\varepsilon=f^\varepsilon(x)\ \text{ в } L^2(G,\mu_\varepsilon),\quad u^\varepsilon\in H^1_0(G,\mu_\varepsilon).\tag{10.40}$$

Приводимое ниже утверждение может быть доказано так же, как предыдущая теорема.

Теорема 10.6. *Пусть $f^\varepsilon(x)$ сходится сильно (слабо) в $L^2(G,\mu_\varepsilon)$ к $f(x)\in L^2(G)$. Тогда в условиях теоремы* 10.5 *справедливо предельное соотношение*

$$u^\varepsilon(x)\longrightarrow u^0(x)\ \ \textit{сильно (слабо) в}\ \ L^2(G,\mu_\varepsilon)\textit{при}\ \varepsilon\to0,$$

где $u^\varepsilon(x)$ — решение уравнения (10.40) *и $u^0(x)$ — решение усредненной задачи*

$$-\mathrm{div}(\widehat{A}_1\nabla^{\mathrm{eff}}u^0)+\widehat{c}u^0=f\ \ \textit{в}\ \ G,\qquad u^0\in H^{\mathrm{eff}}_0(G).$$

Также имеет место сходимость потоков

$$a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla^{\mu_\varepsilon}u^\varepsilon\rightharpoonup\widehat{A}_1\nabla^{\mathrm{eff}}u^0(x)\qquad\textit{слабо в}\ \ (L^2(G,\mu_\varepsilon))^n\quad\textit{при}\varepsilon\to0$$

и, в случае сильной сходимости f^ε, сходимость энергий

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_G a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla^{\mu_\varepsilon}u^\varepsilon(x)\cdot\nabla^{\mu_\varepsilon}u^\varepsilon(x)d\mu_\varepsilon(x)=\int\limits_G\widehat{A}_1\nabla^{\mathrm{eff}}u^0\cdot\nabla^{\mathrm{eff}}u^0dx.$$

10.4. Комментарии. Развитая выше техника может успешно применяться при изучении задач усреднения для высоко контрастных сингулярных и тонких структур, например, сингулярных задач двойной пористости [**55, 26**], для усреднения параболических задач в переменных пространствах, задач теории упругости для тонких каркасов [**56, 60, 107**], нелинейных операторов в переменных пространствах [**57, 78**] и многих других.

Помимо собственно результатов об усреднении большой интерес представляют также изучение близких вопросов, таких как центральная предельная теорема, спектральные задачи, коммутативность диаграммы при

переходе к пределу по размеру периода и по толщине структуры (см. [**130, 56**]) и многих других.

§ 11. Метод согласования асимптотических разложений

11.1. Простой пример. Начнем изложение метода "сращивания" асимптотик с простого примера, приведенного в [**63**]. Этот пример не имеет никакого отношения к краевым задачам, но он наглядно и доступно иллюстрирует сам метод согласования разложений. Идея состоит в том, что функцию, зависящую от малого параметра (обычно это решение сингулярно возмущенной краевой задачи), мы приближаем различными асимптотическими рядами, одним (*внешнее разложение*) — всюду в области за исключением малой окрестности некоторого множества, а другим (*внутреннее разложение*) — в малой окрестности этого множества, называемой *пограничным слоем*. Затем из этих двух рядов строится новый асимптотический ряд (*составное разложение*) как сумма отрезков внешнего и внутреннего разложений минус их общая часть.

Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \frac{e^x}{x+\varepsilon}, \tag{11.1}$$

заданную на отрезке $[0,1]$. Мы хотим исследовать поведение этой функции при $\varepsilon \to 0$. При фиксированном ε она не имеет никаких особенностей на отрезке $[0,1]$, но при стремлении $\varepsilon \to 0$ особая точка функции $f_\varepsilon(x)$ приближается к отрезку $[0,1]$, поэтому при $\varepsilon \to 0$ можно ожидать проблемы со сходимостью асимптотического ряда по степеням ε в окрестности точки $x = 0$.

При любом $x > 0$ функция (11.1) раскладывается в ряд по степеням ε следующим образом:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{\varepsilon}{x} + \frac{\varepsilon^2}{x^2} - \frac{\varepsilon^3}{x^3} + \dots\right), \tag{11.2}$$

и эта асимптотика является равномерной по x на множестве $x \geqslant \delta > 0$. Действительно, при $x \geqslant \delta$

$$\left| f_\varepsilon(x) - \frac{e^x}{x}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\varepsilon^i}{x^i}\right| = \frac{e^x}{x+\varepsilon}\,\frac{\varepsilon^{n+1}}{x^{n+1}} \leqslant \frac{3\varepsilon^{n+1}}{\delta^{n+2}} \tag{11.3}$$

и при малых x ряд (11.2) не приближает функцию $f_\varepsilon(x)$. Легко оценить разность (11.3), например, при $x \leqslant \varepsilon$. Имеем

$$\left| f_\varepsilon(x) - \frac{e^x}{x}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\varepsilon^i}{x^i}\right| = \frac{e^x}{x+\varepsilon}\,\frac{\varepsilon^{n+1}}{x^{n+1}} > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Чтобы представить функцию $f_\varepsilon(x)$ рядом в окрестности точки $x = 0$, введем "быстрые" переменные $\xi = x/\varepsilon$ и разложим функцию $f_\varepsilon(x)$ в другой асимптотический ряд

$$f_\varepsilon(\varepsilon\xi) = \frac{e^{\varepsilon\xi}}{\varepsilon(1+\xi)} = \frac{1}{\varepsilon(1+\xi)}\left(1 + \varepsilon\xi + \varepsilon^2\frac{\xi^2}{2} + \dots\right). \tag{11.4}$$

В этом случае оценка разности функции f_ε и частичной суммы ряда получается так же просто. Именно,

$$\left| f_\varepsilon(\varepsilon\xi) - \frac{1}{\varepsilon(1+\xi)} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\varepsilon\xi)^i}{i!} \right| = \frac{3}{\varepsilon(1+\xi)} \frac{(\varepsilon\xi)^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{11.5}$$

поэтому при $\xi \ll 1/\varepsilon$ ряд (11.4) дает хорошее приближение для $f_\varepsilon(\varepsilon\xi)$. Дадим описание интервалов, где ряды (11.2) и (11.4) хорошо приближают функцию $f_\varepsilon(x)$ (см. рис. 10.1). Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$. Определим отрезки $\Omega = \{x : \varepsilon^\beta \leqslant x \leqslant 1\}$, $\omega = \{x : 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon^\alpha\}$ и заметим, что в силу (11.3) ряд (11.2) хорошо приближает функцию $f_\varepsilon(x)$ в Ω, а в силу (11.5) ряд (11.4) хорошо приближает функцию $f_\varepsilon(x)$ в ω. При этом на отрезке $\{x : \varepsilon^\beta \leqslant x \leqslant \varepsilon^\alpha\}$ — пересечении отрезков Ω и ω — оба ряда хорошо аппроксимируют функцию $f_\varepsilon(x)$ и, в частности, близки друг другу. Благодаря этому обстоятельству у нас есть возможность построить новый (составной) асимптотический ряд, который будет приближать функцию $f_\varepsilon(x)$ уже на всем отрезке $[0, 1]$.

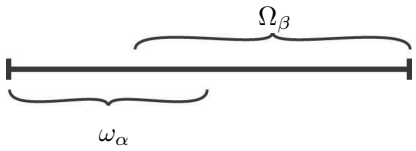

Рис. 11.1

Обозначим через S_n^x частичную сумму ряда (11.2), а через σ_m^ξ частичную сумму ряда (11.4), т.е.

$$S_n^x := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{e^x}{x^{i+1}} \varepsilon^i, \quad \sigma_m^\xi := \sum_{i=0}^{m+1} \frac{\xi^i}{(1+\xi)\, i!} \varepsilon^{i-1}.$$

Полагая, как обычно, $x = \varepsilon\xi$, заметим, что S_n^x и σ_m^ξ близки при малых x и больших ξ, принадлежащих отрезку $\Omega \cap \omega$.

Сравним эти ряды следующим образом.

— Разложим все члены S_n^x в ряды по степеням x в окрестности точки $x = 0$, затем заменим x на $\varepsilon\xi$ и выпишем сумму $S_{m,n}^{\xi,x}$ всех членов со степенями ε^s, где $s \leqslant m$:

$$S_{m,n}^{\xi,x} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^j \frac{\xi^{-j-1+i}}{i!} \varepsilon^{i-1}.$$

— Разложим все члены σ_m^ξ в ряды по степеням ξ в окрестности $+\infty$, заменим ξ на x/ε и выпишем сумму $\sigma_{n,m}^{x,\xi}$ всех членов со степенями ε^s, где $s \leqslant n$:

$$\sigma_{n,m}^{x,\xi} = \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{j-i-1}}{j!} \varepsilon^i.$$

Подставив в $S_{m,n}^{\xi,x}$ вместо ξ переменную $\frac{x}{\varepsilon}$, убеждаемся, что

$$S_{m,n}^{\xi,x} \equiv \sigma_{n,m}^{x,\xi}. \tag{11.6}$$

Это общая часть асимптотик (11.2) и (11.4), а (11.6) является алгебраическим описанием согласованности внешнего и внутреннего разложений.

Теперь строим составное асимптотическое разложение

$$f_\varepsilon^n(x) = (S_n^x + \sigma_n^\xi - S_{n,n}^{\xi,x})\big|_{\xi=x/\varepsilon}$$
$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{e^x}{x^{i+1}}\varepsilon^i + \sum_{i=0}^{n+1}\frac{x^i}{(\varepsilon+x)\,i!} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^j \frac{x^{i-j-1}}{i!}\varepsilon^j. \quad (11.7)$$

Построенная функция $f_\varepsilon^n(x)$ равномерно аппроксимирует $f_\varepsilon(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$ (см. рис. 11.2).

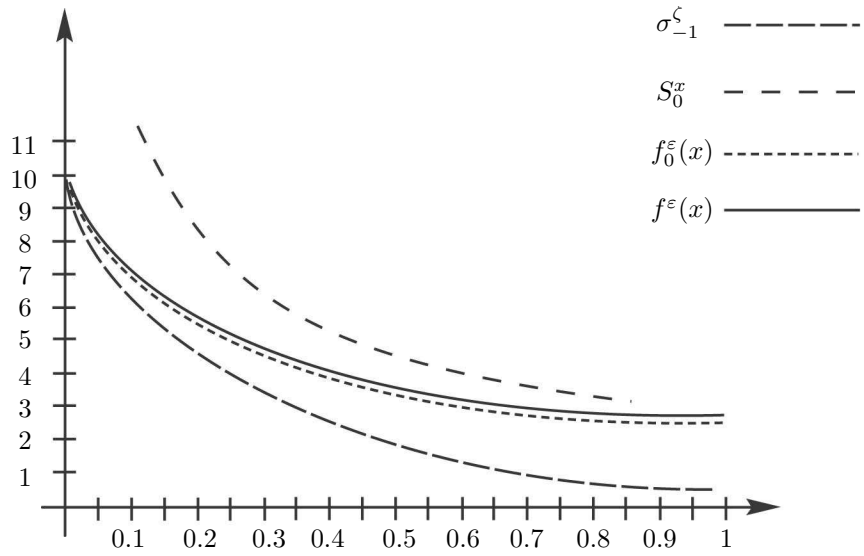

Рис. 11.2. Графики функций и частичных сумм рядов при $\varepsilon = 1/10$; здесь $|f_{1/10}(x) - f^\circ_{1/10}(x)| < 0.07$

Действительно, на отрезке ω функция $f_\varepsilon(x)$ близка к σ_n^ξ, а разность $S_n^x - S_{n,n}^{\xi,x}$ мала. На отрезке Ω функция $f_\varepsilon(x)$ близка к S_n^x, а разность $\sigma_n^\xi - S_{n,n}^{\xi,x} \equiv \sigma_n^\xi - \sigma_{n,n}^{x,\xi}$ мала. Таким образом, ряд (11.7) дает хорошее приближение $f_\varepsilon(x)$ на всем интервале $[0,1]$.

11.2. Задача Дирихле в области с малой полостью. Пусть Ω и ω — ограниченные области в $\mathbb{R}^3$ с бесконечно дифференцируемыми границами и содержащие начало координат, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $\omega_\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega\backslash\overline{\omega_\varepsilon}$, $\Gamma = \partial\Omega$, $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$, $\gamma = \partial\omega$, $\gamma_\varepsilon = \partial\omega_\varepsilon$, $f \in C^\infty(\Gamma)$. Пример такой области представлен на рис. 11.3.

Нашей целью является построение асимптотики при $\varepsilon \to 0$ решения следующей краевой задачи:

$$\Delta u_\varepsilon = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = f \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad (11.8)$$
$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{при} \quad x \in \gamma_\varepsilon. \quad (11.9)$$

Как будет показано ниже, внешнее разложение имеет вид

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i u_i(x), \quad (11.10)$$

где u_0 — решение задачи

$$\Delta u_0 = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \qquad u_0 = f \quad \text{при } x \in \Gamma \tag{11.11}$$

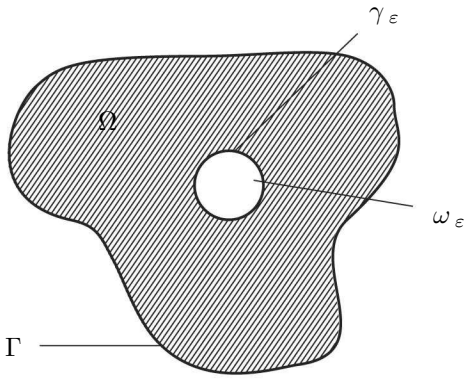

Рис. 11.3

Полином $Y(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, *гармонический*, если $\Delta Y(x) = 0$, и *однородный степени* i, если $Y(x)$ — сумма мономов одной и той же степени i.

Задача 11.1. Докажите, что в окрестности точки $\{0\}$ для гармонической функции $u_0(x)$ имеет место разложение $u_0(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} Y_i^{(0)}(x)$, где $Y_i^{(0)}(x)$ — однородные гармонические полиномы степени i.

Задача 11.2. Пусть $u_0(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{|\alpha|=i} \dfrac{D^\alpha u_0(x)}{\alpha!}\Big|_{x=0} x^\alpha$ — ряд Тейлора для функции $u_0(x)$ в нуле. Будут ли полиномы $Y_i(x) \equiv \sum\limits_{|\alpha|=i} \frac{D^\alpha u_0(x)}{\alpha!}\Big|_{x=0} x^\alpha$ гармоническими? Здесь $\alpha = (\alpha_{H^1(\Omega)}, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha! = \alpha_{H^1(\Omega)}! \cdots \alpha_d!$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_{H^1(\Omega)}}}{\partial x_{H^1(\Omega)}^{\alpha_{H^1(\Omega)}}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$, $x^\alpha = x_{H^1(\Omega)}^{\alpha_{H^1(\Omega)}} \cdots x_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = \alpha_{H^1(\Omega)} + \cdots + \alpha_d$.

Пусть u_0 — решение задачи (11.11). Известно, что u_0 принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega})$ (напомним, что $f \in C^\infty(\Gamma)$) и в окрестности нуля представима в виде ряда (см. задачу 11.1)

$$u_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i^{(0)}(x). \tag{11.12}$$

Здесь и далее $Y_i^{(m)}$ и $X_i^{(q,p)}$ обозначают однородные гармонические полиномы степени i. Очевидно, что $Y_0^{(0)} = u_0(0)$. Так как функция u_0 удовлетворяет (11.8), а отверстие ω_ε мало, естественно предположить, что функция u_ε близка к u_0. Очевидным "недостатком" u_0 является то, что она не удовлетворяет граничному условию (11.9). Поэтому в окрестности малого отверстия ω_ε асимптотику решения (11.8), (11.9) будем искать в другом виде, при этом будем требовать, чтобы в окрестности ω_ε были удовлетворены как уравнение (11.8), так и граничное условие (11.9). Так как область ω_ε получена из фиксированной области ω сжатием последней в ε^{-1} раз, в окрестности ω_ε решение естественно искать в виде ряда v_ε с коэффициентами, зависящими от "внутренних" переменных $\xi = x\varepsilon^{-1}$.

Сначала дадим нестрогое описание идеи метода согласования. Обозначим $r = |x|$. Если $0 < q < 1$, то при $\varepsilon^q < r < 2\varepsilon^q$ для $\rho = |\xi|$ справедливо неравенство $\varepsilon^{-1+q} < \rho < 2\varepsilon^{-1+q}$, т.е. в указанной области x мало, а ξ — велико. От асимптотического ряда для $u_\varepsilon(x)$ (от которого у нас есть пока нулевой член $u_0(x)$) и асимптотического ряда $v_\varepsilon(\xi)$ (структуру которого мы пока вообще не знаем) требуется, чтобы они совпадали в указанной промежуточной зоне, где x — мало, а ξ — велико. Тогда в этой зоне мы можем "перескочить" с одного разложения на другое. Далее для определенности полагаем $q = 1/2$.

Определим вначале структуру рядов v_ε и u_ε. Переходя в (11.12) к переменным ξ, получаем, что при $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ (или, что то же самое, при $\varepsilon^{-1/2} < \rho < 2\varepsilon^{-1/2}$)

$$u_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i^{(0)}(\xi). \tag{11.13}$$

Из (11.13) и условия согласования рядов следует, что для членов $v_i(\xi)$ разложения $v_\varepsilon(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi)$ должны иметь место асимптотики

$$v_i(\xi) \sim Y_i^{(0)}(\xi) \quad \text{при} \quad \rho \to \infty. \tag{11.14}$$

Подставляя (11.14) в (11.8) и (11.9), переходя к переменным ξ и выписывая отдельно равенства при одинаковых степенях ε, получаем систему краевых задач

$$\Delta_\xi v_i = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}^3\backslash\overline{\omega}, \qquad v_i = 0 \ \text{ на } \ \gamma. \tag{11.15}$$

Решения этих задач не определены однозначно, так как для них отсутствуют условия на бесконечности. Очевидно, что для любого однородного гармонического полинома $Y_i^{(0)}(\xi)$ существуют решения $v_i = V_i^{(0)}$ задачи (11.15), имеющие главный член асимптотики на бесконечности $Y_i^{(0)}(\xi)$. Действительно, представив $V_i^{(0)}$ в виде суммы $Y_i^{(0)}$ и гармонической в $\mathbb{R}^3\backslash\overline{\omega}$ функции (убывающей на бесконечности), для которой граничное значение на γ равно $-Y_i^{(0)}(\xi)\Big|_\gamma$, получим решения задачи (11.15), имеющие на бесконечности асимптотики

$$V_i^{(0)}(\xi) = Y_i^{(0)}(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} X_j^{(i,0)}(\xi)\rho^{-2j-1} \tag{11.16}$$

и, следовательно, удовлетворяющие (11.14).

Задача 11.3. Докажите единственность решения задачи Дирихле

$$\Delta V = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3\backslash\omega, \quad V|_{\partial\omega} = \varphi, \quad V \to 0 \ \text{ при } \ |\xi| \to 0.$$

Задача 11.4. Докажите, что любая убывающая на бесконечности гармоническая функция, заданная в $\mathbb{R}^3\backslash\omega$ может быть представлена при $|\xi| > R_0$ в виде сходящегося ряда $V(\xi) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} X_j(\xi)\rho^{-2j-1}$, где $X_j(\xi)$ — однородные гармонические полиномы степени j.

Задача 11.5. Докажите, что указанное разложение единственно.

Очевидно, что при $i \geqslant 1$ функция $V_i^{(0)} + \sum\limits_{j=0}^{i-1} a_j V_j^{(0)}$ также удовлетворяет (11.14), (11.15) для любых постоянных a_i. Положим $v_0 = V_0^{(0)}$, а точный вид остальных v_i уточним в дальнейшем.

Далее, переписывая асимптотику (11.16) для v_0 во "внешних" переменных x, получаем, что при $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ (или, что то же самое, при $\varepsilon^{-1/2} < \rho < 2\varepsilon^{-1/2}$)

$$v_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) = Y_0^{(0)} + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} X_j^{(0,0)}(x) r^{-2j-1}. \tag{11.17}$$

Из (11.17) и условия согласования рядов следует, что для членов разложения (11.10), $u_\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x)$ должны быть выполнены асимптотические условия

$$u_0(x) \sim Y_0^{(0)}, \quad u_{j+1}(x) \sim X_j^{(0,0)}(x) r^{-2j-1} \quad \text{при} \quad r \to 0. \tag{11.18}$$

Подставляя (11.10) в (11.8) и выписывая отдельно равенства при одинаковых степенях ε, получаем систему краевых задач

$$\Delta u_i = 0 \ \text{ в } \ \Omega\backslash\{0\}, \qquad u_i = \delta_i^0 f \ \text{ при } \ x \in \Gamma, \tag{11.19}$$

где δ_i^j — символ Кронекера. Отметим, что u_j при $j \geqslant 1$ имеют сингулярности в нуле, поэтому нуль не является устранимой особой точкой. Очевидно, что u_0 удовлетворяет (11.18), (11.19) и для любых однородных гармонических полиномов существуют решения краевых задач (11.19), имеющие главные члены асимптотик в окрестности нуля вида (11.18). Действительно, представив u_{j+1} в виде суммы $X_j^{(0,0)} r^{-2j-1}$ и гармонической в Ω функции, получим решения (11.19), имеющие в нуле асимптотики (11.18). Однако при $i \geqslant 1$ функция $u_{i+1} + \sum\limits_{j=0}^{i-1} a_j u_{j+1}$ также удовлетворяет (11.18) и (11.19) для любых постоянных a_i. Поэтому вид младших членов асимптотик в нуле для u_{i+1} при $i \geqslant 1$ будет уточняться (в отличие от функции u_0, которую мы определили на этом шагу окончательно).

Приступим к изложению метода согласования асимптотических разложений на строгом уровне.

Пусть функции $U_i(x)$ представлены в виде рядов Лорана вида

$$U_i(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Phi_{ij}(x), \tag{11.20}$$

где Φ_{ij} — однородные полиномы степени j при $j \geqslant 0$ вида

$$\Phi_{ij}(x) = \frac{\widetilde{\Phi}_{ij}(x)}{r^{2j+1}}, \tag{11.21}$$

где $\widetilde{\Phi}_{ij}(x)$ — однородные полиномы степени $-j-1$ при $j < 0$. Для функций $U(x,\varepsilon)$, заданных рядом $U(x,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i U_i(x)$, определим оператор $K_i(U(x,\varepsilon))$ следующим образом:

$$K_i(U(x,\varepsilon)) \equiv \sum_{l=-i}^{\infty} \Phi_{l,i-l}(\xi).$$

Этот оператор получен заменой коэффициентов ряда $U(x,\varepsilon)$ на их ряды (11.20), (11.21) в нуле, переходом к переменным $\xi = x/\varepsilon$ и суммированием в полученном двойном ряду членов при ε^i. Положим далее $\mathscr{K}_N(U(x,\varepsilon)) := \sum\limits_{i\leqslant N} K_i(U(x,\varepsilon))$. Пусть функции $V_i(\xi)$ представлены в виде рядов Лорана

$$V_i(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_{ij}(\xi), \tag{11.22}$$

где W_{ij} — однородные полиномы степени j при $j \geqslant 0$ вида

$$W_{ij}(\xi) = \frac{\widetilde{W}_{ij}(\xi)}{\rho^{2j+1}}, \tag{11.23}$$

где $\widetilde{W}_{ij}(\xi)$ — однородные полиномы степени $-j-1$ при $j<0$. Для функций $V(\xi,\varepsilon)$, заданных рядами $V(\xi,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i V_i(\xi)$, определим оператор $M_i(V(\xi,\varepsilon))$:

$$M_i(V(\xi,\varepsilon)) \equiv \sum_{l=-i}^{\infty} W_{l,-i+l}(\xi).$$

Этот оператор получен заменой коэффициентов ряда $V(\xi,\varepsilon)$ рядами (11.22), (11.23) на бесконечности, переходом к переменным $x = \varepsilon\xi$ и суммированием в полученном двойном ряду членов при ε^i. Далее полагаем

$$\mathscr{M}_N(V(\xi,\varepsilon)) = \sum_{i\leqslant N} M_i(V(\xi,\varepsilon)).$$

Функция $u(x)$ *однородна степени* i, если $u(\varkappa x) = \varkappa^i x$ для любых $x \in \mathbb{R}^d$ и $\varkappa > 0$ (i может быть любым вещественным числом).

Задача 11.6. Пусть $u(x)$ — однородная функция степени i, дифференцируемая при $x \neq 0$. Будет ли $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(x)$ однородной функцией? Если "да", то какова ее степень однородности?

Обозначим через $\widehat{u}_{\varepsilon,N}$ и $\widehat{v}_{\varepsilon,N}$ частичные суммы рядов u_ε и v_ε соответственно, а через $H_i^{(m)}(x)$ и $h_i^{(q)}(\xi)$ — однородные функции степени i.

Определение 11.1. Функция $u(x)$ имеет *дифференцируемую асимптотику* при $x \to 0$, если существуют однородные степени j функции $U_j(x)$ (j целое) такие, что

$$D^\alpha\left(u(x) - \sum_{j=-i}^{N} U_j(x)\right) = O(|x|^{1+N-|\alpha|}) \quad \forall\ N \geqslant i \quad \text{при } |\alpha| \geqslant 0.$$

Аналогичное определение дается для асимптотики на бесконечности и для (асимптотических) равенств.

Лемма 11.1. *Пусть коэффициенты ряда функции u_ε принадлежат $C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$ и имеют при $r \to 0$ дифференцируемые асимптотики*

$$u_i(x) = \sum_{j=-i}^{\infty} H_j(x),$$

а коэффициенты ряда v_ε, удовлетворяющего (11.14), *принадлежат пространству $C^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\omega)$ и имеют при $\rho\to\infty$ дифференцируемые асимптотики*

$$v_i(\xi)=\sum_{j=-\infty}^{i}h_j(\xi).$$

Тогда для любого $N\geqslant 0$ справедливы дифференцируемые равенства

$$\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)-\mathscr{K}_N(\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x))=O(r^{N+1}+\varepsilon^N r)\quad \textit{при}\quad r\to 0,$$
$$\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi)-\mathscr{M}_N(\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi))=O(\rho^{-N-1}+\varepsilon^N\rho^{-1})\quad \textit{при}\quad \rho\to\infty.$$

Справедливость этой леммы вытекает из определения операторов $\mathscr{K}_N$ и $\mathscr{M}_N$ и асимптотик u_i и v_i, но никак не связана ни с краевыми задачами для этих коэффициентов, ни тем более с "согласованностью" этих рядов.

Пусть $\chi(t)$ — срезающая бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $t<1$ и единице при $t>2$ (см. рис. 11.4). Обозначим $\widetilde{u}_{\varepsilon,N}(x)=\chi(r\varepsilon^{-1/2})\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)+(1-\chi(r\varepsilon^{-1/2}))\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi)$.

На рис. 11.5 представлены зоны действия слагаемых в правой части.

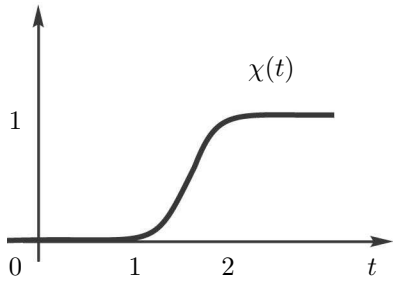

Рис. 11.4. Срезающая функция

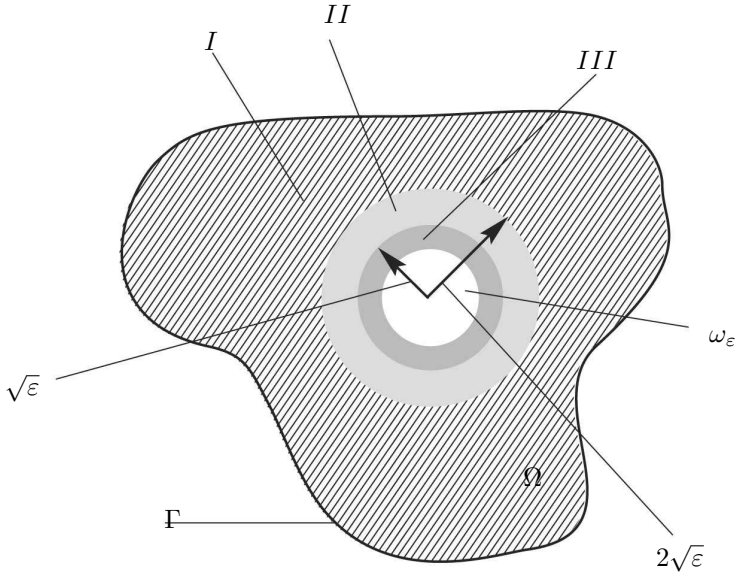

Рис. 11.5. *I* — зона действия ряда $\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)$, *II* – зона согласования, *III* — зона действия ряда $\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi)$

Из определения функции $\widetilde{u}_{\varepsilon,N}(x)$ сразу вытекает следующее утверждение.

Лемма 11.2. *Пусть коэффициенты ряда u_ε принадлежат пространству $C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$ и являются решениями краевых задач* (11.19)*, а коэффициенты ряда v_ε принадлежат $C^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\omega)$ и являются решениями краевых задач* (11.15)*. Тогда функция $\widetilde{u}_{\varepsilon,N}(x)$ принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon})$ и является решением краевой задачи*

$$\Delta\widetilde{u}_{\varepsilon,N} = F_N \text{ при } x\in\Omega_\varepsilon, \quad \widetilde{u}_{\varepsilon,N} = f \text{ при } x\in\Gamma, \quad \widetilde{u}_{\varepsilon,N} = 0 \text{ при } x\in\gamma_\varepsilon,$$

где

$$F_N(x,\varepsilon) = 2\sum_{j=1}^{3}\chi_{x_j}(r\varepsilon^{-1/2})(\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)-\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi))_{x_j} + (\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)-\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi))\Delta\chi(r\varepsilon^{-1/2}). \tag{11.24}$$

Подчеркнем, что последнее утверждение никак не связано ни с асимптотиками коэффициентов рядов u_ε и v_ε (в нуле и на бесконечности соответственно), ни тем более с согласованностью рядов. Согласование рядов будет заключаться в доказательстве существования таких рядов, что "порядок малости" правой части (11.24) растет неограниченно вместе с N.

Ключевым моментом согласования рядов является следующая

Теорема 11.1. *Пусть выполнены условия леммы* 11.2 *и*

$$\mathscr{K}_N(\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)) = \mathscr{M}_N(\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi)). \tag{11.25}$$

Тогда

$$|F_N| \leqslant C_N\varepsilon^{\frac{N-1}{2}}. \tag{11.26}$$

Доказательство. Из (11.25) и леммы 11.1 следует, что при $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ выполнены равенства

$$\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)-\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi) = O(\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}), \quad (\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)-\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi))_{x_j} = O(\varepsilon^{N/2}). \tag{11.27}$$

Так как носители функций $\chi_{x_i}(r\varepsilon^{-1/2})$ и $\Delta\chi(r\varepsilon^{-1/2})$ лежат в кольце $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ и $\varepsilon^{1/2}|\chi_{x_j}(r\varepsilon^{-1/2})| + \varepsilon|\Delta\chi(r\varepsilon^{-1/2})| \leqslant C$, из (11.27) и (11.24) вытекает (11.26). □

Заметим, что выбрав u_0 и v_0, мы уже обеспечили равенство (11.25) при $N = 0$. Перейдем к описанию формальной процедуры построения остальных коэффициентов. Будем искать v_i в виде

$$v_i(\xi) = \sum_{j=0}^{i} V_i^{(j)}(\xi), \tag{11.28}$$

где $V_i^{(0)}$ — построенные ранее функции, а остальные гармонические слагаемые будут определены на следующих шагах согласования. Положим

$$v_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{\min\{n,i\}} V_i^{(j)}(\xi), \quad v_\varepsilon^{(n)}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_i^{(n)}(\xi)$$

и обозначим через $\widehat{v}_{\varepsilon,N}^{(n)}(\xi)$ частичные суммы рядов $v_\varepsilon^{(n)}(\xi)$. По определению $\widehat{v}_{\varepsilon,N}^{(N)} = \widehat{v}_{\varepsilon,N}$. Заметим также, что в результате проделанной процедуры согласования (т.е. в силу (11.13), (11.16)) мы уже добились того, что

$$\mathscr{K}_N(\widehat{u}_{\varepsilon,0}(x)) = \mathscr{M}_0(\widehat{v}_{\varepsilon,N}^{(0)}(\xi)). \tag{11.29}$$

Далее, в силу определения оператора $\mathscr{M}_q$

$$\mathscr{M}_{H^1(\Omega)}(\widehat{v}^{(0)}_{\varepsilon,N}(\xi)) = \mathscr{M}_0(\widehat{v}^{(0)}_{\varepsilon,N}(\xi)) + M_{H^1(\Omega)}(\widehat{v}^{(0)}_{\varepsilon,N}(\xi)), \tag{11.30}$$

где в силу (11.28) и (11.16)

$$M_{H^1(\Omega)}(\widehat{v}^{(0)}_{\varepsilon,N}(\xi)) = \varepsilon X_0^{(0,0)} r^{-1}. \tag{11.31}$$

Чтобы "устранить" невязку $\varepsilon X_0^{(0,0)} r^{-1}$, мы ввели коэффициент $u_{H^1(\Omega)}(x)$, который в окрестности нуля задается рядом

$$u_{H^1(\Omega)}(x) = X_0^{(0,0)} r^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} Y_i^{(1)}(x). \tag{11.32}$$

В силу определения оператора $\mathscr{K}_q$ и (11.32) имеем

$$\mathscr{K}_N(\widehat{u}_{\varepsilon,1}(x)) = \mathscr{K}_N(\widehat{u}_{\varepsilon,0}(x)) + \mathscr{K}_N(\varepsilon u_{H^1(\Omega)}(x)), \tag{11.33}$$

$$\mathscr{K}_N(\varepsilon u_{H^1(\Omega)}(x)) = X_0^{(0,0)} \rho^{-1} + \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^i Y_i^{(1)}(\xi). \tag{11.34}$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части (11.34) уже согласовано с $v_0 = V_0^{(0)}$. Для устранения остальных невязок в правой части (11.34) мы "уточняем" v_i при $i \geqslant 1$, добавляя к ряду $v_\varepsilon^{(0)}$ слагаемые $\varepsilon^i V_i^{(1)}$ и требуя, чтобы, во-первых, $V_i^{(1)}$ удовлетворяли (11.15) (тогда коэффициенты $v_i^{(1)}$ будут по-прежнему решениями (11.15)) и, во-вторых, имели главные члены асимптотик на бесконечности

$$V_i^{(1)}(\xi) \sim Y_{i-1}^{(1)}(\xi) \tag{11.35}$$

(чтобы устранить возникшие невязки в правой части (11.34)). Такие решения задачи (11.15), очевидно, существуют. Более того, существуют решения этой задачи, представимые на бесконечности в виде ряда $V_i^{(1)}(\xi) = Y_{i-1}^{(1)}(\xi) + \sum\limits_{j=0}^{\infty} X_j^{(i,1)}(\xi)\rho^{-2j-1}$. В результате, в силу (11.29)–(11.35) мы получаем равенство

$$\mathscr{K}_N(\widehat{u}_{\varepsilon,m}(x)) = \mathscr{M}_{H^1(\Omega)}(\widehat{v}^{(m)}_{\varepsilon,N}(\xi)) \tag{11.36}$$

для $m = 1$, из которого в силу равенства $\widehat{v}^{(m)}_{\varepsilon,m}(\xi) = \widehat{v}_{\varepsilon,m}(\xi)$ вытекает (11.25) для $N = 1$. Таким образом, проделаны два шага согласования (назовем их нулевым и первым), при этом построены коэффициенты $u_0(x)$, $u_{H^1(\Omega)}(x)$ и $v_j^{(1)}(\xi)$, $j \leqslant N$ (и тем самым в силу (11.28) окончательно определены v_0 и $v_{H^1(\Omega)}$) такие, что выполнены равенство (11.36) для $m = 1$, а с ним и равенство (11.25) для $N = 1$. Дальнейший алгоритм согласования полностью аналогичен. На n-м шаге, устраняя невязку во внешнем разложении, определяем коэффициент u_n. Далее, для устранения невязок, возникших уже из-за u_n, во внутреннем разложении вводим слагаемые $V_i^{(n)}$ и в результате добиваемся равенства (11.36) для $m = n$, а, следовательно, и равенства (11.25) для $N = n$. Соберем вместе определения всех вспомогательных функций, возникающих при построении асимптотического разложения методом согласования, и сформулируем полученные результаты в виде строгих утверждений.

Определим функции $Y_j^{(0)}(x)$ как гармонические полиномы степени j в разложениях $u_0(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} Y_j^{(0)}(\xi)$ в окрестности точки 0, где $u_0(x)$ — решение краевой задачи

$$\Delta u_0 = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u_0 = f \ \text{ на } \ \partial\Omega.$$

Определим для каждого гармонического полинома $Y_j^{(0)}$ функцию $V_j^{(0)}(\xi)$, гармоническую в $\mathbb{R}^3\backslash\overline{\omega}$ и равную сумме $Y_j^{(0)}(\xi)$ и убывающей на бесконечности гармонической функции $\widetilde{V}_j^{(0)}(\xi)$ так, что $Y_j^{(0)}(\xi) + \widetilde{V}_j^{(0)}(\xi) = 0$ на ω. Этими условиями $\widetilde{V}_j^{(0)}(\xi)$ определяется однозначно. Разложим $\widetilde{V}_j^{(0)}(\xi)$ в ряд при $|\xi| > R_0$ (R_0 — достаточно большое число):

$$\widetilde{V}_j^{(0)}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i^{(j,0)}(\xi)\rho^{-2i-1},$$

где $X_i^{(j,0)}(\xi)$ — гармонические полиномы степени i. Такое разложение однозначно, и тем самым однозначно определены гармонические полиномы $X_i^{(j,0)}(\xi)$. Определим функцию $\widetilde{u}_{H^1(\Omega)}(x)$ в $\Omega\backslash\{0\}$ с особенностью в точке $\{0\}$ по формуле $\widetilde{u}_{H^1(\Omega)}(x) = X_0^{(0,0)} r^{-1}$ и построим гармоническую в Ω функцию $\overline{u}_{H^1(\Omega)}(x)$ такую, что $\overline{u}_{H^1(\Omega)}(x) + \widetilde{u}_{H^1(\Omega)}(x) = 0$ на $\partial\Omega$. Разложим функцию $\overline{u}_{H^1(\Omega)}(x)$ в ряд по однородным гармоническим полиномам в δ_0-окрестности начала координат:

$$\overline{u}_{H^1(\Omega)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j^{(1)}(x).$$

Это разложение определяет гармонические полиномы $Y_j^{(1)}(x)$. Повторим шаг индукции для построения гармонических полиномов $X_i^{(j,q)}(\xi)$ и $Y_j^{(q+1)}(x)$ при $q = 1$. Для этого так же, как на предыдущем шаге, введем гармонические функции $\widetilde{V}_j^{(q)}(\xi)$ по полиному $Y_j^{(j,q)}(\xi)$ так, чтобы $\widetilde{V}_j^{(q)}(\xi) + Y_j^{(j,q)}(\xi) = 0$ на ω, после чего $X_i^{(j,q)}(\xi)$ определяются из разложения $\widetilde{V}_j^{(q)}(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} X_i^{(j,q)}(\xi)\rho^{-2i-1}$. Полагаем

$$\widetilde{u}_{q+1}(x) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{t=0}^{q-j} X_j^{(q-j,t)}(x) r^{-2j-1},$$

где $X_j^{(q,t)}(x)$ введены ранее, и определяем гармоническую в Ω функцию $\overline{u}_{q+1}(x)$ такую, что $\overline{u}_{q+1}(x) + \widetilde{u}_{q+1}(x) = 0$ на $\partial\Omega$. Разлагаем $\overline{u}_{q+1}(x)$ в ряд по однородным полиномам в окрестности $|x| < \delta_0$ точки $\{0\}$:

$$\overline{u}_{q+1}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j^{(q+1)}(x).$$

В результате однозначно определены гармонические полиномы $Y_j^{(q+1)}(x)$.

Выполненный шаг индукции применим при любом $q = 0, 1, 2, \ldots$, поэтому однозначно определены гармонические полиномы $Y_j^{(q)}(x)$ и $X_j^{(q,t)}(\xi)$ при всех значениях q.

Теорема 11.2. *Пусть N — произвольное натуральное число. Тогда для любого $n \leqslant N$ существуют функции $u_q(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$, $0 \leqslant q \leqslant n$, являющиеся решениями краевых задач* (11.19) *и имеющие в нуле асимптотики* (11.12) *при $q = 0$ и*

$$u_q(x) = \sum_{j=0}^{q-1}\Big(\sum_{t=0}^{q-1-j} X_j^{(q-1-j,t)}(x)\Big) r^{-2j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} Y_j^{(q)}(x) \quad \text{при} \quad q > 0,$$

и функции $V_i^{(t)}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\omega)$, $0 \leqslant t \leqslant i \leqslant n$, являющиеся решениями краевых задач (11.15) *и имеющие на бесконечности асимптотики*

$$V_i^{(t)}(\xi) = Y_{i-t}^{(t)}(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} X_j^{(i,t)}(\xi)\rho^{-2j-1}.$$

Причем сами функции u_q и $V_i^{(t)}$ от n и N не зависят.

Теперь непосредственно проверяется следующее утверждение.

Следствие 11.1. *Пусть u_q и $V_i^{(t)}$ удовлетворяют утверждениям теоремы* 11.2, *а v_i определяются равенствами* (11.28). *Тогда эти коэффициенты являются решениями задач* (11.15) *и* (11.19), *при этом справедливо равенство* (11.25) (*условие согласования*).

Из теорем 11.1 и 11.2, следствия 11.1, леммы 11.2 и принципа максимума вытекает, что

$$|u_\varepsilon(x) - \widetilde{u}_{\varepsilon,N}(x)| \leqslant C_N \varepsilon^{N_{H^1(\Omega)}}, \tag{11.37}$$

где $N_{H^1(\Omega)} = (N-1)/2$. Отсюда в силу произвола в выборе N следует, что построено полное асимптотическое разложение решения (11.8), (11.9). Учитывая, что по построению $|\widetilde{u}_{\varepsilon,L}(x) - \widetilde{u}_{\varepsilon,L+1}(x)| = O(\varepsilon^{L/2})$, легко показать, что оценка (11.37) остается справедливой и для $N_{H^1(\Omega)} = N/2$.

Задача 11.7. Получите оценку близости функций $u_\varepsilon(x)$ и $\widetilde{u}_{\varepsilon,N}(x)$ в норме пространства $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Для желающих более подробно ознакомиться с методом согласования асимптотических разложений (или, как его иногда называют, *методом сращивания асимптотических разложений*) мы рекомендуем монографию [**63**], а для ознакомления с другими версиями этого метода могут оказаться полезными работы [**80, 36**]. Заметим, что метод согласования асимптотических разложений в последнее время активно применяется для построения асимптотик в задачах усреднения (см., например, [**39**]).

11.3. Возмущение задачи Дирихле сменой типа граничного условия на малом участке границы. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с бесконечно дифференцируемой границей, совпадающая в окрестности начала координат с полуплоскостью $x_2 > 0$, ν — внешняя нормаль, γ и γ_ε — интервалы $(-1,1)$ и $(-\varepsilon,\varepsilon)$ соответственно на оси $Ox_{H^1(\Omega)}$, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega\backslash\overline{\gamma_\varepsilon}$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. В данном разделе мы построим асимптотику при $\varepsilon \to 0$ решения краевой задачи

$$\Delta u_\varepsilon = f \text{ при } x \in \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ при } x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ при } x \in \gamma_\varepsilon. \tag{11.38}$$

Внешнее разложение решения u_ε ищем в виде

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x), \tag{11.39}$$

где u_0 — решение задачи

$$\Delta u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{11.40}$$

Для простоты изложения будем предполагать, что в некоторой окрестности начала координат функция f тождественно равна нулю. В этом случае решение u_0 задачи Дирихле (11.40) может быть продолжено через границу $\{x_2 = 0\}$ в нижнюю полуплоскость так, что продолженная функция будет гармонической в окрестности начала координат и, следовательно, представима в виде ряда

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(0)} r^j \sin(j\theta) \tag{11.41}$$

в некоторой фиксированной окрестности начала координат, где (r, θ) — полярные координаты, а $a_i^{(0)}$ — постоянные коэффициенты ряда Тейлора.

Задача 11.8. Докажите, что такое продолжение существует.

Кроме того, в силу свойств решений эллиптических уравнений $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Так как функция u_0 удовлетворяет уравнению в (11.38), а длина γ_ε мала, естественно предположить, что функция u_ε близка к u_0. Очевидным "недостатком" u_0 является то, что она не удовлетворяет граничному условию на γ_ε. Поэтому в окрестности γ_ε асимптотику решения (11.38) будем искать в другом виде, т.е. строить внутреннее разложение. Поскольку область γ_ε получена из фиксированной области γ сжатием последней в ε^{-1} раз, в окрестности γ_ε решение естественно искать в виде ряда v_ε с коэффициентами, зависящими от "внутренних" переменных $\xi = x\varepsilon^{-1}$.

Если $0 < q < 1$, то при $\varepsilon^q < r < 2\varepsilon^q$ для $\rho = |\xi|$ справедливо неравенство $\varepsilon^{-1+q} < \rho < 2\varepsilon^{-1+q}$, т.е. в указанной области x мало, а ξ — велико. От асимптотических рядов $u_\varepsilon(x)$ (от которого у нас есть пока нулевой член $u_0(x)$) и $v_\varepsilon(\xi)$ (структуру которого мы пока вообще не знаем) требуется, чтобы они совпадали в указанной промежуточной зоне, где x мало, а ξ — велико. Тогда, грубо говоря, в этой зоне мы можем "перейти" с одного разложения на другое. Далее для определенности будем полагать $q = 1/2$.

Исходя из этого соображения, определим вначале структуру рядов v_ε и u_ε. Переходя в (11.41) к переменным ξ, получаем, что при $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ (или, что то же самое, при $\varepsilon^{-1/2} < \rho < 2\varepsilon^{-1/2}$)

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j a_j^{(0)} \rho^j \sin(j\theta). \tag{11.42}$$

Из (11.42) и условия согласования рядов следует, что для искомого "внутреннего" разложения

$$v_\varepsilon(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j(\xi) \tag{11.43}$$

должны выполняться условия

$$v_j(\xi) \sim a_j^{(0)} \rho^j \sin(j\theta) \quad \text{при} \quad \rho \to \infty. \tag{11.44}$$

Подставляя (11.43) в (11.38), переходя к переменным ξ, выписывая формальные равенства при одинаковых степенях ε, получаем систему краевых задач

$$\Delta_\xi v_j = 0 \text{ при } \xi_2 > 0, \quad v_j = 0 \text{ при } \xi \in \Gamma, \quad \frac{\partial v_j}{\partial \xi_2} = 0 \text{ при } \xi \in \gamma, \qquad (11.45)$$

где $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 = 0\} \backslash \gamma$ (см. рис. 11.6).

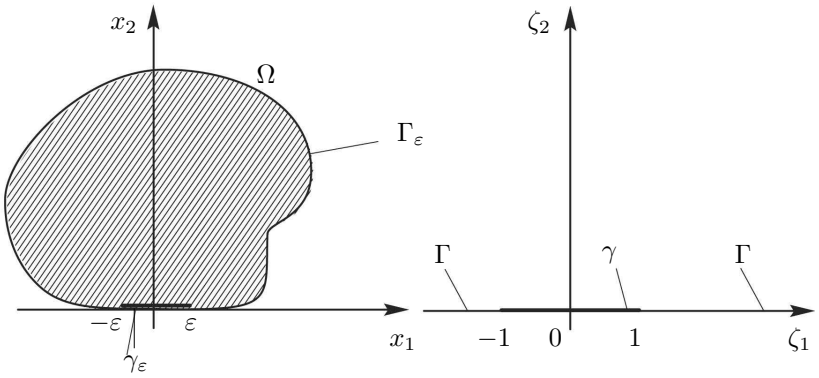

Рис. 11.6

Определим при $j \geqslant 1$ функцию $X_j(\xi) = \operatorname{Im}(z^{j-1}\sqrt{z^2-1})$, где $z = \xi_{H^1(\Omega)} + \mathrm{i}\,\xi_2$, Im обозначает мнимую часть комплексного числа, и i — мнимая единица.

Задача 11.9. Докажите, что $X_j(\xi)$ является решением системы (11.45) и имеет при $\rho \to \infty$ асимптотику

$$X_j(\xi) = \rho^j \sin(j\theta) + \sum_{k=1}^{j-1} \widetilde{\beta}_{-k}^{(j)} \rho^k \sin(k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\beta}_k^{(j)} \rho^{-k} \sin(k\theta).$$

Из результата задачи 11.9 следует, что существуют линейные комбинации $V_j(\xi)$ функций $X_j(\xi)$, которые являются решениями (11.45) и имеют при $\rho \to \infty$ асимптотики $Y_j(\xi) = \rho^j \sin(j\theta) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(j)} \rho^{-k} \sin(k\theta)$.

Таким образом, функции

$$\begin{aligned} &v_{H^1(\Omega)}(\xi) = a^{(0)}_{H^1(\Omega)} Y_{H^1(\Omega)}(\xi), \\ &v_2(\xi) = a_2^{(0)} Y_2(\xi), \\ &v_n(\xi) = a_n^{(0)} Y_n(\xi) + \sum_{j=1}^{n-2} A_j^{(n-j)} Y_j(\xi) \quad \text{при} \quad n \geqslant 3 \end{aligned} \qquad (11.46)$$

удовлетворяют (11.44), (11.45) при любых постоянных $A_j^{(k)}$, $k \geqslant 2$. Эти постоянные мы определим позднее. Подчеркнем, что $a_j^{(0)}$ уже определены из разложения (11.41) функции u_0 в нуле. Следовательно, в силу (11.46) $v_{H^1(\Omega)}$ и v_2 определены однозначно.

Из (11.46) следует, что при $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ (или, что то же самое, при $\varepsilon^{-1/2} < \rho < 2\varepsilon^{-1/2}$):

$$v_n(\xi) = a_n^{(0)}\rho^n \sin(n\theta) + \sum_{j=1}^{n-2} A_j^{(n-j)}\rho^j \sin(j\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)}\rho^{-k}\sin(k\theta), \quad (11.47)$$

причем, так как $v_{H^1(\Omega)}$, v_2 уже определены, определены и $b_k^{(1)}$, $b_k^{(2)}$.

Подчеркнем, что, определяя при фиксированном n все коэффициенты $A_j^{(n-j)}$ в (11.46), мы определяем v_i и, следовательно, все коэффициенты $b_k^{(n)}$ в (11.47).

Переходя в (11.47) к внешним переменным x и подставляя (11.47) в (11.43), из условия согласования рядов $u_\varepsilon(x)$ и $v_\varepsilon(\xi)$ получаем, что члены ряда (11.39) имеют следующие асимптотики при $r \to 0$:

$$u_0(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(0)} r^j \sin(j\theta), \quad u_{k+1}(x) \sim \sum_{j=1}^{k} b_j^{(k+1-j)} r^{-j}\sin(j\theta) \quad (11.48)$$

Подставляя (11.39) в (11.38), формально выписывая равенства при одинаковых степенях ε, получаем систему краевых задач

$$\Delta u_j = \delta_j^0 f \ \text{ при } \ x \in \Omega, \quad u_j = 0 \ \text{ при } \ x \in \partial\Omega\backslash\{0\}, \quad (11.49)$$

где δ_i^j — символ Кронекера. По построению u_0 удовлетворяет (11.48), (11.49). Обозначим через $\widetilde{Z}_k(x)$ гармоническую функцию в Ω, равную $-r^{-k}\sin(k\theta)$ на $\partial\Omega\backslash\{0\}$ и продолженную нулем в $\{0\}$. Заметим, что функция $r^{-k}\sin(k\theta)$ обращается в нуль всюду на оси $x_2 = 0$ и поэтому задает гладкое краевое условие на $\partial\Omega$. Ясно, что функция $Z_k(x) = r^{-k}\sin(k\theta) + \widetilde{Z}_k(x)$ является решением (11.49) с асимптотикой $Z_k(x) = r^{-k}\sin(k\theta) + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(k)} r^j \sin(j\theta)$ при $r \to 0$. Очевидно,что функции

$$u_{k+1}(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j^{(k+1-j)} Z_j(x), \quad k \geqslant 1, \quad (11.50)$$

удовлетворяют (11.48) и (11.49). Причем, так как коэффициенты $b_j^{(1)}$ и $b_j^{(2)}$ уже выбраны (из разложений (11.47) для $v_{H^1(\Omega)}$ и v_2), в силу (11.50) определены также u_2 и u_3. Остальные коэффициенты $b_j^{(i)}$ уточним ниже (и тем самым определим остальные u_m).

Вернемся к "идейной" части метода согласования асимптотических разложений. Как и выше, на рядах $U(x,\varepsilon)$ вида (11.39) определим оператор $K_j(U(x,\varepsilon))$ следующим образом. Заменим коэффициенты ряда $U(x,\varepsilon)$ их асимптотиками при $r \to 0$, перейдем к переменным ξ и в полученном двойном ряду оставим только члены вида $\varepsilon^j \Phi(\xi)$. Полученную сумму обозначим $K_j(U(x,\varepsilon))$ и положим

$$\mathscr{K}_N(U(x,\varepsilon)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} K_j(U(x,\varepsilon)).$$

На рядах $V(\xi,\varepsilon)$ вида (11.43) определим оператор $M_j(V(\xi,\varepsilon))$. Для этого заменим коэффициенты ряда $V(\xi,\varepsilon)$ на их асимптотики на бесконечности, перейдем к переменным x и в полученном двойном ряду оставим

только члены вида $\varepsilon^j\Psi(x)$. Полученную сумму обозначим $M_j(V(\xi,\varepsilon))$ и положим

$$\mathscr{M}_N(V(\xi,\varepsilon))=\sum_{j=1}^{N}M_j(V(\xi,\varepsilon)).$$

Обозначим через $H_j^{(m)}(x)$ и $h_j^{(q)}(\xi)$ однородные функции степени j, через $\widehat{u}_{\varepsilon,N}$ и $\widehat{v}_{\varepsilon,N}$ — частичные суммы рядов u_ε и v_ε соответственно. Положим $\mathbb{R}^2_+=\{\xi:\xi_2>0\}$.

Лемма 11.3. *Пусть коэффициенты ряда u_ε принадлежат пространству $C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\{0\})$ и имеют при $r\to 0$ дифференцируемые асимптотики*

$$u_k(x)=\sum_{j=-k+1+\varkappa_k}^{\infty}H_j^{(k)}(x)$$

($\varkappa_k$ — целые числа), а коэффициенты ряда v_ε принадлежат $C^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ и имеют при $\rho\to\infty$ дифференцируемые асимптотики $v_k(\xi)=\sum\limits_{j=-\infty}^{k}h_j^{(k)}(\xi)$. Тогда для любого $N\geqslant 0$ справедливы дифференцируемые равенства

$$\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)-\mathscr{K}_N(\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x))=O(r^{N+1}+\varepsilon^N r)\quad \textit{при}\quad r\to 0,$$
$$\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi)-\mathscr{M}_N(\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi))=O(\rho^{-N-1}+\varepsilon^N\rho^{-1})\quad \textit{при}\quad \rho\to\infty.$$

Справедливость этой леммы вытекает из определения операторов $\mathscr{K}_N$ и $\mathscr{M}_N$ и асимптотик u_i и v_i, но никак не связана с краевыми задачами для этих коэффициентов и тем более с "согласованностью" этих рядов.

Пусть $\chi(t)$ — срезающая бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $t<1$ и единице при $t>2$. Обозначим

$$\widetilde{u}_{\varepsilon,N}(x)=\chi(r\varepsilon^{-1/2})u_{\varepsilon,N}(x)+(1-\chi(r\varepsilon^{-1/2}))v_{\varepsilon,N}(\xi).$$

Из определения этой функции вытекает следующее утверждение.

Лемма 11.4. *Пусть коэффициенты ряда u_ε принадлежат пространству $C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\{0\})$ и являются решениями краевых задач* (11.49)*, а коэффициенты ряда v_ε принадлежат $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+}\setminus\gamma)\cap H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$ и являются решениями краевых задач* (11.45)*. Тогда функция $\widetilde{u}_{\varepsilon,N}(x)$ принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\gamma_\varepsilon)\cap H^1(\Omega)$ и является решением краевой задачи*

$$\Delta\widetilde{u}_{\varepsilon,N}=F_N+f\ \textit{при}\ x\in\Omega_\varepsilon,$$
$$u_{\varepsilon,N}=0\ \textit{при}\ x\in\Gamma_\varepsilon,\quad \frac{\partial u_{\varepsilon,N}}{\partial\nu}=0\ \textit{при}\ x\in\gamma_\varepsilon,$$

где

$$F_N(x,\varepsilon)=2\sum_{j=1}^{2}\chi_{x_j}(r\varepsilon^{-1/2})(\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)-\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi))_{x_j}$$
$$+(\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)-\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi))\Delta\chi(r\varepsilon^{-1/2}).\qquad(11.51)$$

Подчеркнем, что последнее утверждение никак не связано ни с асимптотиками коэффициентов рядов u_ε и v_ε (в нуле и на бесконечности соответственно), ни тем более с согласованностью рядов. Согласование рядов заключается в доказательстве существования рядов таких, что "порядок малости" правой части (11.51) растет неограниченно вместе с N.

Ключевым моментом согласования рядов является следующая

Теорема 11.3. *Пусть выполнены условия лемм* 11.3 *и* 11.4, *и пусть*

$$\mathscr{K}_N(\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x)) = \mathscr{M}_N(\widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi)). \tag{11.52}$$

Тогда

$$|F_N| \leqslant C_N \varepsilon^{\frac{N-1}{2}}. \tag{11.53}$$

Доказательство. В силу леммы 11.3 и (11.52) при $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$

$$\begin{aligned} &\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x) - \widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi) = O(\varepsilon^{N+1/2}),\\ &(\widehat{u}_{\varepsilon,N}(x) - \widehat{v}_{\varepsilon,N}(\xi))_{x_j} = O(\varepsilon^{N/2}). \end{aligned} \tag{11.54}$$

Так как носители функций $\chi_{x_i}(r\varepsilon^{-1/2})$ и $\Delta\chi(r\varepsilon^{-1/2})$ лежат в кольце $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ и $\varepsilon^{1/2}|\chi_{x_j}(r\varepsilon^{-1/2})| + \varepsilon|\Delta\chi(r\varepsilon^{-1/2})| \leqslant C$, из (11.51) и (11.52) вытекает (11.53). □

Таким образом, для формального построения асимптотики решения задачи (11.38) достаточно показать возможность выбора коэффициентов $A_j^{(k)}$ в (11.46) (а следовательно, и $b_k^{(n)}$ в (11.48) при $n \geqslant 2$) так, чтобы выполнялось равенство (11.52) для любого n. Из (11.50) следует, что

$$\begin{aligned} u_{k+1}(x) = &\sum_{j=1}^{k} b_j^{(k+1-j)} r^{-j} \sin(j\theta)\\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(k+1)} r^j \sin(j\theta) \quad \text{при} \quad r \to 0, \end{aligned} \tag{11.55}$$

причем, так как u_2 и u_3 уже определены, определены также $a_j^{(2)}$ и $a_j^{(3)}$.

Подчеркнем, что, определяя при фиксированном k все $b_j^{(k+1-j)}$ в (11.55), мы определяем u_{k+1}, а с ней и все $a_j^{(k+1)}$.

Переходя в (11.55) к внутренним переменным и подставляя (11.55) и асимптотику u_0 из (11.48) в (11.43) получаем, что при $\varepsilon^{-1/2} < \rho < 2\varepsilon^{-1/2}$

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(\xi),\\ &V_n(\xi) = a_n^{(0)} \rho^n \sin(n\theta) + \sum_{j=1}^{n-2} a_j^{(n-j)} \rho^j \sin(j\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} \rho^{-k} \sin(k\theta), \end{aligned} \tag{11.56}$$

Из определения $\mathscr{M}_N$ и $\mathscr{K}_N$ следует, что для выполнения равенства (11.52) достаточно, чтобы ряды (11.47) и (11.56) совпадали для любого N.

Так как все $a_j^{(3)}$ уже были определены, положив $A_j^{(3)} = a_j^{(3)}$, мы, во-первых, определяем v_3, а во-вторых, находим растущие на бесконечности как $O(\rho^{k-2})$ слагаемые для v_k при $k \geqslant 4$ в (11.46). Определив v_3, мы тем самым определили все $b_j^{(3)}$. В свою очередь, зная $b_j^{(3)}$, мы, во-первых, полностью определяем u_4 и, во-вторых, находим растущие в нуле как $O(r^{-k+3})$ слагаемые для u_k при $k \geqslant 5$ в (11.55). Наконец, определив u_4, мы тем самым определили все $a_j^{(4)}$. Далее эта цепочка повторяется:

$$A_j^{(4)} = a_j^{(4)} \Rightarrow v_4 \Rightarrow b_j^{(4)} \Rightarrow u_5 \Rightarrow a_j^{(5)} \Rightarrow A_j^{(5)} = a_j^{(5)} \Rightarrow \dots$$

Используя эти построения, можно доказать следующую теорему.

Теорема 11.4. *Существуют ряды* (11.43) *и* (11.39), *которые удовлетворяют условиям теоремы* 11.3 *и для коэффициентов которых справедливы равенства* (11.46) *и* (11.50).

Таким образом, построена полная формальная асимптотика решения краевой задачи (11.38).

Перейдем к обоснованию построенной асимптотики. Обозначим через $H^1(\Omega;\Gamma_\varepsilon)$ замыкание функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль в окрестности Γ_ε, по норме $H^1(\Omega)$. Под решением задачи (11.38) понимается элемент $u_\varepsilon \in H^1(\Omega;\Gamma_\varepsilon)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$-(\nabla u_\varepsilon, \nabla v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega;\Gamma_\varepsilon). \tag{11.57}$$

Лемма 11.5. *Для решения краевой задачи* (11.38) *справедлива оценка*

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{11.58}$$

где постоянная C не зависит от ε и f.

Доказательство. Подставляя в (11.57) $v = u_\varepsilon$, легко получить равномерную по ε априорную оценку

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_0\left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\right). \tag{11.59}$$

Допустим, что оценка (11.58) неверна. Тогда существуют последовательность $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ и последовательность $f_n \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$\|u_{\varepsilon_n}\|_{H^1(\Omega)} > n\|f_n\|_{L_2(\Omega)}. \tag{11.60}$$

Из (11.59) и (11.60) получаем, что

$$\|u_{\varepsilon_n}\|_{H^1(\Omega)} < 2C_0\|u_{\varepsilon_n}\|_{L_2(\Omega)}, \tag{11.61}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $\|u_{\varepsilon_n}\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Тогда в силу (11.61) существует подпоследовательность последовательности $\{\varepsilon_n\}$, на которой u_{ε_n} сходится слабо в $H^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$ к $u_* \in H^1(\Omega)$, причем $\|u_*\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Легко видеть, что $u_* \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. С другой стороны, из (11.60) и (11.61) следует, что $\|f_n\|_{L_2(\Omega)} \to 0$. Пусть v — произвольная функция из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ в (11.57). Подставляя в (11.57) $u_\varepsilon = u_{\varepsilon_n}$ и $f = f_n$ и переходя в полученном равенстве к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся, что u_* — нетривиальное обобщенное решение задачи Дирихле

$$\Delta u_* = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u_* = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega.$$

Из полученного противоречия следует оценка (11.58). □

Из леммы 11.4 и оценок (11.51) и (11.58) вытекает оценка

$$\|u_\varepsilon - \widetilde{u}_{\varepsilon,N}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_N\varepsilon^{N/2}.$$

Отсюда в силу произвола в выборе N следует, что построено полное асимптотическое разложение решения (11.38).

Рассмотренный метод согласования асимптотических разложений широко применяется также в теории усреднения. В п. 15.2 ниже мы применим этот метод к краевым задачам с быстро меняющимся типом граничных условий.

§ 12. Метод Боголюбова

12.1. Определения и основные утверждения. Метод Боголюбова был создан для анализа динамических систем, содержащих группы переменных, характерный масштаб изменения во времени которых существенно различен. Часто предполагается наличие двух переменных, причем параметры динамической системы быстро осциллируют по отношению к одной из них ("быстрая" переменная) и медленно меняются по отношению к другой ("медленная" переменная). Простейшим примером такой системы является механическая система, подверженная воздействию внешней быстро осциллирующей силы (вибрации). Оказывается, что при анализе эволюции такой системы на значительных промежутках времени главную роль играет среднее значение внешней силы по периоду ее изменения во времени, а само значение силы в конкретные моменты времени не является существенным. На формальном математическом языке это означает, что при усреднении правой части системы по явно входящему времени полученная упрощенная система будет иметь решения, "хорошо приближающие" решения исходной системы на большом интервале времени.

В приложениях часто встречаются весьма сложные системы такого вида, когда быстро осциллирующие по времени функции не входят в рассматриваемую систему явно, однако фазовые переменные системы можно разделить на две группы, причем переменные первой группы эволюционируют во времени медленно, а переменные второй группы — быстро, и для быстрой эволюции характерна цикличность. Представим себе, например, искусственный спутник Земли, движущийся по орбите и одновременно совершающий вращательное движение относительно центра масс. На спутник, кроме силы притяжения Земли, действуют различные виды слабых взаимодействий (магнитное поле Земли, силы светового давления и пр.). Под действием этих слабых сил на большом интервале времени начинают медленно эволюционировать характеристики быстрого вращательного движения спутника относительно центра масс, так, например, может медленно изменяться направление оси вращения и пр. Как можно описать эту медленную эволюцию? Конечно, мы можем пытаться интегрировать с высокой точностью дифференциальные уравнения нашей системы на большом интервале времени, но при этом неизбежно будет накапливаться ошибка численного интегрирования. Метод усреднения предлагает другой способ — построить более простую "усредненную" систему, параметры которой зависят только от медленных переменных, а ее решения на большом интервале времени "хорошо приближают" истинное решение. Идея усреднения в этой ситуации основана на том, что эволюция медленных переменных существенно зависит только от среднего значения быстрых переменных по характерному отрезку времени их циклического (не обязательно периодического, но близкого к периодическому) изменения. Подчеркнем, что изначально медленные и быстрые переменные связаны между собой, и динамика системы определяется их взаимным влиянием друг на друга. В результате же применения метода усреднения система для медленных переменных становится замкнутой; ее можно исследовать независимо. В этом случае обычно говорят, что удалось осуществить асимптотическую декомпозицию исходной системы.

На первый взгляд кажется, что это направление исследований имеет мало общего с основной темой настоящей монографии. Однако именно

метод Боголюбова послужил прообразом асимптотического метода усреднения для пространственных характеристик среды с периодической микроструктурой (который изложен в [**9, 16**]). Фактически, здесь тоже осуществляется асимптотическая декомпозиция — искусственно вводятся независимые быстрые переменные, описывающие изменения среды в масштабах одного малого периода (ячейки). Далее мы записываем уравнения, характеризующие среду, в этих быстрых переменных, при этом медленные (исходные) переменные входят в рассматриваемые уравнения как параметры. Условие разрешимости этих уравнений в пространстве периодических функций может быть записано в виде уравнений, зависящих только от медленных переменных. Такие уравнения называются "усредненными", они описывают макроскопические характеристики среды.

В методе усреднения Боголюбова также делается замена переменных, исключающая в исходной системе зависимость от быстрых переменных в главных (по малому параметру) членах. Эта замена возможна только в том случае, когда медленные переменные удовлетворяют некоторой замкнутой системе уравнений, причем эта система возникает из условия разрешимости вспомогательных задач в быстрых переменных.

В настоящем параграфе мы сначала дадим другое доказательство теоремы Боголюбова (не опирающуюся на идею замены переменных), а затем сформулируем основные утверждения (в виде задач), с помощью которых можно найти указанную замену переменных.

Метод Боголюбова (см. [**19**]) будет изложен в простейшей ситуации. Мы ограничимся системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть $Q := \{(x,t) : x \in \Omega, 0 \leqslant t < +\infty\}$ — область в $\mathbb{R}^{d+1}$, где Ω — цилиндрическая область в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим в области Q нелинейную неавтономную систему с малым параметром ε

$$\frac{dX_\varepsilon}{dt} = \varepsilon F(t, X_\varepsilon) \tag{12.1}$$

с начальными условиями

$$X_\varepsilon(0) = X_0, \tag{12.2}$$

где ε — малый положительный параметр, $F(t,x) \in C([0,\infty); \mathrm{Lip}(\Omega))$,

$$\|F(t,\cdot)\| \leqslant M; \tag{12.3}$$

всюду в этом параграфе $\|\cdot\|$ обозначает липшицеву норму в области Ω.

Теорема 12.1. *Предположим, что в Ω существует равномерный по x конечный предел*

$$G(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t,x)\,dt \in C(\Omega) \tag{12.4}$$

и задача для усредненного уравнения

$$\frac{dY_\varepsilon}{dt} = \varepsilon G(Y_\varepsilon), \quad Y_\varepsilon(0) = X_0 \tag{12.5}$$

имеет единственное решение $Y_\varepsilon(t)$, определенное при $\varepsilon = 1$ на отрезке $[0, T_1]$. Тогда разность $(X_\varepsilon(t) - Y_\varepsilon(t))$ равномерно сходится к нулю на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T/\varepsilon$, $0 < T < T_1$ при $\varepsilon \to 0$, где $X_\varepsilon(t)$ — решение задачи Коши (12.1), (12.2), *а $Y_\varepsilon(t)$ — решение задачи* (12.5).

Доказательство. Пусть $\rho > 0$ — расстояние от точки $X_0 \in \Omega$ до границы области Ω. Тогда в силу неравенства (12.3) решение $X_\varepsilon(t)$ будет определено по крайней мере на промежутке $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\rho}{M\varepsilon\sqrt{d}}$.

Задача 12.1. Докажите, что при условии (12.3) решение существует при $t \in \left[0, \dfrac{\rho}{M\varepsilon\sqrt{d}}\right]$, не покидая при этом области Ω.

Введем "медленное" время $\tau = \varepsilon t$ и перепишем уравнения (12.1) и (12.5) следующим образом:

$$\frac{dX}{d\tau} = F(\tau/\varepsilon, X) = G_\varepsilon(\tau, X), \tag{12.6}$$

$$\frac{dY}{d\tau} = G(Y). \tag{12.7}$$

Покажем, что функция $G_\varepsilon(\tau, x)$ (доопределенная значением $G(x)$ при $\varepsilon = 0$) будет *интегрально непрерывной* по ε при $\varepsilon = 0$, т.е. существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^t G_\varepsilon(\tau, x)d\tau$, равный $\int\limits_0^t G(x)d\tau$. Действительно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t G_\varepsilon(\tau, x)d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t F(\tau/\varepsilon, x)d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_0^{t/\varepsilon} F(s, x)ds$$

$$= t\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{t/\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon} F(s, x)ds = tG(x) = \int_0^t G(x)d\tau.$$

Запишем (12.6), (12.7) в интегральной форме. Для любого $\tau \in [0, T]$

$$X_\varepsilon(\tau) = X_0 + \int_0^\tau G_\varepsilon(s, X_\varepsilon(s))\, ds \tag{12.8}$$

$$Y(\tau) = X_0 + \int_0^\tau G(Y(s))\, ds. \tag{12.9}$$

Рассмотрим семейство решений $\{X_\varepsilon(\tau)\}$, где $\varepsilon > 0$, $\tau \in [0, T]$. Покажем, что это семейство равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на отрезке $[0, T]$. Это следует из равномерной ограниченности производной $\dfrac{dX_\varepsilon}{d\tau}$. Действительно, имея в виду равномерную ограниченность $G_\varepsilon(s, X) \equiv F(s/\varepsilon, X)$, из равенства (12.8) получаем

$$\|X_\varepsilon(\tau)\| \leqslant \|X_0\| + \int_0^\tau \|G_\varepsilon(s, X_\varepsilon(s))\|\, ds \leqslant \|X_0\| + TM.$$

Аналогично из (12.6) можно вывести равномерную ограниченность производных $\dfrac{dX_\varepsilon}{d\tau}$ на отрезке $[0, T]$, что дает равностепенную непрерывность.

По теореме Арцела из последовательности $X_\varepsilon(\tau)$ можно выбрать равномерно сходящуюся на $[0, T]$ подпоследовательность, т.е. существуют $Y^*(\tau)$

и последовательность ε_k такие, что

$$X_{\varepsilon_k}(\tau) \rightrightarrows Y^*(\tau) \quad \text{равномерно при} \quad \varepsilon_k \to 0. \tag{12.10}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_k \to 0$ в интегральном тождестве (12.8), т.е. в

$$X_{\varepsilon_k}(\tau) = X_0 + \int\limits_0^\tau G_{\varepsilon_k}(s, X_{\varepsilon_k}(s))\, ds,$$

получим

$$Y^*(\tau) = X_0 + \int\limits_0^\tau G(Y^*(s))\, ds \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T. \tag{12.11}$$

Действительно,

$$\left| \int\limits_0^\tau G_{\varepsilon_k}(s, X_{\varepsilon_k})\, ds - \int\limits_0^\tau G(Y^*)\, ds \right| \leqslant \left| \int\limits_0^\tau G_{\varepsilon_k}(s, X_{\varepsilon_k})\, ds - \int\limits_0^\tau G_{\varepsilon_k}(s, Y^*)\, ds \right|$$

$$+ \left| \int\limits_0^\tau G_{\varepsilon_k}(s, Y^*)\, ds - \int\limits_0^\tau G(Y^*)\, ds \right| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Задача 12.2. Используя интегральную непрерывность $G_\varepsilon(s, X)$, покажите, что второй интеграл в правой части неравенства сходится к нулю.

Уравнение (12.11) может быть переписано в виде

$$\frac{dY^*}{d\tau} = G(Y^*), \quad Y^*(0) = X_0.$$

Возвращаясь к переменной t, приходим к задаче (12.5). В силу единственности ее решения предел не зависит от подпоследовательности. □

Замечание 12.1. Если $F(t, X)$ периодическая по t, в теореме 12.1 имеет место не только сходимость, но и оценка на интервале $[0, T/\varepsilon]$

$$|X_\varepsilon(t) - Y_\varepsilon(t)| \leqslant C(T)\varepsilon,$$

где постоянная $C(T) > 0$ зависит от $T > 0$, но не зависит от $\varepsilon > 0$ (см. [**19**]).

Сформулируем несколько утверждений, доказательства которых можно найти в [**20**]. Пусть вектор–функции $F(\theta, X)$ и $F_0(\theta, X)$ периодичны по θ, и пусть

$$G(Y) = \frac{1}{\theta_0} \int\limits_0^{\theta_0} F(\theta, Y)\, d\theta, \tag{12.12}$$

где θ_0 — период функции $F(\theta, Y)$ по переменной θ.

Теорема 12.2. *Пусть $\omega(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\omega(x) \geqslant C > 0$, и вектор–функции $X_\varepsilon(t)$ и $Y_\varepsilon(t)$ являются решениями систем уравнений*

$$\frac{dX_\varepsilon}{dt} = \varepsilon F(\theta_\varepsilon, X_\varepsilon),$$
$$\frac{d\theta_\varepsilon}{dt} = \omega(X_\varepsilon) + \varepsilon F_0(\theta_\varepsilon, X_\varepsilon),$$

$$X_\varepsilon(t_0) = X_0, \quad \theta(t_0) = \theta_0; \qquad \frac{dY_\varepsilon}{dt} = \varepsilon G(Y_\varepsilon), \quad Y_\varepsilon(t_0) = X_0.$$

Тогда на интервале $[t_0, T/\varepsilon]$, $T = \text{const}$, *имеет место неравенство*

$$|X_\varepsilon(t) - Y_\varepsilon(t)| \leqslant C(T)\varepsilon,$$

где постоянная $C(T) > 0$ *зависит от* $T > 0$, *но не зависит от* $\varepsilon > 0$ *Здесь* $G(x)$ *задана формулой* (12.12) (*см. также рис.* 12.1).

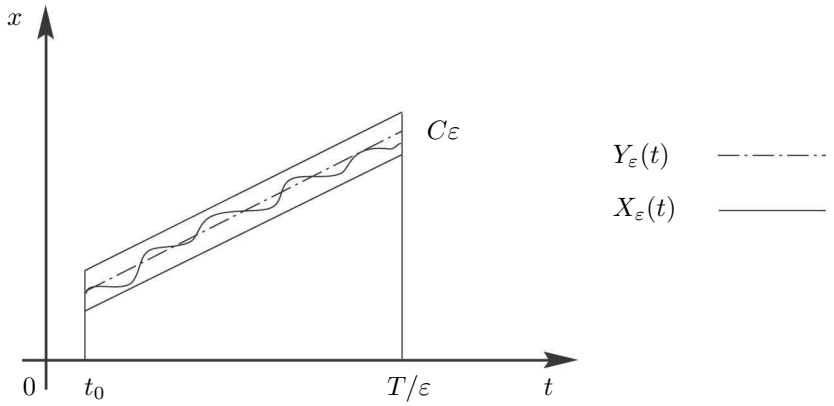

Рис. 12.1. $|X_\varepsilon(t_0) - X_\varepsilon(T/\varepsilon)| \sim 1$ и $|X_\varepsilon(t) - Y_\varepsilon(t)| \sim C\varepsilon$.

Наметим доказательство теоремы 12.2. Мы применим метод (см., например, [**21**]), отличный от метода доказательства теоремы 12.1.

Попытаемся найти такое преобразование фазовых координат (X, θ) к новым фазовым переменным (Z, θ), чтобы, во-первых, $Z = X + \varepsilon k(X, \theta)$ и, во-вторых, после замены переменных наша система приняла более простой вид, а именно, $\dot{Z} = \varepsilon f(Z) + R(\varepsilon, Z, \theta)$, где $|R| \leqslant C\varepsilon^2$, т.е. слагаемое порядка ε независимо от переменной θ. Рассмотрим уравнение

$$\omega(X)\frac{\partial k}{\partial \theta} = -[F(\theta, X) - G(X)]. \tag{12.13}$$

Задача 12.3. Докажите, что уравнение (12.13) при каждом X имеет периодическое по θ решение.

Задача 12.4. Покажите, что если функция $k(X, \theta)$, определяющая замену переменных, удовлетворяет уравнению (12.13), то для переменной Z получится уравнение $\dot{Z} = \varepsilon G(Z) + R(\varepsilon, Z, \theta)$, где $|R| \leqslant C\varepsilon^2$.

Заметим, что функция, определяющая правую часть усредненной системы, может быть найдена из условия разрешимости уравнения (12.13).

Задача 12.5. Опираясь на предыдущие задачи, завершите доказательство теоремы 12.2.

Определение 12.1. Пусть x_0 — положение равновесия (стационарное решение) системы $\dot{X} = F(X)$. Будем называть x_0 *устойчивым по первому приближению*, если все характеристические корни матрицы $\left(\dfrac{\partial F^i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1}^{d}$ имеют отрицательные вещественные части, т.е. лежат в левой комплексной полуплоскости.

В дальнейшем мы также будем использовать понятие интегрального многообразия в расширенном фазовом пространстве системы.

Определение 12.2. Под *интегральным многообразием* мы понимаем гладкую поверхность I в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{d+1} \ni (x_1, \ldots, x_d, t)$ системы $\dot{X} = F(t, X)$ такую, что любая траектория нашей системы с начальным условием в некоторой σ-окрестности I стремится к I при $t \to +\infty$ и при этом любая траектория $Y(t)$ системы с начальным условием $Y(t_0) \in I$ целиком лежит в I (см. рис. 12.2).

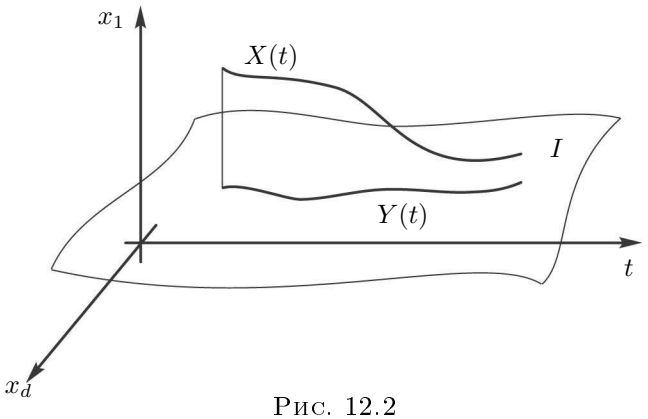

Рис. 12.2

Теорема 12.3. *Пусть функции F и G те же, что в условии теоремы* 12.2, *и x_0 — стационарная точка системы*

$$\frac{dY_\varepsilon}{dt} = \varepsilon G(Y_\varepsilon),$$

устойчивая по первому приближению. Тогда для произвольной σ-окрестности U_σ точки x_0 существует $\varepsilon_0(\sigma) > 0$ такое, что для всех $\varepsilon < \varepsilon_0(\sigma)$ в U_σ существует единственный устойчивый предельный цикл (т.е. асимптотически устойчивое периодическое решение $X^*_\varepsilon(t)$) системы

$$\frac{dX_\varepsilon}{dt} = \varepsilon F_\varepsilon(t, X_\varepsilon),$$

причем при всех вещественных $t \in (-\infty, +\infty)$ имеет место неравенство

$$|X^*_\varepsilon(t) - x_0| \leqslant C\varepsilon,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от t и ε (см. рис. 12.3).

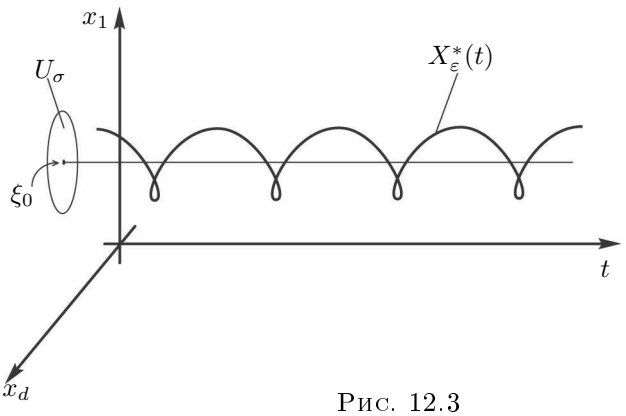

Рис. 12.3

Пусть $\dot{X} = A(t)X$ — линейная неавтономная система уравнений, $X(t)$ — некоторое решение этой системы.

Определение 12.3. *Характеристическим показателем* (*показателем Ляпунова*) решения $X(t)$ называется число

$$\lambda[x] \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |X(t)|}{t}.$$

Пусть $X_0(t)$ — периодическое решение некоторой, вообще говоря, нелинейной системы $\dot{X} = F(X)$. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{Y} = F'(X_0(t))Y, \tag{12.14}$$

являющуюся линеаризацией исходной системы на периодическом решении $X_0(t)$. Заметим, что периодическая функция $Y_0(t) = \dot{X}_0(t)$ является решением линеаризованной системы $\dot{Y} = F'(X_0(t))Y$. В самом деле, дифференцируя уравнение $\dot{X} = F(X)$ по t, получим $\ddot{X}_0 = F'(X_0(t))\dot{X}_0(t)$, откуда $\dot{Y}_0 = F'(X_0(t))Y_0$. Поэтому одно из решений (если $X_0(t) \not\equiv \text{const}$) является периодической функцией, не равной тождественно нулю. Следовательно, ее характеристический показатель равен нулю.

Определение 12.4. Периодическое решение $X_0(t)$ *устойчиво в линейном приближении*, если характеристические показатели остальных $(d-1)$ линейно независимых решений линеаризованной системы (12.14) отрицательны.

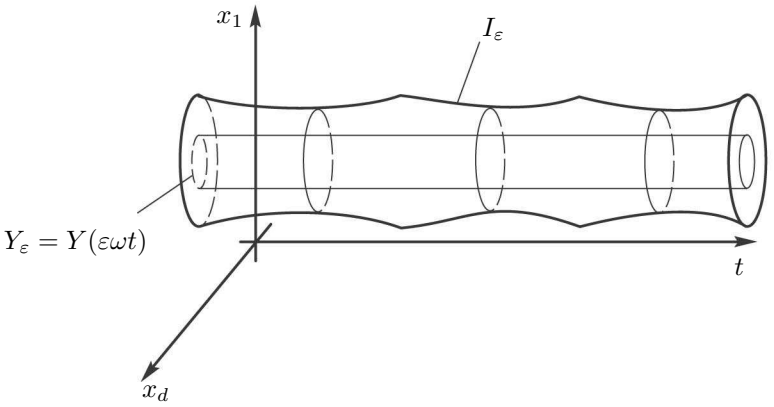

Рис. 12.4. $I_\varepsilon = \{(x,t) : x = f_\varepsilon(t,\theta), t \geqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$.

Теорема 12.4. *Пусть функции F и G те же, что в условии теоремы* 12.2, *и $Y_\varepsilon = Y(\varepsilon\omega t)$ — устойчивый предельный цикл* (*с периодом* $(2\pi)/(\varepsilon\omega)$) *системы уравнений*

$$\frac{dY_\varepsilon}{dt} = \varepsilon G(Y_\varepsilon),$$

где $G(x)$ задана формулой (12.12), *$Y(\theta)$ — 2π-периодическая функция. Тогда для произвольной σ-окрестности U_σ этого предельного цикла существует $\varepsilon_0(\sigma)$ такое, что для $\varepsilon < \varepsilon_0(\sigma)$ система уравнений*

$$\frac{dX_\varepsilon}{dt} = \varepsilon F(t, X_\varepsilon)$$

имеет в U_σ единственное устойчивое двумерное интегральное многообразие I_ε, задаваемое уравнением $x = f_\varepsilon(t,\theta)$ с гладкой 2π-периодической по t, θ функцией $f_\varepsilon(t,\theta)$. При этом для всех $t \in (-\infty,+\infty)$

$$|f_\varepsilon(t,\theta) - Y(\theta)| \leqslant C\varepsilon,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от t и ε (см. рис. 12.4).

Замечание 12.2. Теоремы 12.2–12.4 доказаны в [**20**] при значительно более общих предположениях. Во-первых, зависимость правых частей от времени t не обязательно должна быть периодической. Во-вторых, устойчивость положения равновесия и предельного цикла для усредненной системы — не обязательное условие для существования предельного цикла или двумерного интегрального многообразия для исходной системы. Детали читатель может изучить, обратившись к [**20**]. В настоящей монографии мы привели формулировки основных теорем в упрощенном варианте.

В [**20**] вместо условия периодичности правых частей систем по явно входящему времени используется условие существования равномерного по параметру T_0 среднего

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{T_0}^{T_0+T} f(t)\,dt,$$

а вместо устойчивости по первому приближению положения равновесия или предельного цикла усредненной системы используется более широкое свойство отсутствия на мнимой оси комплексной плоскости корней характеристического уравнения матрицы $F'(x_0)$ (для автономной системы) или отсутствия нулевых показателей Ляпунова системы $\dot{Y} = F'(X_0(\varepsilon\omega t))Y$, кроме одного, который есть всегда (для неавтономной системы).

12.2. Несколько известных примеров.

12.2.1. *Маятник с изменяющейся длиной.* Рассмотрим дифференциальное уравнение (*уравнение Хилла*), описывающее движение маятника с периодически изменяющейся по заданному закону длиной ("качели") (это изменение длины описывается функцией $\varepsilon f(t)$, здесь ε — малый положительный параметр)

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\varepsilon f(t)x. \tag{12.15}$$

Замена переменных $(x,\dot{x}) \longmapsto (a,b)$, где

$$x = a\sin\nu t + b\cos\nu t, \quad \dot{x} = a\nu\cos\nu t - b\nu\sin\nu t, \tag{12.16}$$

приводит это уравнение к виду

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\nu} f(t)[a\sin\nu t + b\cos\nu t]\cos\nu t, \\ \dot{b} &= \frac{\varepsilon}{\nu} f(t)[a\sin\nu t + b\cos\nu t]\sin\nu t. \end{aligned} \tag{12.17}$$

Задача 12.6. Выведите систему (12.17) из уравнения (12.15).

Предположим, что $f(t) = a_0\sin\lambda t$. При $\lambda = 2\nu$ усреднение по времени правых частей приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{a_0\varepsilon}{2\nu} a\langle\sin^2 2\nu t\rangle_t \equiv -\frac{a_0\varepsilon}{4\nu} a, \\ \dot{b} &= \frac{a_0\varepsilon}{2\nu} b\langle\sin^2 2\nu t\rangle_t \equiv \frac{a_0\varepsilon}{4\nu} b, \end{aligned}$$

где

$$\langle \sin^2 2\nu t\rangle_t := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \sin^2 2\nu t\,dt = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что одна из амплитуд a, b является экспоненциально растущей. Это означает, что при $\lambda = 2\nu$ амплитуда колебаний маятника экспоненциально растет. Таким образом, при $\lambda = 2\nu$ даже с помощью сколь угодно малого периодического изменения длины маятника можно "раскачать" его до произвольно большой амплитуды.

12.2.2. *Маятник с вибрирующей точкой подвеса.* Механикам хорошо известно замечательное явление, состоящее в том, что перевернутый маятник на вибрирующей основе (с вибрирующей точкой подвеса) при определенных частотах вибрации не падает, а остается в вертикальном положении. Это означает, что неустойчивое верхнее положение равновесия становится устойчивым. С помощью метода усреднения Боголюбова можно объяснить это явление.

Движение маятника, точка подвеса которого осциллирует в вертикальном направлении по закону $\delta(t) = a\sin\omega t$, где $\delta(t)$ — отклонение точки подвеса в вертикальном направлении, описывается уравнением

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda\frac{d\theta}{dt} + \frac{g - a\omega^2\sin\omega t}{l}\sin\theta = 0,$$

где λ — коэффициент трения, l — длина подвеса, g — ускорение свободного падения. Введем сначала новую независимую переменную $\tau = \omega t$, а также постоянные

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{2\omega_0}k, \quad k^2 = \frac{g}{\omega^2 l}\left(\frac{l}{a}\right)^2.$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2}{dt^2},$$

уравнение относительно новой переменной τ примет вид

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{\lambda}{\omega}\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{g - a\omega^2\sin\tau}{\omega^2 l}\sin\theta = 0.$$

Очевидно, что введенные выше константы удовлетворяют соотношениям

$$\frac{g}{\omega^2 l} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = k^2(a/l)^2, \quad \frac{\lambda}{\omega} = \frac{\lambda}{\omega_0}\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\lambda}{\omega_0}k\frac{a}{l} = 2\alpha\frac{a}{l}.$$

Поэтому последнее уравнение может быть записано в виде

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\alpha\frac{a}{l}\frac{d\theta}{d\tau} + \left\{k^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \frac{a}{l}\sin\tau\right\}\sin\theta = 0.$$

Будем считать величину $\varepsilon = a/l$ малым параметром. Получим уравнение

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha\frac{d\theta}{d\tau} + \left\{k^2\varepsilon^2 - \varepsilon\sin\tau\right\}\sin\theta = 0.$$

Замену переменных (12.16) здесь применить непосредственно нельзя, так как в данном случае $\nu = 0$. Сделаем замену переменных $(\theta, \dot\theta) \longmapsto (\varphi, \psi)$

согласно формулам $\theta = \varphi - \varepsilon \sin\tau \sin\varphi$, $\dot\theta = \varepsilon\psi - \varepsilon\cos\tau\sin\varphi$. Эта замена переменных приводит исходное уравнение к системе в нормальной форме

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon\psi + \varepsilon^2[\cdots],\\
&\frac{d\psi}{d\tau} = \varepsilon[-\sin^2\tau\sin\varphi\cos\varphi - k^2\sin\varphi + \psi\cos\tau\cos\varphi - 2\alpha\psi\\
&\quad + 2\alpha\cos\tau\sin\varphi] + \varepsilon^2[\cdots].
\end{aligned} \tag{12.18}$$

Здесь мы не выписываем в явном виде выражения при степенях ε выше первой. После усреднения по τ правых частей система принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d\widetilde\varphi}{d\tau} = \varepsilon\widetilde\psi,\\
&\frac{d\widetilde\psi}{d\tau} = -\varepsilon[2\alpha\widetilde\psi + (k^2 + \frac{1}{2}\cos\widetilde\varphi)\sin\widetilde\varphi],
\end{aligned} \tag{12.19}$$

которая эквивалентна автономному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha\frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon^2(k^2 + \frac{1}{2}\cos\varphi)\sin\varphi = 0.$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия $1/2 - k^2 > 0$ положение равновесия $\varphi = \pi$ будет устойчивым по первому приближению и, следовательно, у исходного уравнения в окрестности верхнего положения равновесия будет устойчивый предельный цикл (см. теорему 12.3) вида $\theta_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(t/\varepsilon) - \varepsilon\sin(t/\varepsilon)\sin\varphi_\varepsilon(t/\varepsilon)$, где $\varphi_\varepsilon(\tau)$ — периодическое решение системы (12.18) в малой окрестности точки π.

12.2.3. *Уравнение Ван-дер-Поля.* Рассмотрим неавтономное уравнение второго порядка

$$\ddot x + \nu^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot x) \tag{12.20}$$

с малым нелинейным членом εf. Сделаем замену переменных $(x, \dot x) \longmapsto (a, \theta)$ согласно формулам

$$x = a\cos\theta, \quad \dot x = -\nu a\sin\theta. \tag{12.21}$$

Вычисления показывают (выполните эти вычисления!), что уравнение (12.20) в новых переменных можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\dot a = -\frac{\varepsilon}{\nu} f(t, a\cos\theta, -a\nu\sin\theta)\sin\theta,\\
&\dot\theta = \nu - \frac{\varepsilon}{a\nu} f(t, a\cos\theta, -a\nu\sin\theta)\cos\theta.
\end{aligned} \tag{12.22}$$

Система (12.22) допускает применение теоремы 12.2. С другой стороны, замена (12.16) приводит уравнение (12.20) к виду

$$\begin{aligned}
&\dot a = -\frac{\varepsilon}{\nu} f(t, a\sin\nu t + b\cos\nu t, a\nu\cos\nu t - b\nu\sin\nu t)\cos\nu t,\\
&\dot b = -\frac{\varepsilon}{a\nu} f(t, a\sin\nu t + b\cos\nu t, a\nu\cos\nu t - b\nu\sin\nu t)\sin\nu t,
\end{aligned} \tag{12.23}$$

т.е. к виду, для которого возможно применение теоремы 12.1. В некоторых случаях удобно использовать замену переменных (12.16), а в некоторых — (12.21). Рассмотрим *уравнение Ван-дер-Поля*

$$\ddot x + \nu^2 x = \varepsilon(1 - bx^2)\dot x$$

и применим к этому уравнению после замены переменных (12.21) теорему 12.2. Усредненное уравнение для переменной a примет вид

$$\dot a = -\frac{\varepsilon}{\nu}\varphi(a),$$

где

$$\varphi(a) = \int_0^{2\pi} (1 - ba^2 \cos^2 y) a \sin^2 y \, dy \equiv \frac{a}{2} \left(\frac{ba^2}{4} - 1 \right).$$

Уравнение $\varphi(a) = 0$ при $b > 0$ имеет два неотрицательных корня $a_1 = 0$ и $a_2 = 2\sqrt{1/b}$, а при $b < 0$ — один корень $a_1 = 0$. При $b > 0$ в силу устойчивости положения равновесия в точке a_2 и неустойчивости в точке a_1 получаем следующую качественную картину поведения фазовых траекторий системы Ван-дер-Поля: все фазовые траектории приближаются к устойчивому периодическому решению с амплитудой $2\sqrt{1/b}$ либо изнутри цикла, либо извне (см. рис. 12.5).

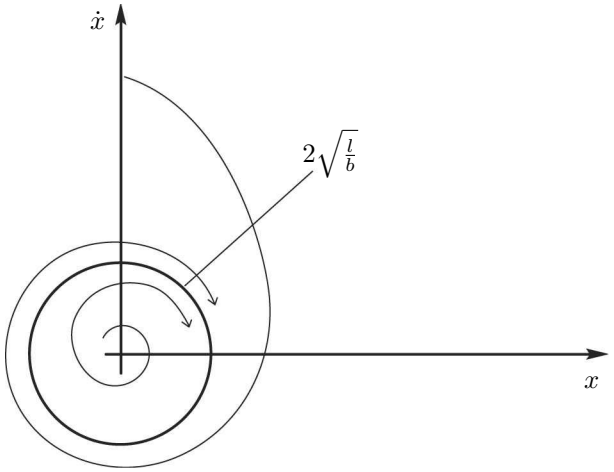

Рис. 12.5

Теорема 12.2 позволяет утверждать, что описанная выше качественная картина поведения фазовых траекторий имеет место на интервале времени порядка $1/\varepsilon$.

12.2.4. *Уравнение типа Дуффинга.* Дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + \varepsilon g(t) \tag{12.24}$$

называется *уравнением Дуффинга*, если $f(x, \dot{x}) = -x^3$. После замены переменных (12.21) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\nu} f(a\cos\theta, -a\nu\sin\theta)\sin\theta - \frac{\varepsilon}{\nu} g(t)\sin\theta, \\ \dot{\theta} &= \nu - \frac{\varepsilon}{a\nu} f(a\cos\theta, -a\nu\sin\theta)\cos\theta - \frac{\varepsilon}{\nu a} g(t)\cos\theta. \end{aligned} \tag{12.25}$$

Пусть "внешнее воздействие" $g(t)$ имеет вид $g(t) = a_0 \cos\lambda t$. Обозначая $z = \lambda t$, преобразуем систему (12.25) к виду

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\nu} f(a\cos\theta, -a\nu\sin\theta)\sin\theta - \frac{\varepsilon}{\nu} a_0 \cos z \sin\theta, \\ \dot{\theta} &= \nu - \frac{\varepsilon}{a\nu} f(a\cos\theta, -a\nu\sin\theta)\cos\theta - \frac{\varepsilon a_0}{\nu a} \cos z \cos\theta, \\ \dot{z} &= \lambda. \end{aligned} \tag{12.26}$$

Предположим, что частота λ "внешнего воздействия" близка к собственной частоте ν колебательной системы без возмущения, т.е. $\lambda = \nu + \varepsilon h$, где h — величина, называемая *расстройкой*. Введем новую переменную $\delta = z - \theta$ и перейдем от переменных (a, θ, z) к переменным (a, δ, z). Полагая $z = (\nu + \varepsilon h)t$ в полученной системе и замечая, что система имеет нормальную форму (см. условие теоремы 12.1), усредняем правые части нашей системы по времени t. Получаем систему

$$\begin{aligned} \dot a &= -\frac{\varepsilon}{2\nu\pi}\Big(\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos y, -a\nu\sin y)\sin y\,dy - a_0\pi\sin\delta\Big),\\ \dot\delta &= \frac{\varepsilon}{2\pi a\nu}\Big(\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos y, -a\nu\sin y)\cos y\,dy + a_0\pi\cos\delta\Big) + \varepsilon h. \end{aligned} \tag{12.27}$$

Задача 12.7. Проверьте, что в переменных (a, δ, z) система (12.26) имеет вид (12.27).

Для уравнения Дуффинга $f(a\cos y, -a\nu\sin y) = -a^3\sin^3 y$, поэтому интегралы в правых частях системы (12.27) легко вычисляются, и она принимает вид

$$\begin{aligned} \dot a &= -\frac{\varepsilon}{2\nu}a_0\sin\delta,\\ \dot\delta &= -\frac{\varepsilon}{2\pi a\nu}\left(\frac{3}{4}a^3 - a_0\pi\cos\delta\right) + \varepsilon h. \end{aligned} \tag{12.28}$$

Стационарные точки $(\widetilde a, \widetilde\delta)$ этой системы определяются из алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= \sin\widetilde\delta,\\ 0 &= \frac{3}{4}\widetilde a^3 - a_0\pi\cos\widetilde\delta - 2\pi\nu\widetilde a h. \end{aligned}$$

Отсюда $\widetilde\delta = 0$, и для стационарного значения амплитуды колебаний $\widetilde a$ получаем кубическое уравнение

$$\widetilde a^3 - \frac{8}{3}\pi\nu h\widetilde a - \frac{4}{3}a_0\pi = 0. \tag{12.29}$$

Наша цель — исследовать поведение слабо нелинейной колебательной системы (нелинейный член $\varepsilon f(x, \dot x)$ мал вместе с ε) при воздействии на такую систему периодической силой с частотой близкой к частоте собственных колебаний линейной системы (при $\varepsilon = 0$ система линейна). При возмущении линейного осциллятора периодической силой с периодом, близким к периоду собственных колебаний осциллятора, возникает хорошо известное явление резонанса: амплитуда колебаний неограниченно возрастает с уменьшением расстройки. При анализе настоящего примера мы увидим, что наличие слабой нелинейности существенно меняет качественную картину колебаний.

Итак мы проверили, что для уравнения Дуффинга

$$\ddot x + \nu^2 x = -\varepsilon x^3 + \varepsilon a_0\cos((\nu + \varepsilon h)t), \tag{12.30}$$

являющегося частным случаем (12.24), стационарные точки амплитуды $\widetilde x$ удовлетворяют кубическому уравнению (12.29). Большой интерес представляет зависимость корней уравнения (12.29), т.е. амплитуд стационарных колебательных режимов, от расстройки h.

На рис. 12.6 изображена зависимость положительных вещественных корней (их может быть один, два или три) от h. Жирной линией изображены ветви корней уравнения (12.29), соответствующие устойчивым циклам, тонкой — неустойчивым.

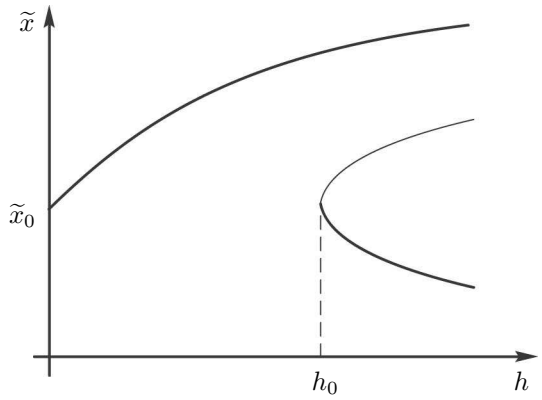

Рис. 12.6. "Жирная линия" задает величину амплитуд устойчивых циклов, "тонкая линия" — величину амплитуд неустойчивых циклов, h —"расстройка"

Из устойчивости стационарной точки $(\widetilde{a}, \widetilde{\delta})$ системы (12.28) вытекает (по теореме 12.3) существование в окрестности этой стационарной точки предельного цикла для неусредненной системы, поэтому исходное уравнение обладает периодическим решением вида $x_\varepsilon(t) = a_\varepsilon(t)\cos(\lambda_\varepsilon t - \delta_\varepsilon(t))$, где $\lambda_\varepsilon = \nu + \varepsilon h$, $a_\varepsilon(t)$ и $\delta_\varepsilon(t)$ — периодические функции с периодом $(2\pi)/(\lambda_\varepsilon)$, причем $a_\varepsilon(t) \to \widetilde{a}$, $\delta_\varepsilon(t) \to \widetilde{\delta}$ при $\varepsilon \to 0$. Этот предельный цикл при $\varepsilon \to 0$ переходит в цикл $\widetilde{a}\cos(\nu t + \widetilde{\delta})$. Заметим, что диаграмма корней, изображенная на рис. 12.6, приводит к довольно неожиданному результату: при стремлении "расстройки" h к нулю амплитуда стационарных устойчивых колебаний может и не увеличиваться (как это происходит в линейных системах при приближении частоты внешней силы к частоте собственных колебаний системы), а может и уменьшаться, или увеличиваться "скачком" при переходе через критическое значение h_0.