Глава III

Применение методов

§ 13. Усреднение уравнений с периодическими коэффициентами. Композиционные материалы

В этом параграфе мы продемонстрируем применение методов теории усреднения к эллиптическим системам на примере стационарной линейной системы теории упругости с однородным краевым условием Дирихле.

Рассмотрим периодический микронеоднородный материал, занимающий область Ω. Через ε обозначаем период микроструктуры, так что характеристики такого материала задаются тензором упругости $a_{ij}^{kl} = a_{ij}^{kl}(x/\varepsilon)$, где $a_{ij}^{kl}(\xi)$ — 1-периодическая функция (определение и свойства тензоров упругости даны в §3. Соответствующая задача принимает вид

$$L_\varepsilon \overline{u}_\varepsilon \equiv \frac{\partial}{\partial x_p}\left(A^{pq}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial \overline{u}_\varepsilon(x)}{\partial x_q}\right) = f(x), \tag{13.1}$$

где $\overline{u}_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, оператор L_ε соответствует исходному материалу, а f — произвольная гладкая функция. Примером микронеоднородного материала является составной (композиционный) материал, состоящий из двух или нескольких различных однородных материалов, образующих периодическую структуру. Математическое описание этого композиционного материала предполагает, что куб периодичности $\square$ функции $a_{ij}^{kl}(\xi)$ содержит несколько непересекающихся областей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ с гладкими границами, находящимися на положительном расстоянии друг от друга.

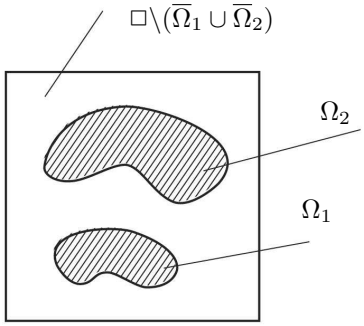

Рис. 13.1

Пусть тензор упругости $a_{ij}^{kl}(x/\varepsilon)$ принимает постоянные значения в каждой из областей Ω_i, являющихся объединением гомотетически сжатых и периодически продолженных областей Q_i, $i = 1, \ldots, N$, а также в области $\Omega\backslash\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N}\Omega_i\Big)$, которая называется *матричным материалом* или *матрицей*. Такой тензор соответствует материалу с "включениями" из N различных материалов (см. рис. 13.1).

Возможна иная ситуация, когда "включения" образуют неограниченную связную компоненту и могут иметь общие точки друг с другом. Так, например, можно рассматривать случай "армированного" материала, когда "включения" представляют собой стержни, пересекающие область армирования в нескольких различных направлениях. В этом случае ячейка периодичности $\square$ содержит часть неограниченного периодического множества, расположенного во всем пространстве $\mathbb{R}^d$. Композиционный материал задается тензором $a_{ij}^{kl}(x/\varepsilon)$, принимающим постоянные значения на Ω_1 и $\Omega\backslash\Omega_1$ (см. рис. 13.2).

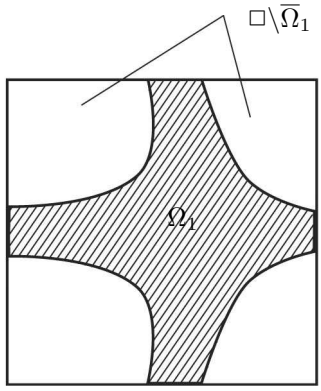

Рис. 13.2

Для построения усредненного (эффективного) тензора рассмотрим "вспомогательную" задачу на кубе периодичности $\square$ в классе периодических функций

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}N^q(\xi)\right) = -\frac{\partial}{\partial\xi_k}A^{kq}(\xi) \quad \text{в} \quad \square, \quad q = 1,\dots,d, \tag{13.2}$$

где $A^{kj}(\xi)$ — $d\times d$-матрица с компонентами $a_{il}^{kj}(\xi)$ при каждых kj, а $N^q(\xi)$ — искомая вектор-функция с 1-периодическими по $\xi_1,\dots,\xi_d$ компонентами. Разрешимость такой задачи — следствие леммы Лакса — Мильграма и неравенства Корна для периодических функций.

Задача 13.1. Докажите неравенство Корна

$$\|\overline{u}\|_{H^1(\square)} \leqslant C\|e(\overline{u})\|_{L_2(\square)}$$

для периодических функций, где $\overline{u}(x)$ — 1-периодическая по $\xi_1,\dots,\xi_d$ вектор-функция с нулевым средним, т.е. $\int\limits_{\square}\overline{u}(x)\,dx = 0$, $C > 0$ — постоянная, не зависящая от $u(x)$.

Определим матрицы функций $\widehat{A}^{pq}$ с постоянными элементами

$$\widehat{A}^{pq} = \int\limits_{\square}\left(A^{pq}(\xi) + A^{pj}(\xi)\frac{\partial N^q(\xi)}{\partial\xi_j}\right)d\xi. \tag{13.3}$$

С помощью матрицы $\widehat{A}^{pq}$ введем краевую задачу

$$\widehat{L}\overline{u}_0 := \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\widehat{A}^{pq}\frac{\partial\overline{u}_0(x)}{\partial x_q}\right) = f(x), \quad \overline{u}_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{13.4}$$

Оказывается, что система (13.4) также является системой уравнений теории упругости, т.е. для элементов матрицы $\widehat{A}^{pq}$ справедливы условия симметрии и положительной определенности. Доказательство этого важного факта основано на двух утверждениях, которые предлагаем в виде задач.

Задача 13.2. Докажите, что для матриц $\widehat{A}^{pq}(\xi)$ справедливо представление

$$\widehat{A}^{pq} = \int\limits_{\square}\frac{\partial}{\partial\xi_k}((N^p)^* + \xi_p E)A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}(N^q + \xi_q E)\,d\xi,$$

где $*$ означает транспонирование, E — единичная матрица.

Задача 13.3. Докажите, что величина

$$\widehat{a}_{ij}^{pq}\eta_{ip}\eta_{jp} := \int\limits_{\square} \frac{\partial}{\partial\xi_k}[(\eta^p)^*((N^p)^* + \xi_p E)]A^{kj}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j}[(N^q + \xi_q E)\eta^q]\,d\xi$$

удовлетворяет неравенству $\varkappa_0\eta_{ik}\eta_{ik} \leqslant \widehat{a}_{ij}^{pq}\eta_{ip}\eta_{jp}$, где $\widehat{a}_{ij}^{pq}$ — элементы матрицы $\widehat{A}^{pq}$, η_{ij} — элементы произвольной симметрической $d\times d$-матрицы.

Проверим, что система (13.4) описывает "усредненные" характеристики рассматриваемого материала. Для этого построим вектор-функцию

$$\widetilde{u}(x) = \overline{u}_0(x) + \varepsilon N^p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\overline{u}_0(x)}{\partial x_p},$$

которая будет играть роль "приближенного решения" задачи (13.1). Вычисления показывают, что

$$L_\varepsilon(\overline{u}_\varepsilon - \widetilde{u}) = -\varepsilon A^{hk}N^s\frac{\partial^3\overline{u}_0}{\partial x_h\partial x_k\partial x_s} + \left[\widehat{A}^{pq} - A^{pq} - A^{pj}\frac{\partial N^q}{\partial\xi_j} - \frac{\partial}{\partial\xi_h}(A^{hp}N^q)\right]\frac{\partial^2\overline{u}_0}{\partial x_p\partial x_q}. \tag{13.5}$$

Теперь надо установить, что величина $\|\overline{u}_\varepsilon - \widetilde{u}\|_{H^1(\Omega)}$ мала, исходя из "малости" правой части тождества (13.5) и граничного условия $(\overline{u}_\varepsilon - \widetilde{u})\big|_{\partial\Omega} = \varphi\big|_{\partial\Omega}$, где φ — вектор-функция, у которой граничные значения (т.е. след) на $\partial\Omega$ совпадают с граничными значениями на $\partial\Omega$ разности $\overline{u}_\varepsilon - \widetilde{u}$, $\varphi\in H^1(\Omega)$. В каком смысле мала правая часть (13.5)? Первое слагаемое содержит явно малый параметр. Для оценки второго слагаемого воспользуемся утверждением, которое мы предлагаем читателю доказать самостоятельно.

Задача 13.4. Пусть $h(\xi)$ — кусочно гладкая 1-периодическая по $\xi_1,\dots,\xi_d$ функция с нулевым средним, т.е. $\int\limits_{\square} h(\xi)\,d\xi = 0$. Докажите, что

$$h(\xi) = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial h_i(\xi)}{\partial\xi_i},$$

где $h_i(\xi)$ — кусочно гладкие периодические функции с нулевым средним.

С помощью этой задачи представим правую часть (13.5) в виде

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(g_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p\partial x_q}\Big) - \varepsilon g_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_i\partial x_p\partial x_q},$$

где $g_i(\xi) = h_i(\xi) - A^{ip}(\xi)N^q(\xi)$ и $\sum\limits_{i=1}^{d}\dfrac{\partial h_i}{\partial\xi_i} = \widehat{A}^{pq} - A^{pq} - A^{pj}\dfrac{\partial N^q}{\partial\xi_j}$, так как

$$\int\limits_{\square}\left[\widehat{A}^{pq} - A^{pq} - A^{pj}\frac{\partial N^q}{\partial\xi_j}\right]d\xi = 0$$

в силу определения матрицы коэффициентов $\widehat{A}^{pq}$.

Теперь оценим след $\overline{u}_\varepsilon - \widetilde{u}$ на $\partial\Omega$ в норме пространства $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Задача 13.5. Пусть $N(\xi) \in H^1(\square)$ — 1-периодическая по $\xi_1, \dots, \xi_d$ функция, $u(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Докажите, что

$$\left\| N\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) u(x) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

На основании задачи 13.5 и оценки решения задачи Дирихле для системы теории упругости имеем $\|\overline{u}_\varepsilon - \widetilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, $\widetilde{u}$ — действительно "приближенное решение" задачи (13.1) при малых ε.

Важным частным случаем микронеоднородных материалов являются так называемые слоистые материалы. Материал называется *слоистым*, если все коэффициенты тензора упругости зависят только от одного переменного, т.е. при соответствующем выборе координат $a_{ij}^{kl} = a_{ij}^{kl}(x_1/\varepsilon)$. Предположим, что периодический слоистый материал описывается системой Ламе. Тогда матрица коэффициентов симметрична и принимает вид

$$\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix},$$

причем каждый элемент является периодической функцией аргумента x_1/ε. Построим матрицу "усредненной" системы теории упругости по формуле (13.3), пользуясь тем обстоятельством, что в системе (13.4) все уравнения превращаются в обыкновенные и их можно явно решить. Выполняя необходимые вычисления, получим "усредненную" матрицу

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \right\rangle} & \left\langle \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \right\rangle^{-1} & \left\langle \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \right\rangle^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ & \langle\lambda+2\mu\rangle + \dfrac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \right\rangle} - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu} \right\rangle & \langle\lambda\rangle + \dfrac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \right\rangle} - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu} \right\rangle & 0 & 0 & 0 \\ & & \langle\lambda+2\mu\rangle + \dfrac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \right\rangle} - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu} \right\rangle & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dfrac{1}{\langle \mu^{-1} \rangle} & 0 & 0 \\ & & & & \dfrac{1}{\langle \mu^{-1} \rangle} & 0 \\ & & & & & \dfrac{1}{\langle \mu^{-1} \rangle} \end{pmatrix}$$

которая тоже будет симметричной. Здесь $\langle\cdot\rangle$ означает, как обычно, среднее по периоду, т.е. $\langle f \rangle = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$.

Отметим, что полученная система теории упругости с постоянными коэффициентами не является системой Ламе, а имеет более сложную структуру (характеризующую анизотропный, точнее, ортотропный материал).

§ 14. Задача о фильтрации вязкой несжимаемой жидкости через пористую среду. Закон Дарси

14.1. Основные понятия. Пусть Ω^ε — перфорированная область (на плоскости или в пространстве), полученная из ограниченной области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ исключением множеств вида $\varepsilon(\Xi_0 + \overline{m})$, где $\overline{m} = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$, ε — малый положительный параметр, Ξ_0 — замкнутое подмножество единичного куба $\square$ с непустой внутренностью такое, что $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup\limits_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^d} (\Xi_0 + \overline{m})$ — открытое связное множество. Предполагаем также, что множество $\square\backslash\Xi_0$ представимо в виде объединения областей Q_j $(j = 1, \dots, k)$ с липшицевыми границами: $\square\backslash\Xi_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_j$. Кроме того, мы исключаем из области Ω только те множества вида $\varepsilon(\Xi_0 + \overline{m})$, для которых $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \varepsilon(\Xi_0 + \overline{m})) \geqslant k_0\varepsilon$, $k_0 > 0$, — некоторая постоянная, не зависящая от $\varepsilon > 0$ (см. рис. 14.1).

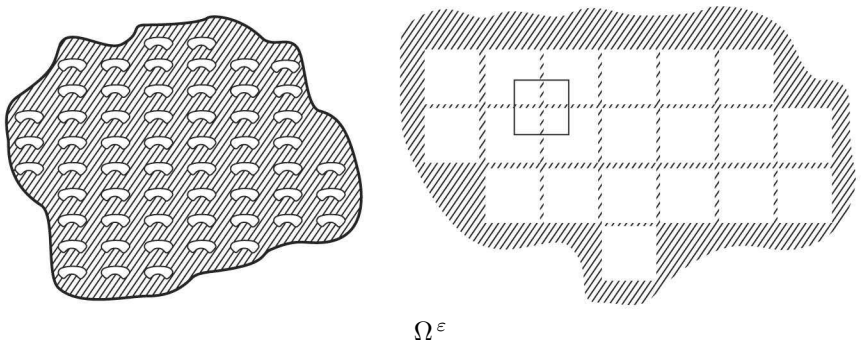

Рис. 14.1

Исключаемые из области Ω "препятствия" могут быть, как несвязанными между собой отдельными "дисперсными" включениями, так и "кирпичиками" с вырезанными в них "каналами", которые пересекаются с "соседями" по граням (см. рис. 14.2).

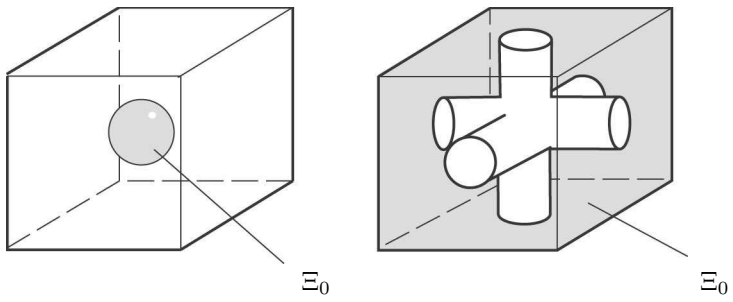

Рис. 14.2

В первом случае жидкость, находящаяся в области Ω^ε, обтекает препятствия (граница которых может быть и негладкой, например, изображенный на рис. 14.3 круг на плоскости, объединенный с отрезками).

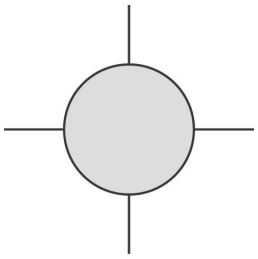

Рис. 14.3

Во втором случае жидкость "фильтруется" через систему каналов. Заметим, что и в том, и в другом случае препятствия находятся на положительном расстоянии от границы области $\partial\Omega$, что позволяет исключить появление нелипшицевых участков границы Ω^ε, возможное при пересечении препятствий с границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим задачу для системы уравнений Стокса

$$-\nabla p_\varepsilon + \Delta \overline{u}_\varepsilon + \overline{f} = 0 \text{ в } \Omega^\varepsilon, \quad \operatorname{div} \overline{u}_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega^\varepsilon, \quad \overline{u}_\varepsilon\big|_{\partial\Omega^\varepsilon} = 0, \tag{14.1}$$

где $\overline{f} \in L_2(\Omega)$, и $(p_\varepsilon, \overline{u}_\varepsilon)$ — обобщенное решение, понимаемое в смысле (4.2) или (4.3). Наша задача состоит в изучении поведения решения $(p_\varepsilon, \overline{u}_\varepsilon)$ задачи (14.1) при $\varepsilon \to 0$.

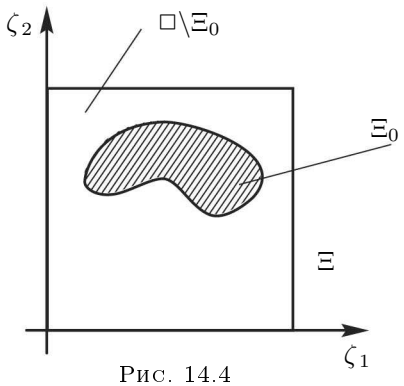

Рис. 14.4

Определим функции $(q^k, \overline{v}^k(\xi))$, $k = 1, 2$, как решения следующих вспомогательных задач на ячейке периодичности $\Xi \equiv \square\backslash\Xi_0$ (см. рис. 14.4):

$$\begin{aligned} &-\nabla_\xi q^k + \Delta_\xi \overline{v}^k + \overline{e}_k = 0 \ \text{ в } \ \Xi, \\ &\operatorname{div}_\xi \overline{v}^k = 0 \ \text{ в } \ \Xi, \\ &\overline{v}^k\big|_{\partial\Xi_0} = 0, \\ &\overline{v}^k, q^k \ \text{ 1-периодические} \\ &\quad \text{по } \xi_1, \dots, \xi_d, \end{aligned} \tag{14.2}$$

где $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_d$ — орты координатных осей $0\xi_1, \dots, 0\xi_d$. Существование решений таких задач Стокса в классе периодических функций доказывается аналогично проведенному в п. 4.2 доказательству существования решения системы Стокса для произвольной области Ω (докажите!).

Определим матрицу

$$K_{ij} \equiv \int\limits_{\Xi} v_j^i(\xi)\, d\xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d),$$

где $v_j^i(\xi)$ — j-я компонента вектора $\overline{v}^i$. Будем называть K_{ij} *матрицей эффективной фильтрации* или *матрицей Дарси.*

Задача 14.1. Докажите, что K_{ij} положительно определенная.

Далее определим вектор-функцию $\overline{u}^0(x)$ как решение следующей краевой задачи в области Ω (без отверстий):

$$\operatorname{div} \overline{u}^0 = 0 \text{ в } \Omega, \quad u_i^0 = K_{ij}\Big(f_j - \frac{\partial p^0}{\partial x_j}\Big) \text{ в } \ \Omega, \quad (\overline{u}^0, \overline{\nu}) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{14.3}$$

где u_i^0 — i-я компонента вектор-функции $\overline{u}^0$, $\overline{\nu}$ — вектор внешней нормали к области Ω.

Задача (14.3) разрешима. Действительно, рассмотрим задачу Неймана для $p^0(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(K_{ij}f_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(K_{ij}\frac{\partial p^0}{\partial x_j}\Big) \text{ в } \Omega, \quad \nu_j K_{ij} f_j = \frac{\partial p^0}{\partial \widetilde{\nu}} \text{ на } \partial\Omega, \tag{14.4}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \widetilde{\nu}} \equiv \nu_i K_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ — производная по конормали. Нетрудно проверить, что условие разрешимости этой задачи (как краевой задачи Неймана) выполнено, поэтому существует обобщенное решение $p^0 \in H^1(\Omega)$. Далее определим компоненты вектор-функции $\overline{u}^0$ формулой $u_i^0 = K_{ij}\Big(f_j - \dfrac{\partial p^0}{\partial x_j}\Big)$. Функция $\overline{u}^0$ принадлежит пространству $H(\Omega, \operatorname{div})$, которое определяется следующим образом.

Определение 14.1. Будем говорить, что $\overline{u}$ принадлежит $H(\Omega, \operatorname{div})$, если $\overline{u}(x) \in L_2(\Omega)$ и $\operatorname{div}\overline{u} \in L_2(\Omega)$. Скалярное произведение в этом (гильбертовом) пространстве определяется формулой

$$(\overline{u}, \overline{v})_{H(\Omega,\operatorname{div})} = \int\limits_\Omega (\overline{u}, \overline{v})\, dx + \int\limits_\Omega (\operatorname{div}\overline{u})(\operatorname{div}\overline{v})\, dx.$$

Хотя пространство $H(\Omega, \operatorname{div})$ состоит из функций, которые, вообще говоря, не имеют следов на гиперповерхностях размерности $(d-1)$, все же благодаря условию $\operatorname{div}\overline{u} \in L_2(\Omega)$ можно определить след нормальной компоненты $(\overline{u}, \overline{\nu})$ на $\partial\Omega$ как некоторую обобщенную функцию. В самом деле, для гладкой вектор-функции $\overline{u}(x)$ на Ω и гладкой функции $\Phi(x)$ на Ω, равной $\varphi(x)$ на $\partial\Omega$, имеем очевидное тождество

$$\int\limits_\Omega u_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_\Omega (\operatorname{div}\overline{u})\Phi\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} (u_i, \nu_i)\varphi(x)\, d\sigma.$$

Рассматривая интеграл в правой части равенства как "действие" обобщенной функции $(\overline{u}, \overline{\nu})$ на гладкую пробную функцию $\varphi(x)$, имеем оценку

$$|\langle(\overline{u}, \overline{\nu}), \varphi\rangle| \leqslant C\|\overline{u}\|_{H(\Omega,\operatorname{div})}\|\Phi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|\overline{u}\|_{H(\Omega,\operatorname{div})}\|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \tag{14.5}$$

где Φ — продолжение φ в область Ω, удовлетворяющее оценке

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Эта оценка позволяет определить обобщенную функцию $(\overline{u}, \overline{\nu})$ как линейный непрерывный функционал на $H^{1/2}(\partial\Omega)$, не только для гладких, но и для произвольных функций $\overline{u}(x) \in H(\Omega, \operatorname{div})$. Действительно, пусть $\overline{u}_n \to \overline{u}$ в $H(\Omega, \operatorname{div})$, где $\overline{u}_n$ — гладкие функции. Для $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ положим

$$\langle(\overline{u}, \overline{\nu}), \varphi\rangle \equiv \lim_{n\to\infty}\langle(\overline{u}_n, \overline{\nu}), \varphi\rangle.$$

Тогда нормальная компонента $\overline{u}$ есть элемент $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Существование предела и корректность определения обеспечиваются неравенством (14.5).

Задача 14.2. Пусть $\overline{u}_k \rightharpoonup \overline{u}$ слабо в $H(\Omega, \operatorname{div})$ при $k \to \infty$. Докажите, что $(\overline{u}_k, \overline{\nu}) \to (\overline{u}, \overline{\nu})$ в $[H^{1/2}(\partial\Omega)]'$ слабо.

Таким образом, граничное условие для $\overline{u}_k$ вида $(\overline{u}_k, \overline{\nu})\big|_{\partial\Omega} = 0$ "наследуется" слабым пределом $\overline{u}$ в пространстве $H(\Omega, \operatorname{div})$. Отметим, что при слабой сходимости в $L_2(\Omega)$ граничные условия, вообще говоря, никак не

наследуются. В самом деле, возьмем последовательность $u_k = \sin^2 kx$ на отрезке $[0,1]$. Все допредельные функции удовлетворяют условию $u_k(0) = 0$, а слабый предел есть постоянная $u = C$ (какая она?), отличная от нуля, поэтому $u(0) \neq 0$.

Задача 14.3. Докажите, что компонента $p^0(x)$ решения $(\overline{u}^0, p^0)$ задачи (14.3), где $\overline{u}^0 \in H(\Omega, \mathrm{div})$, $p^0(x) \in H^1(\Omega)$, является обобщенным решением задачи Неймана (14.4).

14.2. Теорема усреднения. Приводимый ниже результат о предельном переходе для решения задачи Стокса в перфорированной области, приводящий к так называемому "закону Дарси", на качественном уровне был известен специалистам по теории фильтрации жидкости несколько десятков лет назад, однако строгое математическое обосновывание предельного перехода от задачи Стокса в пористой среде к закону Дарси в однородной среде вызывало значительные математические трудности.

В работе Тартара, опубликованной в приложении к монографии [**112**], указанный предельный переход был осуществлен для ограниченной области Ω. Ранее такой предельный переход выполнен Волковым [**34**] методом асимптотических разложений для неограниченной области. В работе Жикова [**52**] были существенно ослаблены условия гладкости границы препятствия (включения) Ξ_0, именно: были рассмотрены некоторые классы областей Ξ_0 с нелипшицевыми границами $\partial\Xi_0$. Сандраков [**110**] исследовал задачи нестационарной фильтрации, когда внешняя сила, действующая на область с жидкостью, зависит от времени.

Мы предлагаем здесь два разных подхода: первый — опирающийся на технику предельного перехода в интегральных тождествах (близкий к работе Тартара), а второй — использующий технику двухмасштабной сходимости (близкий к работе Аллера [**3**]). Второй подход дает более сильный и полный результат: с его помощью удается доказать сильную сходимость давления, а также получить более точные результаты об асимптотике скорости фильтрации.

Сформулируем основной результат настоящего раздела.

Теорема 14.1. *Пусть $\widetilde{u}_\varepsilon(x)$ — решение $\overline{u}_\varepsilon(x)$, продолженное нулем на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. При всех $\varepsilon > 0$ существует продолжение $P_\varepsilon(x)$ давления $p_\varepsilon(x)$ на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ такое, что $\dfrac{\widetilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightharpoonup \overline{u}^0$ слабо в $L_2(\Omega)$ и $P_\varepsilon \to p^0$ сильно в $L_2(\Omega)$, где $(\overline{u}^0, p^0)$ — решение задачи* (14.3).

Доказательство. Очевидно, что

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial \widetilde{u}^i_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \widetilde{u}^i_\varepsilon}{\partial x_j}\, dx = -\int\limits_\Omega f^i \widetilde{u}^i_\varepsilon\, dx,$$

откуда

$$\int\limits_\Omega |\nabla \widetilde{u}_\varepsilon|^2\, dx \leqslant C \|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}. \tag{14.6}$$

Далее воспользуемся неравенством Фридрихса для области Ω^ε.

Задача 14.4. Докажите, что для каждой функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$

$$\|u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon \|\nabla u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{14.7}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от ε и функции $u(x)$.

На основании (14.6) и (14.7) имеем

$$\int\limits_\Omega |\nabla \widetilde{u}_\varepsilon|^2\,dx \leqslant C\varepsilon \left(\int\limits_\Omega |\nabla \widetilde{u}_\varepsilon|^2\,dx \right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\left(\int\limits_\Omega |\nabla \widetilde{u}_\varepsilon|^2\,dx \right)^{1/2} \leqslant C\varepsilon.$$

Применяя неравенство Фридрихса (14.7) еще раз, получим $\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^2$. Таким образом, доказано, что

$$\left\| \frac{\widetilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C. \tag{14.8}$$

Важным шагом доказательства теоремы является следующая

Лемма 14.1. *При всех $\varepsilon > 0$ давление $p_\varepsilon(x)$ допускает продолжение с области Ω^ε на Ω (продолжение обозначим $P_\varepsilon(x)$) такое, что из любой последовательности $\{P_{\varepsilon'}(x)\}$, $\varepsilon' \to 0$, можно выбрать подпоследовательность $\{P_{\varepsilon''}(x)\}$, удовлетворяющую условиям $P_{\varepsilon''} \rightharpoonup p^*$ слабо в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon'' \to 0$, $p^* \in L_2(\Omega)$ и для любых $\Phi(\xi) \in L_2(\Xi)$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\lim_{\varepsilon''\to 0} \int\limits_\Omega P_{\varepsilon''}(x)\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon''}\Big)\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega p^*(x)\varphi(x)\,dx \int\limits_\Xi \Phi(\xi)\,d\xi. \tag{14.9}$$

Доказательство этой леммы приведем в п. 14.3 ниже, а сейчас покажем, как с ее помощью можно получить систему уравнений на $(p^*(x), u^*(x))$, где $p^*(x)$ и $u^*(x)$ — слабые пределы произвольных сходящихся подпоследовательностей $\{P_{\varepsilon'}(x)\}$ и $\left\{ \dfrac{\widetilde{u}_{\varepsilon'}(x)}{\varepsilon'^2} \right\}$ при $\varepsilon' \to 0$. Для этого запишем вспомогательную систему (14.2) в переменных $x = \varepsilon\xi$ ($q_\varepsilon^k \equiv q^k(x/\varepsilon)$, $\overline{v}_\varepsilon^k \equiv \overline{v}^k(x/\varepsilon)$):

$$\begin{aligned} &-\varepsilon\nabla_x q_\varepsilon^k + \varepsilon^2 \Delta_x \overline{v}_\varepsilon^k + \overline{e}_k = 0 \text{ в } E_\varepsilon, \quad \operatorname{div}_x \overline{v}_\varepsilon^k = 0 \text{ в } E_\varepsilon, \\ &\overline{v}^k\big|_{\partial E_\varepsilon} = 0, \quad \overline{v}_\varepsilon^k, q_\varepsilon^k \quad \varepsilon\text{-периодические по } x_1, \dots, x_d, \end{aligned} \tag{14.10}$$

где $E_\varepsilon = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup\limits_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^d} \varepsilon(\Xi_0 + \overline{m})$.

Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ — произвольная функция. Умножая (14.10) на $\widetilde{u}_\varepsilon\varphi(x)$ скалярно, интегрируя по частям и считая, что векторы $\overline{v}_\varepsilon^k$ продолжены нулем на $\mathbb{R}^d \setminus E_\varepsilon$, получим

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial(\overline{v}_\varepsilon^k)_i}{\partial x_j} \frac{\partial((\widetilde{u}_\varepsilon)_i\varphi)}{\partial x_j}\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega q_\varepsilon^k \operatorname{div}(\widetilde{u}_\varepsilon\varphi)\,dx + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_\Omega e_k\varphi\widetilde{u}_\varepsilon\,dx.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая оценку (14.8) и обозначая

$$I_1^{\varepsilon,k} := \int\limits_\Omega \frac{\partial(\overline{v}_\varepsilon^k)_i}{\partial x_j} \frac{\partial((\widetilde{u}_\varepsilon)_i\varphi)}{\partial x_j}\,dx.$$

Получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_1^{\varepsilon,k} = \int\limits_\Omega \varphi u_k^*\,dx.$$

Умножая теперь (14.1) на $\varphi\overline{v}_\varepsilon^k$ скалярно и интегрируя по частям по области Ω, выводим равенство

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial(\widetilde{u}_\varepsilon)_i}{\partial x_j}\frac{\partial(\varphi(\overline{v}_\varepsilon^k)_i)}{\partial x_j}\,dx = \int\limits_\Omega f_i\varphi(\overline{v}_\varepsilon^k)_i\,dx + \int\limits_\Omega P_\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\overline{v}_\varepsilon^k)_i\,dx.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу, учитывая определение матрицы K_{ij}. Обозначив

$$I_2^{\varepsilon,k} := \int\limits_\Omega \frac{\partial(\widetilde{u}_\varepsilon)_i}{\partial x_j}\frac{\partial(\varphi(\overline{v}_\varepsilon^k)_i)}{\partial x_j}\,dx,$$

получим с помощью леммы 14.1

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2^{\varepsilon,k} = K_{ki}\int\limits_\Omega f_i\varphi\,dx + K_{ki}\int\limits_\Omega p^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx.$$

Нетрудно показать (покажите!), что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(I_1^{\varepsilon,k} - I_2^{\varepsilon,k}) = 0$, поэтому

$$\langle u_k^*, \varphi\rangle = K_{ki}\left\langle f_i - \frac{\partial p^*}{\partial x_i}, \varphi\right\rangle$$

или, ввиду произвольности $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$u_k^* = K_{ki}\left(f_i - \frac{\partial p^*}{\partial x_i}\right).$$

Эта система уравнений совпадает с (14.3). Теорема доказана, однако, не в полном объеме! Установлена лишь слабая сходимость $p_\varepsilon(x)$ к $p^0(x)$. Ниже будет доказана двухмасштабная сходимость $p_\varepsilon(x)$ к $p^0(x)$. □

14.3. Вывод закона Дарси с помощью метода двухмасштабной сходимости.

Теорема 14.2. *Пусть $f(x)\in L_2(\Omega^\varepsilon)$, область Ξ представима в виде объединения конечного числа областей Q_j, $j=1,\dots,k$, с липшицевыми границами и $\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f(x)\,dx = 0$. Тогда существует вектор-функция $\overline{u}_\varepsilon(x)\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$ такая, что $\operatorname{div}\overline{u}_\varepsilon(x) = f(x)$ и выполнены оценки*

$$\|\nabla\overline{u}_\varepsilon(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\|f(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \quad \|\overline{u}_\varepsilon(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\|f(x)\|_{L_2(\Omega)},$$

где $C>0$ не зависит от функции $f(x)$.

Доказательство. Разобьем доказательство теоремы 14.2 на несколько шагов, некоторые из которых мы предлагаем в виде задач.

Шаг 1. Предположим сначала, что область Ξ имеет липшицеву границу.

Задача 14.5. Пусть область Ξ имеет липшицеву границу. Докажите, что в области Ω^ε справедливо неравенство Пуанкаре

$$\left\| u - \int\limits_{\Omega^\varepsilon} u(x)\,dx \right\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant K\|\nabla u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$$

для любой $u\in H^1(\Omega^\varepsilon)$, причем постоянная $K>0$ не зависит от $\varepsilon>0$.

Указание. Используйте результат о продолжении произвольной функции $u \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ в область Ω с соответствующей (равномерной по ε) оценкой для нормы продолжения в $H^1(\Omega)$. Этот результат доказан, например, в **[97, 98]**; мы уже ссылались на него при доказательстве неравенства Фридрихса для перфорированной области в разделе 7.2. Приведем его формулировку.

Теорема 14.3. *Существует оператор продолжения $P_\varepsilon : H^1(\Omega^\varepsilon) \to H^1(\Omega)$, функций $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ на область Ω (без перфорации) такой, что*

1) $\|P_\varepsilon u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$ *для любой $u \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, где постоянная $C > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$,*

2) $\|\nabla(P_\varepsilon u)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$ *для любой $u \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, где постоянная $C > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$,*

3) *если $u(x) \equiv 1$ на Ω^ε, то $P_\varepsilon u = 1$ на Ω.*

Сформулируем еще две задачи.

Задача 14.6. Покажите, что для решения задачи Неймана

$$\Delta V = f \ \text{ в } \ \Omega^\varepsilon, \quad \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f(x)dx = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega^\varepsilon,$$

понимаемой в смысле интегрального тождества, справедлива оценка

$$\|\nabla V\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant K\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где постоянная $K > 0$ не зависит от ε.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 14.5.

Задача 14.7. Докажите, что (при достаточно большом k_0 из определения перфорированной области Ω^ε) область Ω^ε представима в виде объединения областей Ω_i^ε, $i = 1, \ldots, N(\varepsilon)$: $\Omega^\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} \Omega_i^\varepsilon$ так, что для каждой Ω_i^ε справедлива оценка теоремы 1.7 с постоянной $C > 0$, не зависящей от $i = 1, \ldots, N(\varepsilon)$ и $\varepsilon > 0$.

Заметим, что в условиях задачи 14.7 число $N(\varepsilon)$ может расти к бесконечности с уменьшением ε.

Построим разбиение единицы $1 = \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} \psi_i^\varepsilon$ в области Ω^ε такое, что

(1) $\operatorname{supp}\psi_i^\varepsilon \subset \overline{\Omega}_i^\varepsilon$,

(2) $|\nabla\psi_i^\varepsilon| \leqslant M/\varepsilon$, где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от $i = 1, \ldots, N(\varepsilon)$,

(3) для каждого $x \in \Omega^\varepsilon$ сумма $\sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} \psi_i^\varepsilon(x)$ содержит не более, чем L отличных от нуля слагаемых, причем L от ε не зависит.

Задача 14.8. Докажите, что такое разбиение единицы существует.

Положим $f_i = \operatorname{div}(\psi_i^\varepsilon \cdot \overline{F})$, $\overline{F} = \nabla V$, где функция V определена в условии задачи 14.6. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} f_i = f$ в Ω^ε и, главное,

$$\int\limits_{\Omega_i^\varepsilon} f_i(x)\,dx = 0.$$

Действительно,

$$\int\limits_{\Omega_i^\varepsilon} f_i\,dx = \int\limits_{\partial\Omega_i^\varepsilon} \psi_i^\varepsilon \ \ \overline{F}, \overline{n} \ \ d\sigma = 0,$$

поскольку $(\overline{F}, \overline{n}) = 0$ на $\partial\Omega^\varepsilon$ и $\psi_i^\varepsilon = 0$ на $\partial\Omega_i^\varepsilon \backslash \partial\Omega^\varepsilon$.

Согласно теореме 1.7 существуют функции $w_i \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_i^\varepsilon)$ такие, что $\operatorname{div} w_i = f_i$ в Ω_i^ε и $\|w_i\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_i^\varepsilon)} \leqslant C\|f_i\|_{L_2(\Omega_i^\varepsilon)}$, где C не зависит от $i = 1, \dots, N(\varepsilon)$ и $\varepsilon > 0$. Положим $w = \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} w_i$. Заметим, что для любого $x \in \Omega^\varepsilon$ отлично от нуля не более, чем L слагаемых $\|f_i\|^2_{L_2(\Omega_i^\varepsilon)}$, и для каждого из них справедлива оценка

$$\|f_i\|^2_{L_2(\Omega_i^\varepsilon)} \leqslant 2\|f\|^2_{L_2(\Omega_i^\varepsilon)} + 2\frac{M^2}{\varepsilon^2}K^2\|f\|^2_{L_2(\Omega_i^\varepsilon)}.$$

Поэтому

$$\|w\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant 2C\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|f_i\|^2_{L_2(\Omega_i^\varepsilon)} \leqslant 2CL\left(2 + \frac{2M}{\varepsilon}K\right)^2 \|f\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Теперь легко проверить, что $\overline{u}_\varepsilon = w$ удовлетворяет всем условиям теоремы 14.2.

Шаг 2. Пусть граница области Ξ не липшицева, но $\Xi = \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_j$, где области Q_j имеют липшицевы границы.

Задача 14.9. Пусть $f \in L_2(\Omega^\varepsilon)$ и $\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f(x)\,dx = 0$. Докажите, что существуют функции $\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_k$ такие, что

1) $\operatorname{supp}\widetilde{f}_j \subset \widetilde{\Omega}_j^\varepsilon$, где $\partial\widetilde{\Omega}_j^\varepsilon$ липшицева и $\widetilde{\Omega}_j^\varepsilon \subset \Omega^\varepsilon$ можно представить (как в условии задачи 14.8) в виде $\widetilde{\Omega}_j^\varepsilon = \bigcup\limits_{i}^{N(\varepsilon)} \Omega_{i,j}^\varepsilon$, причем для $\Omega_{i,j}^\varepsilon$ выполнена оценка теоремы 1.7 с постоянной C, не зависящей от i, ε,

2) $\int\limits_{\widetilde{\Omega}_j^\varepsilon} \widetilde{f}_j\,dx = 0$, $j = 1, \dots, k$,

3) $\int\limits_{\widetilde{\Omega}_j^\varepsilon} \widetilde{f}_j^2\,dx \leqslant C_1(k)\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |f|^2\,dx$, $j = 1, \dots, k$, где $C_1(k)$ зависит только от k,

3) $f = \sum\limits_{j=1}^{k} \widetilde{f}_j$.

Указание. Представление $f = \sum\limits_j \widetilde{f}_i$ строится аналогично тому, как построено разложение функции f в доказательстве теоремы 1.7. Для доказательства оценки 3) существенно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} |\widetilde{\Omega}_i^\varepsilon \cap \widetilde{\Omega}_j^\varepsilon| > 0$, $i, j = 1, \dots, k$.

Построим теперь (в соответствии с доказанным ранее) функции $\widetilde{w}_j \in \overset{\circ}{H}{}^1(\widetilde{\Omega}_j^\varepsilon)$, для которых $\operatorname{div}\widetilde{w}_j = \widetilde{f}_j$ и $\|\widetilde{w}_j\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\widetilde{\Omega}_j^\varepsilon)} \leqslant C\|\widetilde{f}_j\|_{L_2(\widetilde{\Omega}_j^\varepsilon)}$. Суммируя эти оценки по j и пользуясь свойством 3) функций $\widetilde{f}_j$ (задача 14.9), получаем утверждение теоремы 14.2 в полном объеме. □

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Стокса

$$\begin{aligned} &\nabla p_\varepsilon - \varepsilon^2\Delta\overline{u}_\varepsilon = \overline{f} \text{ в } \Omega^\varepsilon, \quad \operatorname{div}\overline{u}_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega^\varepsilon, \\ &\overline{u}_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon, \quad \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p_\varepsilon(x)\,dx = 0. \end{aligned} \tag{14.11}$$

Здесь мы вводим малый параметр ε^2 при члене $\Delta\overline{u}_\varepsilon$ для нормировки вектора скоростей $\overline{u}_\varepsilon(x)$ течения жидкости. При такой нормировке скорости фильтрации будут иметь конечный предел при $\varepsilon \to 0$.

Умножая скалярно первое уравнение в (14.11) на $\overline{u}_\varepsilon$ и интегрируя по частям, получаем

$$\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla\overline{u}_\varepsilon, \nabla\overline{u}_\varepsilon)\, dx = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\overline{f}, \overline{u}_\varepsilon)\, dx. \tag{14.12}$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского и неравенству Фридрихса для области Ω^ε (задача 14.4) имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla\overline{u}_\varepsilon, \nabla\overline{u}_\varepsilon)\, dx &\leqslant \biggl(\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\overline{f}|^2\, dx\biggr)^{1/2} \biggl(\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\overline{u}_\varepsilon|^2\, dx\biggr)^{1/2} \\ &\leqslant C\biggl(\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\overline{f}|^2\, dx\biggr)^{1/2} \biggl(\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon|^2\, dx\biggr)^{1/2},\end{aligned}$$

откуда

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon|^2\, dx \leqslant C. \tag{14.13}$$

Далее, еще раз применяя неравенство Фридрихса, получаем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\overline{u}_\varepsilon|^2\, dx \leqslant C \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon|^2\, dx \leqslant C'. \tag{14.14}$$

Таким образом, функции $\{\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon\}$ и $\{\overline{u}_\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L_2(\Omega^\varepsilon)$.

Докажем ограниченность давления $p_\varepsilon(x)$ в $L_2(\Omega^\varepsilon)$. Для этого на основании теоремы 14.2 построим вектор-функцию $\overline{v}_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$ такую, что $\operatorname{div}\overline{v}_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(x)$ в Ω^ε и

$$\|\nabla\overline{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\|p_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \quad \|\overline{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\|p_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{14.15}$$

Умножая первое уравнение в (14.11) на $\overline{v}_\varepsilon(x)$ и интегрируя по частям в Ω^ε, получим

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} p_\varepsilon^2\, dx = \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla\overline{u}_\varepsilon, \nabla\overline{v}_\varepsilon)\, dx - \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \overline{f}(x)\overline{v}_\varepsilon(x)\, dx.$$

Далее воспользуемся ограниченностью в $L_2(\Omega^\varepsilon)$ функций $\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon$, оценками (14.15) для $\varepsilon\nabla\overline{v}_\varepsilon$, $\overline{v}_\varepsilon(x)$ и неравенством Коши — Буняковского. Получим

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} p_\varepsilon^2(x)\, dx \leqslant C(\|\varepsilon\nabla\overline{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \|\overline{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}) \leqslant C'\|p_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Отсюда $\|p_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C$, где $C > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$.

Продолжим давление $p_\varepsilon(x)$ на всю область Ω следующим образом:

$$P_\varepsilon(x) = \begin{cases} p_\varepsilon(x), & x \in Y^\varepsilon_{s,j}, \\ \dfrac{1}{|Y^\varepsilon_{s,j}|} \displaystyle\int\limits_{Y^\varepsilon_{s,j}} p_\varepsilon(x)\, dx, & x \in Y^\varepsilon_{h,j}, \end{cases} \tag{14.16}$$

где $Y^\varepsilon_{h,j}$ и $Y^\varepsilon_{s,j}$ — области вида $\varepsilon(\Xi_0+\overline{m})$ и $\varepsilon((\Xi)+\overline{m})$, занумерованные одним скалярным индексом $j=1,\dots,N(\varepsilon)$, причем $\overline{\varepsilon(\Xi_0+\overline{m})}\subset\Omega$. Функции $\overline{u}_\varepsilon(x)$ продолжим нулем в Ω (сохранив за продолженной функцией то же обозначение). Согласно теоремам 9.1 и 9.3 в силу ограниченности $\{\overline{u}_\varepsilon(x)\}$ и $\{P_\varepsilon(x)\}$ из этих последовательностей можно выбрать двухмасштабно сходящиеся подпоследовательности такие, что $\overline{u}_\varepsilon(x)\xrightarrow{2}\overline{u}_0(x,\xi)$ в Ω и $P_\varepsilon(x)\xrightarrow{2}p(x,\xi)$ в Ω.

Лемма 14.2. *Двухмасштабный предел давления $p(x,\xi)$ не зависит от переменной ξ, т.е. $p(x,\xi)=p(x)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\psi}(x,\xi)$ — произвольная бесконечно гладкая вектор-функция, периодическая по переменной ξ и имеющая компактный в Ω носитель по переменной x. Пространство таких функций обозначим $C_0^\infty(\Omega,C^\infty_{\mathrm{per}}(\square))$. Покажем, что

$$\int\limits_\Omega P_\varepsilon(x)\mathrm{div}_\xi\overline{\psi}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0.$$

Действительно,

$$\int\limits_\Omega P_\varepsilon(x)\mathrm{div}_\xi\overline{\psi}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx=\varepsilon\int\limits_\Omega P_\varepsilon(x)\,\mathrm{div}\,\Big(\overline{\psi}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,dx-\varepsilon\int\limits_\Omega P_\varepsilon(x)\mathrm{div}_x\overline{\psi}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx.$$

В силу ограниченности P_ε второе слагаемое в правой части равенства стремится к нулю, поэтому достаточно доказать сходимость к нулю первого слагаемого. В силу определения продолжения P_ε

$$\varepsilon\int\limits_\Omega P_\varepsilon(x)\mathrm{div}\Big(\overline{\psi}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,dx=\varepsilon\sum_j\int\limits_{Y^\varepsilon_{s,j}}p_\varepsilon(x)\Big[\mathrm{div}\,\overline{\psi}+\frac{1}{|Y^\varepsilon_{s,j}|}\int\limits_{Y^\varepsilon_{h,j}}\mathrm{div}\,\overline{\psi}\,dx\Big]\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon_{\mathrm{bnd}}}P_\varepsilon(x)\mathrm{div}\Big(\overline{\psi}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,dx,$$

где

$$\Omega^\varepsilon_{\mathrm{bnd}}\equiv\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)}(Y^\varepsilon_{s,j}\cup Y^\varepsilon_{h,j})=\Omega\setminus\bigcup_{\{\overline{m}:\mathrm{dist}(\partial\Omega,\varepsilon(\Xi_0+\overline{m}))\geqslant k_0\varepsilon\}}\varepsilon(\square+\overline{m}).$$

Поскольку функция $\psi(x,\xi)$ имеет компактный носитель в Ω, второй интеграл в правой части обращается в нуль при всех достаточно малых ε. Следовательно,

$$\varepsilon\int\limits_\Omega P_\varepsilon\ \mathrm{div}\,\overline{\psi}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx=\varepsilon\sum_j\int\limits_{Y^\varepsilon_{s,j}}p_\varepsilon(x)\Big[\mathrm{div}\,\overline{\psi}+\frac{1}{|Y^\varepsilon_{s,j}|}\int\limits_{Y^\varepsilon_{h,j}}\mathrm{div}\,\overline{\psi}\,dx\Big]\,dx$$

при достаточно малых ε. Обозначим величину, заключенную в квадратные скобки в последнем интеграле, через $\varkappa^\varepsilon_{s,j}$ и заметим, что

$$|\varkappa^\varepsilon_{s,j}|=\Big|\int\limits_{Y^\varepsilon_{s,j}}\Big[\mathrm{div}\overline{\psi}+\frac{1}{|Y^\varepsilon_{s,j}|}\int\limits_{Y^\varepsilon_{h,j}}\mathrm{div}\overline{\psi}\,dx\Big]\,dx\Big|\leqslant C\varepsilon^d$$

(проверьте!). Поэтому в силу теоремы 14.2 существует вектор-функция $\overline{w}_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$ такая, что $\varepsilon\nabla\overline{w}_\varepsilon(x)$ и $\overline{w}_\varepsilon(x)$ равномерно по ε ограничены в $L_2(\Omega^\varepsilon)$ и имеет место равенство

$$\operatorname{div}\overline{w}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \operatorname{div}\overline{\psi} + \dfrac{1}{|Y^\varepsilon_{s,j}|}\displaystyle\int\limits_{Y^\varepsilon_{h,j}} \operatorname{div}\overline{\psi}\,dx - \dfrac{\varkappa^\varepsilon_{s,j}}{|Y^\varepsilon_{s,j}|}, & x \in Y^\varepsilon_{s,j},\quad j = 1,\dots,N(\varepsilon), \\ 0, & x \in \Omega^\varepsilon \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N(\varepsilon)} Y^\varepsilon_{s,j}. \end{cases}$$

На основании определения функции $\overline{w}_\varepsilon(x)$ и системы Стокса (14.11)

$$\varepsilon\int\limits_\Omega P_\varepsilon(x)\operatorname{div}\left(\overline{\psi}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right)dx = \varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon} p_\varepsilon \operatorname{div}\overline{w}_\varepsilon\,dx + O(\varepsilon)$$
$$= \varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon, \varepsilon\nabla\overline{w}_\varepsilon)\,dx - \varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\overline{f},\overline{w}_\varepsilon)\,dx + O(\varepsilon).$$

В силу ограниченности в $L_2(\Omega^\varepsilon)$ функций $\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon$, $\varepsilon\nabla\overline{w}_\varepsilon$, $\overline{w}_\varepsilon$ и неравенства Коши — Буняковского справедливо предельное соотношение

$$\varepsilon\int\limits_\Omega P_\varepsilon(x)\operatorname{div}\Big(\overline{\psi}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,dx \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

и, следовательно,

$$\int\limits_\Omega P_\varepsilon(x)\operatorname{div}_\xi\overline{\psi}\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

С другой стороны, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ двухмасштабно в том же самом интеграле, получим

$$\int\limits_{\Omega\times\Xi} p(x,\xi)\operatorname{div}_\xi\overline{\psi}(x,\xi)\,dx\,d\xi = 0.$$

Следовательно, $\nabla_\xi p(x,\xi) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$ в смысле теории обобщенных функций. Поэтому $p(x,\xi) = p(x)$, т.е. функция P_ε не зависит от переменной ξ. □

Заметим, что мы здесь фактически доказали лемму 14.1 (ее доказательство было отложено), и поэтому почти завершили доказательство теоремы 14.1 об усреднении. Осталось установить сильную сходимость продолжений $P_\varepsilon(x)$ к предельному давлению $p(x)$.

Дадим еще один вывод теоремы 14.1, который непосредственно опирается на результаты о двухмасштабной сходимости. Приводимые здесь рассуждения представляют собой модификацию доказательства, предложенного Аллером [**3**].

Запишем условие несжимаемости в виде

$$\int\limits_\Omega (\overline{u}_\varepsilon, \nabla_x\varphi)\,dx = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Переходя к двухмасштабному пределу, получаем

$$\int\limits_{\Omega\times\Xi} (\overline{u}_0(x,\xi), \nabla_x\varphi)\,dx\,d\xi = 0,$$

что в силу произвольности функции $\varphi(x)$ приводит к равенству

$$\operatorname{div}_x \int\limits_{\Xi} [\overline{u}_0(x,\xi)]\, d\xi = 0. \tag{14.17}$$

С помощью оценок (14.14) легко показать, что $\overline{u}_0(x,\xi) \in L_2(\Omega, [\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Xi)]^d)$. Введем функциональный класс

$$\mathscr{A} = \Big\{ \overline{\psi}(x,\xi) \in C_0^\infty(\Omega, C^\infty_{\rm per}(\square)) : \overline{\psi}(x,\xi) = 0 \text{ при } \xi \in \Xi_0, \operatorname{div}_\xi \overline{\psi}(x,\xi) = 0, \\ \operatorname{div}_x \int\limits_{\Xi} \overline{\psi}(x,\xi)\, d\xi = 0 \Big\}.$$

Умножая (14.11) скалярно на тестовую вектор-функцию $\overline{\psi}(x, x/\varepsilon)$, $\overline{\psi}(x,\xi) \in \mathscr{A}$, и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-1} \int\limits_\Omega P_\varepsilon \operatorname{div}_\xi \overline{\psi}\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\, dx + \int\limits_\Omega P_\varepsilon \operatorname{div}_x \overline{\psi}\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\, dx \\ &+ \int\limits_\Omega \Big(\varepsilon \nabla \overline{u}_\varepsilon, \nabla_\xi \overline{\psi}\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\, dx + \varepsilon^2 \int\limits_\Omega \Big(\nabla \overline{u}_\varepsilon, \nabla_x \overline{\psi}\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\, dx \\ &= \int\limits_\Omega \Big(\overline{f}(x), \overline{\psi}\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\, dx. \end{aligned}$$

Переходя к пределу двухмасштабно на основании теоремы 9.3 и учитывая свойства функции $\overline{\psi}(x,\xi)$, приходим к равенству

$$\int\limits_{\Omega\times\Xi} (\nabla_\xi \overline{u}_0(x,\xi), \nabla_\xi \overline{\psi}(x,\xi))\, dx\, d\xi = \int\limits_{\Omega\times\Xi} (\overline{f}(x), \overline{\psi}(x,\xi))\, dx\, d\xi. \tag{14.18}$$

Определим теперь обобщенную векторнозначную функцию $\Delta_\xi \overline{u}_0(x,\xi) + \overline{f}(x)$ из $L_2\Big(\Omega, [H^{-1}_{\rm per}(\Xi)]^d\Big)$, действующую на основные функции $\overline{\psi}(x,\xi) \in L_2(\Omega, [\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Xi)]^d)$ по правилу

$$\langle \Delta_\xi \overline{u}_0 + \overline{f}, \overline{\psi}\rangle \equiv \int\limits_{\Omega\times\Xi} [-(\nabla_\xi \overline{u}_0(x,\xi), \nabla_\xi \overline{\psi}(x,\xi)) + (\overline{f}, \overline{\psi})]\, dx\, d\xi.$$

Определим также функциональное пространство V как замыкание введенного выше класса $\mathscr{A}$ по норме пространства $L_2(\Omega, [\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Xi)]^d)$. Равенство (14.18) остается справедливым для любой $\psi(x,\xi) \in V$.

Лемма 14.3. *Пусть*

$$\langle \Delta_\xi \overline{u}_0 + \overline{f}, \overline{\psi}\rangle = 0 \quad \forall \overline{\psi}(x,\xi) \in V.$$

Тогда существуют функции $\Phi \in L_2(\Omega)$ *и* $\Phi_1 \in L_2(\Omega, L_2(\Xi))$ *такие, что*

$$\Delta_\xi \overline{u}_0(x,\xi) + \overline{f}(x) = \nabla_\xi \Phi_1(x,\xi) + \nabla_x \Phi(x).$$

Доказательство. Определим пространства функций V_1 и V_2 как замыкания по норме пространства $L_2(\Omega, [\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Xi)]^d)$ классов гладких функций

$$\mathscr{A}_1 = \bigl\{\overline{\varphi}(x,\xi) \in C^\infty_{0,\rm per}(\Omega\times\Xi) : \operatorname{div}_\xi \overline{\psi}(x,\xi) = 0\bigr\},$$
$$\mathscr{A}_2 = \left\{\overline{\varphi}(x,\xi) \in C^\infty_{0,\rm per}(\Omega\times\Xi) : \operatorname{div}_x \left[\int\limits_\Xi \overline{\psi}(x,\xi)\,d\xi\right] = 0\right\}$$

соответственно. Тогда

$$V_1 = \{\overline{\psi}(x,\xi) \in L_2(\Omega, [\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Xi)]^d); \operatorname{div}_\xi \overline{\psi} = 0 \ \text{ в } \ \Omega\times\Xi\},$$

$$V_2 = \left\{\overline{\psi}(x,\xi) \in L_2(\Omega, [\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(\Xi)]^d); \operatorname{div}_x \left[\int\limits_\Xi \overline{\psi}\,d\xi\right] = 0 \ \text{ в } \ \Omega,\right.$$
$$\left.\left(\int\limits_\Xi \overline{\psi}\,d\xi, n(\xi)\right) = 0 \ \text{ на } \partial\Omega\right\},$$

где $n(\xi)$ — единичный вектор нормали к $\partial\Omega$. Для доказательства этих равенств воспользуемся следующим утверждением из [**121**]: *Пусть $\mathscr{O}$ — множество бездивергентных $C^\infty_0(G)$-функций в ограниченной липшицевой области G. Тогда замыкания $\mathscr{O}$ в пространствах $L_2(G)$ и $H^1(G)$ совпадают с множествами $\{\overline{u} \in (L_2(G))^d : \operatorname{div}\overline{u} = 0$ в G, $(u,n) = 0$ на $\partial G\}$ и $\{\overline{u} \in [\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm per}(G)]^d : \operatorname{div}\overline{u} = 0$ в $\partial G\}$ соответственно.* □

Отсюда можно получить требуемые утверждения о замыкании классов $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ в случае, когда границы множеств Ω и Ξ липшицевы. В нашем случае множество Ξ может не быть липшицевым: оно представляет собой объединение конечного числа липшицевых областей. Однако анализ доказательства теоремы 1.1.6 в [**121**] показывает, что эта теорема остается в силе и для таких множеств. Дело в том, что в доказательстве из [**121**] липшицевость границы используется только при применении теоремы де Рама. В настоящей монографии теорема де Рама была доказана для множеств, являющихся объединением конечного числа липшицевых областей, поэтому утверждение теоремы 1.1.6 в [**121**] остается в силе и для таких множеств.

Задача 14.10. Покажите, что произвольная векторнозначная обобщенная функция $\overline{F}$ из $L_2\left(\Omega, H^{-1}_{\rm per}(\Xi)\right)$, удовлетворяющая условию $\langle\overline{F}, \overline{\psi}\rangle = 0$ для всех $\overline{\psi} \in V_1$ имеет вид $\overline{F} = \nabla_\xi \Phi_1(x,\xi)$, где $\Phi_1 \in L_2(\Omega, L_{2,\rm per}(\Xi))$.

Указание. Воспользуйтесь аналогом теоремы де Рама для области Ξ.

Задача 14.11. Покажите, что произвольная векторнозначная обобщенная функция G из $L_2\left(\Omega, H^{-1}_{\rm per}(\Xi)\right)$, удовлетворяющая условию $\langle G, \overline{\psi}\rangle = 0$ для всех $\psi \in V_2$, имеет вид $G = \nabla_x \Phi(x)$, где $\Phi \in L_2(\Omega)$.

Указание. Докажите сначала, что G не зависит от ξ (как обобщенная функция), а затем воспользуйтесь теоремой де Рама для области Ω.

Задача 14.12. Пусть $W^\perp$ — множество линейных непрерывных функционалов из $L_2(\Omega, H^{-1}(\Xi))$ таких, что для $F \in W^\perp$ выполнено равенство $\langle F, \psi\rangle = 0$ для всех $\psi \in W$, где W — некоторое подпространство пространства $L_2(\Omega, H^1_{\rm per}(\Xi))$. Докажите формулу $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$.

Указание. Утверждение задачи 14.12 не связано с конкретным видом функциональных пространств в условии задачи, а является общим утверждением из линейной алгебры.

Нетрудно видеть, что утверждение леммы 14.3 является непосредственным следствием результатов задач 14.10–14.12.

Теорема 14.4. *Двухмасштабный предел* $(\overline{u}_0(x,\xi), p(x))$ *последовательности* $(\overline{u}_\varepsilon(x), P_\varepsilon(x))$ *принадлежит пространству* $L_2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(\square)) \oplus L_2(\Omega)$ *и является решением задачи*

$$\begin{gathered}
\nabla_\xi p_1(x,\xi) + \nabla_x p(x) - \Delta_\xi \overline{u}_0(x,\xi) = \overline{f}(x) \quad в \quad \Omega\times\Xi,\\
\operatorname{div}_\xi \overline{u}_0(x,\xi) = 0 \quad в \quad \Omega\times\Xi, \quad \operatorname{div}_x \int\limits_\Xi \overline{u}_0(x,\xi)\,d\xi = 0,\\
\overline{u}_0(x,\xi) = 0 \quad в \quad \Omega\times\Xi_0, \quad \left(\int\limits_\Xi \overline{u}_0(x,\xi)\,d\xi, \overline{n}\right) = 0 \quad на \quad \partial\Omega,
\end{gathered} \tag{14.19}$$

где $p_1(x,\xi)$ *— некоторая функция из пространства* $L_2(\Omega, L_{2,\mathrm{per}}(\Xi))$.

Замечание 14.1. В действительности решением системы (14.19) является тройка функций $(\overline{u}_0(x,\xi), p(x), p_1(x,\xi))$: именно в такой постановке задача корректна. Однако функция $p_1(x,\xi)$ играет вспомогательную роль и вклада в двухмасштабный предел не дает.

Замечание 14.2. Теорема 14.4 устанавливает, что предельная в смысле двухмасштабной сходимости пара функций $(\overline{u}_0(x,\xi), p(x))$ удовлетворяет как вектор-функция от переменных x и ξ некоторой "единой" краевой задаче по переменным x и ξ. Важно зафиксировать эту "двухмасштабную" предельную задачу. Далее из нее нетрудно вывести представления функций от x и ξ в виде линейных комбинаций функций только от x и только от ξ, т.е. осуществить асимптотическую декомпозицию.

Доказательство теоремы 14.4. Поскольку $\varepsilon\nabla u_\varepsilon$ равномерно ограничены в $L_2(\Omega^\varepsilon)$, применяя теорему 9.3 для предельного перехода в равенстве

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \operatorname{div} \overline{u}_\varepsilon(x)\Phi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx = 0$$

при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\int\limits_{\Omega\times\Xi} \operatorname{div}_\xi \overline{u}_0(x,\xi)\Phi(x,\xi)\,dx\,d\xi = 0,$$

где $\Phi(x,\xi)$ — произвольная тестовая функция. Так как $\Phi(x,\xi)$ произвольна,

$$\operatorname{div}_\xi \overline{u}_0(x,\xi) = 0, \tag{14.20}$$

и тем самым второе равенство в (14.19) проверено.

Равенство $\left(\int\limits_\Xi \overline{u}_0(x,\xi)\,d\xi, \overline{n}\right) = 0$ является следствием сходимости

$$\overline{u}_\varepsilon(x) \rightharpoonup \int\limits_\Xi \overline{u}_0(x,\xi)\,d\xi \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0 \quad \text{слабо в} \quad L_2(\Omega)$$

и условия $(\overline{u}_\varepsilon(x), \overline{n}) = 0$, которое согласно задаче 14.2 сохраняется и для слабого предела, так как $\overline{u}_\varepsilon(x) \in [H(\mathrm{div}, \Omega)]^d$. Аналогично проверяется второе равенство в (14.19). Далее, согласно лемме 14.3 имеем $\nabla_\xi p_1(x,\xi) + \nabla_x \Phi(x) - \Delta_\xi \overline{u}_0(x,\xi) = \overline{f}(x)$ в $\Omega \times \Xi$ с некоторыми $p_1(x,\xi) \in L_2(\Omega, L_{2,\mathrm{per}}(\Xi))$ и $\Phi(x) \in L_2(\Omega)$. Используя тестовую функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ в исходном уравнении (14.11) и переходя к двухмасштабному пределу, убеждаемся (убедитесь!), что $\nabla\Phi(x) = \nabla p(x)$, т.е. $p(x) = \Phi(x) + \mathrm{const}$, что завершает доказательство теоремы. □

Задача 14.13. Единственно ли решение задачи (14.19)?

Введем теперь вектор-функции $\overline{v}_i(\xi)$ и функции $q_i(\xi)$ как периодические решения задач

$$\nabla_\xi q_i(\xi) - \Delta_\xi \overline{v}_i(\xi) = \overline{e}_i \text{ в } \Xi, \quad \mathrm{div}_\xi \overline{v}_i(\xi) = 0 \text{ в } \Xi, \quad \overline{v}_i(\xi) = 0 \text{ на } \partial\Xi_0, \tag{14.21}$$

где $\overline{e}_i$ — единичные орты в направлениях $0\xi_i$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что вектор-функция

$$\overline{u}_0(x,\xi) = \sum_{i=1}^{d} \left(f_i(x) - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \overline{v}_i(\xi) \tag{14.22}$$

удовлетворяет первому уравнению системы (14.19). Соотношение (14.22) — это так называемый *закон Дарси*, связывающий внешние силы, действующие на жидкость, и градиент давления со скоростью фильтрации жидкости. Подставляя это выражение в равенства

$$\mathrm{div}_x \left[\int\limits_\Xi \overline{u}_0(x,\xi)\, d\xi \right] = 0, \quad \left(\int\limits_\Xi \overline{u}_0(x,\xi)\, d\xi, \overline{n} \right) = 0,$$

получаем

$$\begin{gathered} \mathrm{div}_x \left[\sum_{i=1}^{d} \left(f_i(x) - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \int\limits_\Xi \overline{v}_i(\xi)\, d\xi \right] = 0, \\ \left(\sum_{i=1}^{d} \left(f_i(x) - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \int\limits_\Xi \overline{v}_i(\xi)\, d\xi, \overline{n} \right) = 0. \end{gathered} \tag{14.23}$$

Первое соотношение в (14.23) — условие несжимаемости, второе – условие непротекания через границу $\partial\Omega$.

Таким образом, мы вывели закон Дарси из системы уравнений Стокса с использованием метода двухмасштабной сходимости.

Замечание 14.3. Мы получили некоторую дополнительную информацию о предельном поведении скоростей $\overline{u}_\varepsilon$ по сравнению с теоремой 14.1, а именно, мы нашли не только слабый предел скоростей, как в утверждении теоремы 14.1, но и их двухмасштабный предел.

В завершение этого параграфа докажем, что этот двухмасштабный предел является также сильным двухмасштабным пределом (см. замечание 9.2). Кроме того, покажем, что последовательность давлений $p_\varepsilon(x)$ сходится к $p(x)$ сильно: $\|p_\varepsilon(x) - p(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. При доказательстве мы будем использовать дополнительные предположения: функция $f(x)$ и граница области Ω считаются гладкими. Условия на границу препятствий $\partial\Xi_0$ остаются без изменений.

Задача 14.14. Пусть $u_\varepsilon \xrightarrow{2} u$ сильно, где функция $u = u(x)$ зависит только от $x \in \Omega$. Верно ли, что $u_\varepsilon(x)$ сходится к $u(x)$ сильно?

Продолжив функцию $\overline{u}_\varepsilon$ нулем в $\Omega \setminus \Omega^\varepsilon$ и сохранив за ней прежнее обозначение, преобразуем тождество (14.12) к виду

$$\int\limits_\Omega (\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon, \varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon)\,dx = \int\limits_\Omega (\overline{f}, \overline{u}_\varepsilon)\,dx.$$

Поскольку f — гладкая функция, в правой части этого равенства можно перейти к двухмасштабному пределу, что дает

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega (\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon, \varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon)\,dx = \int\limits_{\Omega\times\Xi} (\overline{f}(x), \overline{u}_0(x,\xi))\,dx\,d\xi.$$

С другой стороны, функция $\overline{u}_0$ лежит в пространстве V и может быть использована в интегральном тождестве (14.18) в качестве пробной функции:

$$\int\limits_{\Omega\times\Xi} (\nabla_\xi\overline{u}_0(x,\xi), \nabla_\xi\overline{u}_0(x,\xi))\;dx\,d\xi = \int\limits_{\Omega\times\Xi} \big(\overline{f}(x), \overline{u}_0(x,\xi)\big)\;dx\,d\xi.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega\times\Xi} (\nabla_\xi\overline{u}_0(x,\xi), \nabla_\xi\overline{u}_0(x,\xi))\,dx\,d\xi = \int\limits_{\Omega\times\Xi} (\overline{f}(x), \overline{u}_0(x,\xi))\,dx\,d\xi$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega (\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon, \varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon)\,dx.$$

Таким образом, сходимость $\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_\xi\overline{u}_0(x,\xi)$ сильная.

Задача 14.15. Пусть последовательность функций $v_\varepsilon(x) \in L_2(\Omega)$ сходится сильно двухмасштабно к функции $v(x,\xi) \in L_2(\Omega\times\square)$ и функция $v(x,\xi)$ имеет вид $v(x,\xi) = \sum\limits_{i=1}^k \varphi_i(x)\Phi_i(\xi)$, где $\varphi_i(x)$ — гладкие в Ω функции, $\Phi_i(\xi) \in H^1_{\mathrm{per}}(\square)$. Тогда $\|v_\varepsilon(x) - v(x, x/\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

На основании результата задачи 14.15 имеем

$$\Big\|\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon - \nabla_\xi\overline{u}_0\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\|_{L_2(\Omega)} \to 0,$$

поэтому $\varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon = \nabla_\xi\overline{u}_0(x, x/\varepsilon) + \delta^\varepsilon(x)$, $\|\delta^\varepsilon(x)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Но тогда первое уравнение в системе Стокса можно записать в виде

$$\nabla p_\varepsilon(x) - \varepsilon\,\mathrm{div}\,\Big(\varepsilon\nabla\overline{u}_0\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) + \delta_1^\varepsilon(x)\Big) = \overline{f}(x) \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \tag{14.24}$$

где "невязка" δ_1^ε также удовлетворяет условию $\|\delta_1^\varepsilon(x)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

С другой стороны, можно непосредственно проверить, что пара $(p(x), \overline{u}_0(x, x/\varepsilon))$ удовлетворяет равенству

$$\nabla p(x) - \varepsilon\,\mathrm{div}\,\Big(\varepsilon\nabla\overline{u}_0\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) = \overline{f}(x) + \varepsilon\delta_2^\varepsilon(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{14.25}$$

где "невязка" δ_2^ε удовлетворяет условию $\|\delta_2^\varepsilon(x)\|_{H^{-1}(\Omega^\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Задача 14.16. Докажите последнее утверждение.

Указание. Определим функции

$$\overline{u}_0^\varepsilon(x) = \Big(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i}p(x)\Big)\overline{v}_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$
$$p_1^\varepsilon(x) = p(x) + \varepsilon\Big(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i}p(x)\Big)q_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

где $(q_i(\xi), \overline{v}_i(\xi))$ — периодическое решение задачи (14.21) на ячейке Ξ, причем $\langle q_i(\cdot)\rangle_\Xi = 0$. Прямое вычисление показывает,что

$$\begin{aligned}\nabla p_1^\varepsilon(x) - \varepsilon^2\Delta\overline{u}_0^\varepsilon(x) = {}& \varepsilon\Big[\nabla\Big(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i}p(x)\Big)\Big]q_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\\ & - \varepsilon^2\Big[\Delta\Big(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i}p(x)\Big)\Big]\overline{v}_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\\ & - 2\varepsilon\Big(\nabla\Big(f_i(x) - \frac{\partial}{\partial x_i}p(x)\Big), \nabla_\xi\overline{v}_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) + f(x).\end{aligned}$$

Покажите, что норма в пространстве $H^{-1}(\Omega^\varepsilon)$ первых трех слагаемых в правой части последнего равенства есть величина порядка ε^2.

Вычитая из (14.24) равенство (14.25), получаем

$$\nabla(p_\varepsilon - p) = \varepsilon\operatorname{div}\delta_1^\varepsilon(x) - \varepsilon\delta_2^\varepsilon(x) \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon. \tag{14.26}$$

Обозначим правую часть (14.26) через $w_\varepsilon(x)$ (это элемент $H^{-1}(\Omega^\varepsilon)$). Тогда

$$\nabla(p_\varepsilon - p) = w_\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \quad \frac{\|w_\varepsilon(x)\|_{H^{-1}(\Omega^\varepsilon)}}{\varepsilon} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{14.27}$$

Для оценки $(p_\varepsilon - p)$ воспользуемся неравенством

$$\|q(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\|\nabla q(x)\|_{H^{-1}(\Omega^\varepsilon)}, \quad \int\limits_{\Omega^\varepsilon} q(x)\,dx = 0, \tag{14.28}$$

которое справедливо с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от $\varepsilon > 0$, и является непосредственным следствием уже использованного ранее утверждения о разрешимости задачи

$$\operatorname{div} Q(x) = q(x) \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon, \quad \int\limits_{\Omega^\varepsilon} q(x)\,dx = 0, \quad Q(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon),$$

с оценками

$$\|Q(x)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\|q(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \quad \|Q(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\|q(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$.

Задача 14.17. Получите неравенство (14.28) из утверждения о разрешимости приведенной выше краевой задачи.

Применяя (14.28) к равенству (14.27), получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует постоянная k_ε такая, что $\|p - p_\varepsilon - k_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Мы доказали, что

$$\|p_\varepsilon(x) - p(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \to 0 \tag{14.29}$$

при должном выборе аддитивной постоянной в давлении p_ε.

Докажем теперь, что

$$\|P_\varepsilon(x) - p(x)\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \tag{14.30}$$

где $P_\varepsilon(x)$ — ранее определенное продолжение функций $p_\varepsilon(x)$ в область Ω. Определим функцию $p^0_\varepsilon(x)$ следующим образом:

$$p^0_\varepsilon(x) = \begin{cases} p(x), & x \in Y^\varepsilon_{s,i}, i = 1, \dots, N(\varepsilon), \\ \dfrac{1}{|Y^\varepsilon_{s,i}|} \displaystyle\int\limits_{Y^\varepsilon_{s,i}} p(x)\,dx, & x \in Y^\varepsilon_{h,i}, i = 1, \dots, N(\varepsilon). \end{cases}$$

Задача 14.18. Докажите, что $\|p^0_\varepsilon(x) - p(x)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Указание. Примените неравенство Пуанкаре для каждой ячейки $Y^\varepsilon_{h,i}$ и обратите внимание на величину постоянной в неравенстве Пуанкаре.

Имеем

$$\|P_\varepsilon(x) - p(x)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|P_\varepsilon(x) - p^0_\varepsilon(x) + p^0_\varepsilon(x) - p(x)\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant \|p_\varepsilon(x) - p(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \|P_\varepsilon(x) - p^0_\varepsilon(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon_h)} + \|p^0_\varepsilon(x) - p(x)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Первое и третье слагаемое стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу (14.29) и задачи 14.18. Осталось доказать, что второе слагаемое стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Это можно сделать, используя неравенство

$$[\langle f\rangle_G - \langle g\rangle_G]^2 \leqslant \frac{1}{|G|}\int\limits_G (f-g)^2\,dx, \tag{14.31}$$

справедливое для любых $f, g \in L_2(G)$, где G — произвольная область и $\langle f\rangle_G \equiv \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\int\limits_G f(\xi)d\xi$..

Задача 14.19. Докажите неравенство (14.31).

В силу неравенства (14.31) получаем оценку

$$\|P_\varepsilon(x) - p^0_\varepsilon(x)\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon_h)} \leqslant \frac{|\Omega^\varepsilon_h|}{|\Omega^\varepsilon|}\|p_\varepsilon(x) - p(x)\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

и (14.30) доказано.

В итоге, теорема 14.1 доказана в полном объеме: мы установили сильную сходимость в $L_2(\Omega)$ продолжений давления $P_\varepsilon(x)$ к предельному давлению $p(x)$; кроме того, мы уточнили утверждение теоремы 14.1 о сходимости скоростей, а именно, доказали, что имеет место не только слабая сходимость, но также и сходимость $\|\nabla_\xi \overline{u}_0(x, x/\varepsilon) - \varepsilon\nabla\overline{u}_\varepsilon(x)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, говорящая о "сближении" осциллирующей функции, явно задаваемой формулой (14.22), и решения $\overline{u}_\varepsilon$ в пространстве $L_2(\Omega)$.

Задача 14.20. Докажите, что $\|\overline{u}_0(x, x/\varepsilon) - \overline{u}_\varepsilon(x)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Сформулируем доказанное утверждение о сходимости последовательностей скоростей и давлений.

Теорема 14.5. *Предположим, что функция $f(x)$ и граница области Ω гладкие, а область Ξ удовлетворяет условию обобщенной липшицевости, т.е. может быть представлена в виде объединения конечного числа липшицевых областей. Тогда для продолжений давления P_ε (заданных формулой* (14.16)) *и последовательности скоростей $\overline{u}_\varepsilon$ (продолженных нулем в $\Omega \setminus \Omega^\varepsilon$) справедливы равенства*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|P_\varepsilon(x)-p(x)\|_{L_2(\Omega)}=0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\overline{u}_\varepsilon(x)-\overline{u}_0(x,x/\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)}=0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\|\nabla\overline{u}_\varepsilon(x)-\nabla\overline{u}_0(x,x/\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)}=0,$$

где $\overline{u}_0(x,\xi)$ *определена в* (14.22), *а* $p(x)$ *— решение задачи Неймана*

$$\sum_{i,j=1}^d K_{ij}\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{i,j=1}^d K_{ij}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\quad \text{в}\ \ \Omega,$$
$$\sum_{i,j=1}^d K_{ij}\frac{\partial p(x)}{\partial x_i}n_j=\sum_{i,j=1}^d K_{ij}f_i(x)n_j\quad \text{на}\ \ \partial\Omega;$$

здесь $K_{ij}=\int\limits_\Xi (\overline{v}_i)_j\,d\xi$ *и* $\overline{v}_i(\xi)$ *— решения задач Стокса в области* Ξ

$$\nabla_\xi q_i(\xi)-\Delta_\xi\overline{v}_i(\xi)=\overline{e}_i\ \text{в}\ \Xi,\quad \operatorname{div}\overline{v}_i=0,\quad \overline{v}_i\in H^1_{\mathrm{per}}(\Xi),\quad \overline{v}_i(\xi)=0\ \text{на}\ \partial\Xi_0.$$

§ 15. Краевые задачи с быстро меняющимся типом граничных условий

15.1. Теорема усреднения.

15.1.1. *Основные обозначения и постановка задачи.* Многие работы, посвященные исследованию задач с быстро меняющимся типом граничных условий, датируются серединой 80-х [**44, 126, 77**]. Полный анализ задачи с периодическим чередованием типов граничных условий дан в [**127**]. Непериодический случай (в том числе и случайный) исследовался в [**99, 15, 51**].

В этом параграфе мы приводим пример асимптотического анализа задачи с быстрым чередованием типа граничных условий, следуя, в основном, работе [**126**].

Рассматривается мембрана с частично закрепленной границей. Пусть участки закрепления границы имеют длину порядка ε_1 и чередуются со свободными участками длины порядка ε_2. Возникает вопрос: При каком соотношении между параметрами ε_1 и ε_2 положение равновесия такой мембраны при малых ε_1 и ε_2 близко к положению равновесия закрепленной мембраны?

Мы покажем, что мембрана асимптотически ведет себя как закрепленная, если ε_1 и ε_2 имеют один и тот же порядок. Однако, когда ε_2 имеет порядок $|\ln\varepsilon_1|^{\delta-1}$, где $\delta\in(0,1)$, положение равновесия мембраны при малых ε_1 близко к положению равновесия свободной мембраны.

Рассмотрим краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} &L[u_\varepsilon]\equiv\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\Big)=f(x)\ \ \text{в}\ \ \Omega\subset\mathbb{R}^2,\\ &u_\varepsilon=0\ \ \text{на}\ \ \Gamma_D^\varepsilon,\quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\gamma}\equiv a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\nu_j=0\ \ \text{на}\ \ \Gamma_N^\varepsilon. \end{aligned}\tag{15.1}$$

Как обычно, предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Предположим, что $\lambda_1|\xi|^2 \geqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda_2|\xi|^2$, где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ имеет гладкую границу $\partial\Omega$, коэффициенты $a^{ij}(x)$ суть ограниченные измеримые функции в Ω. Пусть $\Gamma_D^\varepsilon = \bigcup \Gamma_D^i$, $\Gamma_N^\varepsilon = \bigcup \Gamma_N^j$, $\Gamma_D^\varepsilon \cup \Gamma_N^\varepsilon = \partial\Omega$, $|\Gamma_D^i| = \varepsilon_1$, $|\Gamma_N^j| = \varepsilon_2$ для всех i, j; здесь через $|l|$ обозначена длина кривой l (см. рис. 15.1).

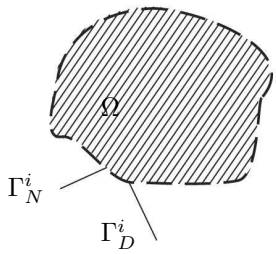

Рис. 15.1

Выделим два случая.

(a). $\varepsilon_1 = O(\varepsilon)$, $\varepsilon_2 = O(\varepsilon)$.

(b). $\varepsilon_1 = O(\varepsilon)$, $\varepsilon_2 = O(|\ln\varepsilon|^{\delta-1})$, где $\delta \in (0,1)$.

Решение задачи (15.1) ищем в пространстве $H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon) = \{v(x) | v(x) \in H^1(\Omega), v(x)\big|_{\Gamma_D^\varepsilon} = 0\}$ с нормой

$$\|v\|_{H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)} = \left(\int\limits_\Omega (v^2 + |\nabla v|^2)\,dx\right)^{1/2}.$$

Определение 15.1. Функция $u_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$ называется *обобщенным решением* задачи (15.1), если для любого $\varphi \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$

$$\int\limits_\Omega a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx = -\int\limits_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{15.2}$$

Исследуем предельное поведение решений u_ε при $\varepsilon \to 0$.

15.1.2. *Предельная задача Дирихле.* Здесь мы изучим случай (a), полагая для определенности $\varepsilon_1 = k_1\varepsilon$, $\varepsilon_2 = k_2\varepsilon$, где $k_1, k_2 > 0$. Для этого нам потребуется неравенство, аналогичное классическому неравенству Фридрихса, доказательство которого можно найти в [**79**] (здесь оно формулируется в виде задачи).

Задача 15.1. Пусть Ω — ограниченная область с липшицевой границей и пусть $u \in H^1(\Omega)$ обращается в нуль на $\Gamma \subset \partial\Omega$, причем $|\Gamma| > 0$, где $|\Gamma|$ — поверхностная мера Лебега множества Γ. Докажите, что

$$\int\limits_\Omega u^2(x)\,dx \leqslant C\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx, \tag{15.3}$$

где постоянная C зависит только от Ω и $|\Gamma|$ и не зависит от функции u:

$$C \leqslant C_1(\Omega) + \frac{C_2(\Omega)}{|\Gamma|}.$$

В силу неравенства (15.3) в пространстве $H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$[u, \varphi] = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla\varphi)\,dx,$$

которому соответствует норма $\|u\| = [u,u]^{1/2}$.

Теорема 15.1. *Обобщенное решение u_ε задачи* (15.1) *существует и единственно.*

Существование и единственность обобщенного решения задачи (15.1) доказываются стандартным путем на основе леммы Лакса — Мильграма (см., например, **[64, 84]**).

Получим теперь равномерные по ε оценки решения u_ε. Для решения u_ε задачи (15.1) в случае (а) неравенство (15.3) выполнено равномерно по ε, так как $|\Gamma_D^\varepsilon| \geqslant \text{const}\,|\partial\Omega|$, где const не зависит от ε.

Используя неравенство Коши — Буняковского, неравенство (15.3) и условие эллиптичности оператора L, получим

$$\lambda_2 \int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx \leqslant \left|\int\limits_\Omega a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,dx\right| = \left|\int\limits_\Omega f(x)\,u_\varepsilon(x)\,dx\right|$$
$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega u_\varepsilon^2(x)\,dx\right)^{1/2} \leqslant M\left(\int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

где $M = C\left(\int\limits_\Omega f^2(x)\,dx\right)^{1/2}$. Таким образом,

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx \leqslant M_1,$$

где M_1 не зависит от ε.

По теореме Реллиха можно выбрать подпоследовательность $\{\varepsilon^k\}$, стремящуюся к нулю, такую, что

(i) $u_\varepsilon \to U \in H^1(\Omega)$ при $\varepsilon^k \to 0$ в норме $L_2(\Omega)$,

(ii) $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup \dfrac{\partial U}{\partial x_j}$ при $\varepsilon^k \to 0$ слабо в $L_2(\Omega)$, $j = 1, 2$.

Поэтому, переходя к пределу в интегральном тождестве (15.2) при $\varepsilon^k \to 0$, получим

$$\int\limits_\Omega a^{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx = -\int\limits_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Покажем, что функция U обращается в нуль на $\partial\Omega$. Сделаем локальное преобразование координат $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ в окрестности точки p_i, являющейся правым концом куска Γ_D^i, такое, что граница $\partial\Omega$ в этой окрестности перейдет в прямую $y_2 = 0$, а точка p_i — в начало координат. Рассмотрим полосу шириной ω в окрестности точки p_i (см. рис. 15.2).

Положим

$$\gamma_1 = \{(y_1, y_2) \,:\, y_2 = \omega,\ -k_1\varepsilon < y_1 < 0\},$$
$$\gamma_2 = \{(y_1, y_2) : y_2 = \omega,\ 0 < y_1 < k_2\varepsilon\},$$
$$Q_1 = \{(y_1, y_2) : 0 < y_2 < \omega,\ -k_1\varepsilon < y_1 < 0\},$$
$$Q_2 = \left\{(y_1, y_2) : 0 < y_2 < \omega,\ -k_1\varepsilon + \frac{k_1}{\omega}y_2 < y_1 < \frac{k_1}{\omega}y_2\right\},$$

где k_1, k_2 — не зависящие от ε постоянные, определенные в начале этого раздела. Достаточно рассмотреть случай, когда $|\gamma_1| = |\gamma_2|$. Другие случаи исследуются аналогично, и мы оставляем их читателю.

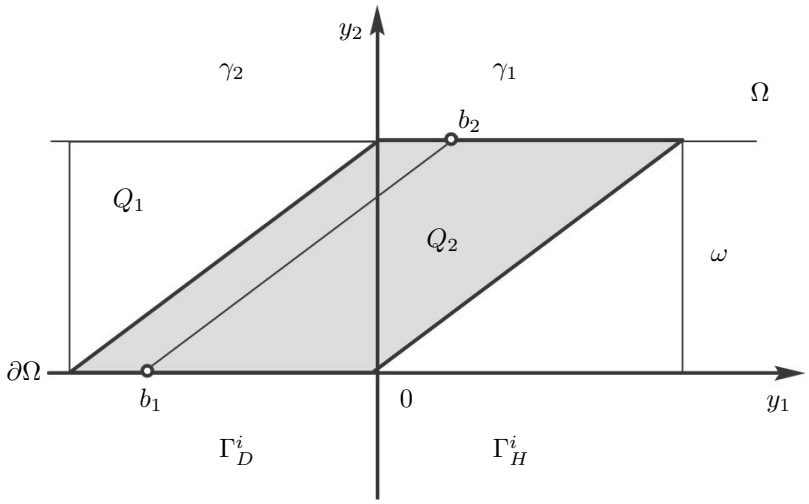

Рис. 15.2

Далее предполагаем, что функция u_ε принадлежит $C^1(\overline{\Omega})$ и интегралы от производных $u_\varepsilon(x)$ по одномерным кривым можно понимать в классическом смысле. Однако нужная нам оценка (15.5) остается верной также для $u_\varepsilon(x) \in H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon^D)$, что легко следует из плотности $C^1(\overline{\Omega})$ функций, обращающихся в нуль на Γ_ε^D, в пространстве $H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon^D)$.

Задача 15.2. Как дополнить рассуждения, чтобы получить (15.5) для $u_\varepsilon(x) \in H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon^D)$?

Имеем

$$u_\varepsilon(y_1, \omega) = \int\limits_0^\omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_2}\, dy_2,$$

если $y_1 \in \gamma_1$. Поэтому

$$u_\varepsilon^2(y_1, \omega) \leqslant \omega \int\limits_0^\omega \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_2}\Big)^2 dy_2, \tag{15.4}$$

Интегрируя неравенство (15.4) по γ_1 и используя формулу Коши — Буняковского, получим

$$\int\limits_{\gamma_1} u_\varepsilon^2(y_1, \omega)\, dy_1 \leqslant \omega \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_0^\omega \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_2}\Big)^2 dy_2\, dy_1 \leqslant \omega \int\limits_{Q_1} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dy_1\, dy_2.$$

Оценим $u_\varepsilon(y_1, \omega)$, где $y_1 \in \gamma_2$. Имеем

$$u_\varepsilon(y_1, \omega) = \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial l}\, dl,$$

где b_1 и b_2 — точки, лежащие соответственно на Γ_D^i и γ_2 и принадлежащие прямой l, параллельной стороне параллелограмма Q_2, вершинами которого

являются концы отрезков Γ_D^i и γ_2. Поэтому

$$u_\varepsilon^2(y_1,\omega) \leqslant \sqrt{\omega^2+\varepsilon^2 k_1^2}\int\limits_{b_1}^{b_2}\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial l}\Big)^2$$

Интегрируя это неравенство по γ_2, получим

$$\int\limits_{\gamma_2} u_\varepsilon^2(y_1,\omega)\,dy_1 \leqslant \sqrt{\omega^2+\varepsilon^2 k_1^2}\int\limits_{\gamma_2}\int\limits_{b_1}^{b_2}\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial l}\Big)^2 dl\,dy_1$$
$$= \frac{\omega^2+\varepsilon^2 k_1^2}{\omega}\int\limits_{Q_2}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial l}\right)^2 dy_1\,dy_2 \leqslant \frac{\omega^2+\varepsilon^2 k_1^2}{\omega}\int\limits_{Q_2}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dy_1\,dy_2.$$

Сделав обратное преобразование координат $(y_1,y_2)\to(x_1,x_2)$ и просуммировав по всем окрестностям, образующим покрытие $\partial\Omega$, находим

$$\int\limits_{\widetilde\gamma} u_\varepsilon^2(x)\,ds \leqslant C_4\frac{\omega^2+\varepsilon^2 k_1^2}{\omega}\int\limits_{Q}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx \leqslant C_4 M_1\frac{\omega^2+\varepsilon^2 k_1^2}{\omega}, \tag{15.5}$$

где $\widetilde\gamma$ — кривая, все точки которой отстоят от $\partial\Omega$ на расстоянии порядка ω, а Q — слой между $\widetilde\gamma$ и $\partial\Omega$; постоянные C_4 и M_1 не зависят от ε.

Учитывая непрерывность оператора следа $H^1(\Omega)$ в $L_2(\widetilde\gamma)$ (см. [**115, 116**]), перейдем к пределу в неравенстве (15.5) при $\varepsilon^k\to 0$:

$$\int\limits_{\widetilde\gamma} U^2\,ds \leqslant \omega M_1 C_4. \tag{15.6}$$

Поскольку ω — произвольно малое положительное число и $U\in H^1(\Omega)$, из (15.6) следует $U=0$ на $\partial\Omega$. Здесь мы использовали утверждение о непрерывности следа функции из $H^1(\Omega)$ при стремлении последовательности поверхностей, на которых рассматривается след, к некоторой предельной поверхности (как точно сформулировать и доказать это?).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 15.2. *В случае* (a) *последовательность решений u_ε задачи* (15.1) *сходится при $\varepsilon\to 0$ в норме пространства $L_2(\Omega)$ и слабо в $H^1(\Omega)$ к решению задачи Дирихле*

$$L[U]=f(x)\ \text{в}\ \Omega,\quad U=0\ \text{на}\ \partial\Omega. \tag{15.7}$$

Выше это утверждение доказано для последовательности $\{\varepsilon^k\}$. Сходимость $\{u_\varepsilon\}$ при $\varepsilon\to 0$ следует из единственности решения задачи (15.7).

15.1.3. *Предельная задача Неймана.* Оценим решение u_ε задачи (15.1) в случае (b). Предположим, что

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = 0. \tag{15.8}$$

Отметим, что это равенство является условием согласования в задаче Неймана с однородным краевым условием. Можно показать, что при нарушении этого равенства $L^2(\Omega)$-норма решения u_ε неограниченно возрастает

(взрывается) при $\varepsilon \to 0$. Обозначим

$$\langle u_\varepsilon \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\, dx.$$

Полагая $\varphi = u_\varepsilon$ в (15.2), получаем

$$\begin{aligned}
\lambda_2 \int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx &\leqslant \left| \int\limits_\Omega a^{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\, dx \right| = \left| \int\limits_\Omega f(x) u_\varepsilon(x)\, dx \right| \\
&= \left| \int\limits_\Omega f(x) u_\varepsilon(x) dx - \int\limits_\Omega f(x) \langle u_\varepsilon \rangle dx \right| = \left| \int\limits_\Omega f(x)(u_\varepsilon(x) - \langle u_\varepsilon \rangle) dx \right| \\
&\leqslant \left(\int\limits_\Omega f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega (u_\varepsilon(x) - \langle u_\varepsilon \rangle)^2\, dx \right)^{1/2} \\
&\leqslant K \left(\int\limits_\Omega f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leqslant \frac{K}{\lambda_2} \int\limits_\Omega f^2\, dx, \tag{15.9}$$

где K не зависит от ε.

Рассмотрим последовательность $(u_\varepsilon(x) - \langle u_\varepsilon \rangle)$. Из (15.9) и неравенства Пуанкаре следует оценка $\|u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon \rangle\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_0$, где C_0 не зависит от ε. Поэтому по теореме Реллиха существует функция $U \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon \rangle$ сходится к U в норме $L_2(\Omega)$ и слабо в $H^1(\Omega)$ по подпоследовательности $\varepsilon^k \to 0$. По построению $\langle U \rangle = 0$. Покажем, что U — обобщенное решение задачи

$$L[U] = f(x) \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} \equiv a^{ij}(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \nu_j = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{15.10}$$

т.е. U удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega a^{ij}(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in H^1(\Omega).$$

Пусть точка p_i — середина кривой Γ_D^i. Сделаем локальную замену координат $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ в окрестности кривой Γ_D^i такую, что в окрестности точки p_i граница $\partial\Omega$ переходит в прямую $y_2 = 0$, а точка p_i — в начало координат (см. рис. 15.3).

Не ограничивая общности, можно считать, что длина образа участка Γ_D^i равна ε.

Введем полярные координаты (ρ, θ), где $\rho = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$. Пусть $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ такая, что $\psi(s) = 0$ при $|s| \leqslant 1$, $\psi(s) = 1$ при $|s| > 2$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. Обозначим $\psi_\varepsilon^i = \psi\Big(\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln \rho}\Big)$. Пусть $\zeta = \varphi\psi_\varepsilon$, где φ — любая функция из $H^1(\Omega)$, а $\psi_\varepsilon = \prod\limits_i \psi_\varepsilon^i$. Заметим, что функция $\psi_\varepsilon^i(\rho)$ становится равной единице при

$\rho \geqslant \sqrt{\varepsilon}$ (см. рис. 15.3) в силу ее определения. Отметим также, что в координатах (y_1, y_2) функции ψ_ε^i не зависят от i, однако при возврате в исходные координаты (x_1, x_2) зависимость от i становится нетривиальной.

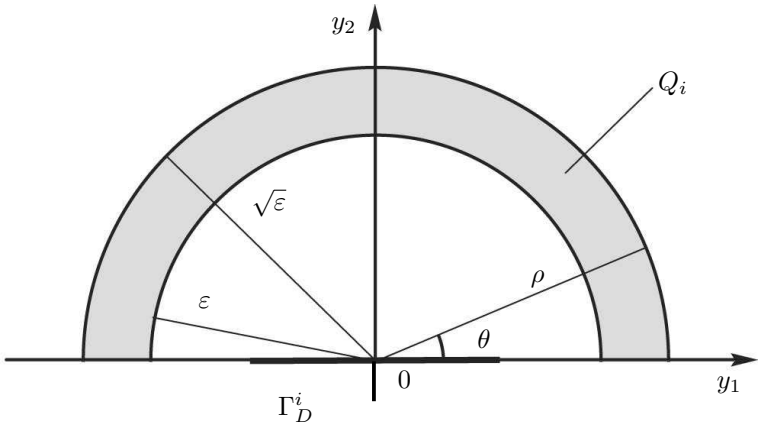

Рис. 15.3

Используя ζ в качестве тестовой функции, имеем

$$\int\limits_\Omega a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \zeta}{\partial x_j}\,dx = -\int\limits_\Omega f(x)\zeta(x)\,dx.$$

Учитывая, что $\zeta = \varphi\psi_\varepsilon$, получим

$$\int\limits_\Omega [a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_j}\varphi + a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\psi_\varepsilon]\,dx = -\int\limits_\Omega f(x)\zeta(x)\,dx.$$

Так как ψ_ε стремится при $\varepsilon \to 0$ в пространстве $L_2(\Omega)$ к функции, тождественно равной единице, имеем

$$\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\psi_\varepsilon(x)\,dx \to \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Поскольку $u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon\rangle$ стремится к некоторой функции $U \in H^1(\Omega)$ слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon^k \to 0$, приходим к предельному соотношению

$$\int\limits_\Omega a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\psi_\varepsilon\,dx \to \int\limits_\Omega a^{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Осталось показать, что $\int\limits_\Omega a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_j}\varphi\,dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого, используя неравенство Коши — Буняковского, находим

$$\left|\int\limits_\Omega a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_j}\varphi\,dx\right| \leqslant \left(\int\limits_\Omega \varphi^2\sum_{j=1}^{2}(a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i})^2 dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega |\nabla\psi_\varepsilon|^2\,dx\right)^{1/2}$$
$$\leqslant C_5\left(\int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega |\nabla\psi_\varepsilon|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Обозначим $Q^\varepsilon = \{(\rho,\theta) : \rho \leqslant \sqrt{\varepsilon}\}$. Легко видеть, что

$$\int\limits_\Omega |\nabla\psi_\varepsilon|^2\,dx \leqslant C_6 \sum_i \int\limits_{Q_i} \Big(\frac{\partial\psi_\varepsilon^i}{\partial\rho}\Big)^2 \rho\,d\rho\,d\theta.$$

Положим $s = (\ln\varepsilon/\ln\rho)$. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_i} \Big(\frac{\partial\psi_\varepsilon^i}{\partial\rho}\Big)^2 \rho\,d\rho\,d\theta &= \int\limits_{Q_i} \Big(\frac{\partial\psi}{\partial s}\Big)^2 \Big(\frac{\partial s}{\partial\rho}\Big)^2 \rho\,d\rho\,d\theta \\ &= \ln^2\varepsilon \int\limits_{Q_i} \Big(\frac{\partial\psi}{\partial s}\Big)^2 \Big(\frac{1}{\ln\rho}\Big)^4 \frac{1}{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta \\ &\leqslant C_7 \ln^2\varepsilon \int\limits_{Q_i} \Big(\frac{1}{\ln\rho}\Big)^4 d(\ln\rho)\,d\theta \leqslant \frac{C_8}{|\ln\varepsilon|}.\end{aligned}$$

Так как количество участков Γ_D^i есть величина порядка $|\ln\varepsilon|^{1-\delta}$, имеем

$$\Big|\int\limits_\Omega a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_j}\varphi\,dx\Big| \leqslant \frac{C_9}{|\ln\varepsilon|^{\delta/2}}.$$

Поэтому

$$\int\limits_\Omega a^{ij}(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_j}\varphi\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 15.3. *В случае* (b) *последовательность решений* $u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon\rangle$, *где* u_ε *— обобщенное решение задачи* (15.1), *а* $\langle u_\varepsilon\rangle = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int\limits_\Omega u_\varepsilon x dx$, *сходится при* $\varepsilon\to 0$ *слабо в* $H^1(\Omega)$ *и в норме* $L_2(\Omega)$ *к решению задачи Неймана* (15.10).

Выше это утверждение было доказано для последовательности ε^k. Сходимость всего семейства $\{u_\varepsilon - \langle u_\varepsilon\rangle\}$ следует из единственности решения задачи (15.10), удовлетворяющего условию $\displaystyle\int\limits_\Omega U\,dx = 0$.

15.2. Согласование асимптотических разложений. В ряде работ середины 90-х годов методы согласования асимптотических разложений применялись для исследования задач с быстрой сменой типа граничного условия (см., например, **[39]** и библиографию там). Рассмотрим одну из таких задач.

Пусть $N \gg 1$ — целое число, $\varepsilon = 2N^{-1}$, (r,θ) — полярные координаты, $\delta_\varepsilon = \{(r,\theta) : r = 1, -\varepsilon a(\varepsilon) < \theta < \varepsilon a(\varepsilon)\}$, $0 < a(\varepsilon) < \pi/2$, Γ_ε — объединение дуг, полученных из δ_ε поворотами относительно начала координат на углы, кратные $\varepsilon\pi$, Ω — единичный круг с центром в начале координат, $\gamma_\varepsilon = \partial D\backslash\overline{\Gamma}_\varepsilon$. Нашей целью является построение асимптотики при $\varepsilon\to 0$ решения краевой задачи

$$\Delta u_\varepsilon = f \text{ при } x\in\Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ при } x\in\Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} = 0 \text{ при } x\in\gamma_\varepsilon, \qquad (15.11)$$

в случае $\varepsilon \ln a(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

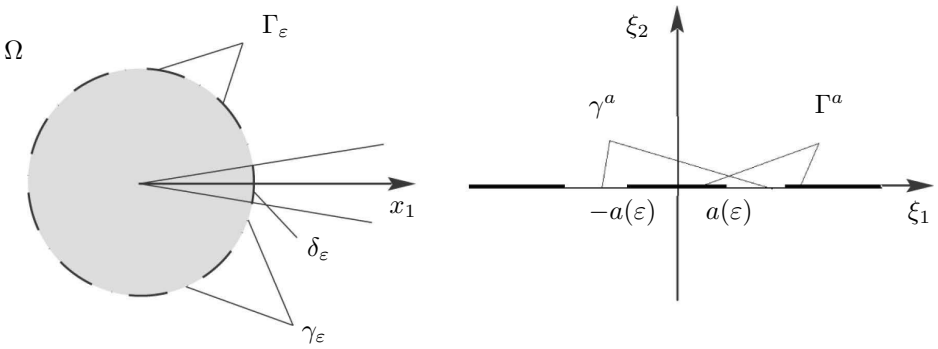

Рис. 15.4

Теми же методами, что в предыдущем разделе, можно показать (см. [**127**]), что в этом случае решение задачи (15.11) сходится сильно в $L_2(\Omega)$ и слабо в $H^1(\Omega)$ к решению u_0 задачи Дирихле в круге. Поэтому вне малой окрестности $\partial\Omega$ главный член асимптотического разложения естественно искать в виде u_0. Для простоты изложения предположим, что f зависит только от r и тождественно равна нулю в некоторой окрестности $\partial\Omega$. Тогда существует постоянная $a_1^{(0)}$ такая, что

$$u_0(x) = a_1^{(0)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}(1-r)^i \quad \text{при} \quad r \to 1. \tag{15.12}$$

Задача 15.3. Докажите, что при этих условиях функция $u_0(x)$ допускает представление (15.12) в окрестности границы единичного круга Ω.

Поскольку функция u_0 не удовлетворяет граничным условиям задачи (15.11), в окрестности $\partial\Omega$ будем искать асимптотику решения u_ε в другом виде. Учитывая, что длина ячейки периодичности имеет порядок $O(\varepsilon)$, в окрестности $\partial\Omega$ представим решение в виде ряда $v_\varepsilon(\xi_1, \xi_2)$ с коэффициентами, зависящими от "внутренних" переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1 = \varepsilon^{-1}\theta$, $\xi_2 = \varepsilon^{-1}(1-r)$. Переходя в (15.12) к переменным ξ, получаем, что при $\varepsilon^{1/2} < (1-r) < 2\varepsilon^{1/2}$ (или, что то же самое, при $\varepsilon^{-1/2} < \xi_2 < 2\varepsilon^{-1/2}$)

$$u_0(x) = a_1^{(0)} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \frac{1}{i} \xi_2^i. \tag{15.13}$$

Из требования согласования асимптотических разложений (см. пп. 11.1–11.3) получаем, что компоненты ряда

$$v_\varepsilon(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi) \tag{15.14}$$

должны удовлетворять условиям

$$v_i(\xi) \sim \frac{a_1^{(0)}}{i} \xi_2^i \quad \text{при} \quad \xi_2 \to \infty. \tag{15.15}$$

Подставляя (15.14) в (15.11), переходя к переменным ξ, выписывая отдельно формальные равенства при одинаковых степенях ε, получаем следующую последовательность краевых задач:

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^{i-1}\Big(\xi_2^{j-1}\frac{\partial}{\partial\xi_2} - (j+1)\xi_2^j\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\Big)v_{i-j} \quad \text{при} \quad \xi_2 > 0,$$
$$v_i = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \Gamma^a, \quad \frac{\partial v_i}{\partial\xi_2} = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \gamma^a, \tag{15.16}$$

где Γ^a — объединение интервалов на прямой $\xi_2 = 0$, полученных из $(-a, a)$ сдвигами, кратными π, а γ^a — дополнение $\overline{\Gamma^a}$ до оси $O\xi_1$. В силу (15.16) уравнения для первых двух членов ряда (15.14) имеют вид

$$\Delta v_1 = 0 \quad \text{при} \quad \xi_2 > 0, \tag{15.17}$$

$$\Delta v_2 = \Big(\frac{\partial}{\partial\xi_2} - 2\xi_2^j\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\Big)v_1 \quad \text{при} \quad \xi_2 > 0. \tag{15.18}$$

Введем функцию

$$Y(\xi) = \operatorname{Re}\ln(\sin z + (\sin^2 z - \sin^2 a)^{1/2}) - \ln\sin a,$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$. Можно показать, что Y π-периодическая по переменной ξ_1, удовлетворяет однородному граничному условию Неймана на γ^a, равна нулю на Γ^a и имеет асимптотику

$$Y(\xi) = \xi_2 - \ln\sin a + O(e^{-\xi_2}) \quad \text{при} \quad \xi_2 \to \infty. \tag{15.19}$$

Задача 15.4. Докажите последнее утверждение.

Таким образом, функция

$$v_1(\xi) = a_1^{(0)}Y(\xi) \tag{15.20}$$

удовлетворяет (15.15)–(15.17). Принимая во внимание, что Y гармоническая, легко проверить, что функция

$$v_2(\xi) = \frac{a_1^{(0)}}{2}\xi_2^2\frac{\partial Y(\xi)}{\partial\xi_2} + A_1^{(1)}Y(\xi) \tag{15.21}$$

удовлетворяет (15.15), (15.16), (15.18) при любой постоянной $A_1^{(1)}$ (проверьте!). Из (15.19)–(15.21) следует, что

$$\varepsilon v_1(\xi) + \varepsilon^2 v_2(\xi) = a_1^{(0)}\Big((1-r) + \frac{1}{2}(1-r)^2\Big)$$
$$+ \varepsilon(A_1^{(1)}(1-r) - a_1^{(0)}\ln\sin a) - \varepsilon^2 A_1^{(1)}\ln\sin a + O\Big((1-r)e^{-\frac{1-r}{\varepsilon}}\Big) \tag{15.22}$$

при $\varepsilon^{1/2} < (1-r) < 2\varepsilon^{1/2}$ (или, что то же самое, $\varepsilon^{-1/2} < \xi_2 < 2\varepsilon^{-1/2}$). Из (15.22) и условия согласования асимптотических разложений следует, что для членов ряда "внешнего" разложения

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots \tag{15.23}$$

должны выполняться условия

$$u_1(x) \sim -a_1^{(0)}\ln\sin a + A_1^{(1)}(1-r), \quad u_2(x) \sim A_1^{(1)} \quad \text{при} \quad r \to 1. \tag{15.24}$$

Подставляя (15.23) в (15.11), получаем уравнения для u_1 и u_2:

$$\Delta u_k = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{15.25}$$

Для согласования рядов (15.14) и (15.23) следует показать существование функций u_k, $k = 1, 2$, удовлетворяющих (15.24) и (15.25). Очевидно, что

функции $u_1(x) = -a_1^{(0)} \ln \sin a$, $u_2(x) = 0$ являются решениями (15.25) и при $A_1^{(1)} = 0$ удовлетворяют (15.24). Таким образом, построены первые члены v_1, v_2, u_0, u_1, u_2 асимптотических разложений (15.14) и (15.23). Дальнейшие построение и обоснование асимптотических разложений аналогичны построению и обоснованию из п. 11.3. В частности, нетрудно проверить, что

$$v_3(\xi) = a_1^{(0)} \Big(\frac{1}{8} \xi_2^4 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{6} \xi_2^3 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \Big) Y(\xi)$$

и, следовательно, $u_3 = 0$.

Задача 15.5. Мы здесь не формулируем, как в п. 11.2 и 11.3, строгое утверждение о близости решения $u_\varepsilon(x)$ исходной задачи и отрезка соответствующего асимптотического ряда. Сформулируйте и докажите такое утверждение по аналогии с результатами п. 11.2 и 11.3.

Замечание 15.1. В [**37**] показано, что в рассматриваемом здесь случае (когда $\varepsilon \ln a(\varepsilon) \to 0$) асимптотическое разложение решения задачи (15.11) можно построить более простым методом пограничных функций экспоненциального типа [**33**]. Но когда предельными задачами являются вторая и третья краевые задачи, т.е.

$$a(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon^2 A), \quad a(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon A), \quad A > 0,$$

соответственно (см. [**127**]), метод согласования асимптотических разложений (в комбинации с методом пограничных функций экспоненциального типа и методом двух масштабов) используется по существу [**38, 39, 22**].

§ 16. Возникновение потенциала (или "странного члена") в усредненном уравнении

16.1. Об усреднении решений задачи Дирихле в перфорированной области с малой суммарной концентрацией отверстий. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей, $G_0 = \{x : |x| < 1\}$ — единичный шар в $\mathbb{R}^3$. Положим

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^3} (\varepsilon^3 G_0 + 2\varepsilon z),$$

т.е. Ω_ε — область с шарообразными полостями радиуса ε^3, расположенными в вершинах кубической решетки с периодом 2ε.

Рассмотрим краевые задачи

$$\Delta u_\varepsilon = f(x) \ \text{ в } \ \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_\varepsilon), \tag{16.1}$$

$$(\Delta + \mu) u = f(x) \ \text{ в } \ \Omega, \qquad u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \quad \mu = -\pi/2. \tag{16.2}$$

Мы покажем, что решения u_ε и u задач (16.1) и (16.2) близки при малых ε, т.е. задача (16.2) является усредненной для (16.1). Интересный эффект, возникающий при таком усреднении, состоит в том, что усредненный оператор не меняется в своей старшей части, но приобретает дополнительный потенциал μI, где I — единичный оператор. Впервые этот эффект был установлен и детально изучен в монографии [**82**], причем методы, использованные в [**82**], позволяют рассмотреть модели с произвольным (непериодическим) расположением отверстий. Они опираются, в основном, на

метод потенциалов для решений краевых задач. В данном параграфе мы исследуем частный случай, когда отверстия расположены периодически и каждое отверстие имеет форму шара. В этом случае удается доказать теорему усреднения значительно проще, а также получить квалифицированные оценки скорости сходимости. Отметим, что в настоящее время разработаны эффективные методы исследования аналогичных задач, как с периодически, так и непериодически расположенными отверстиями, которые не опираются на технику потенциалов (см., например, [**135, 100**]).

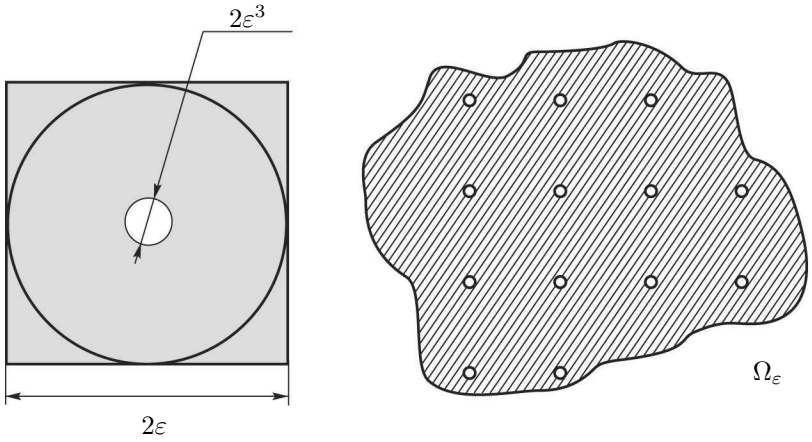

Рис. 16.1

Теорема 16.1. *Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Тогда для решений задач* (16.1) *и* (16.2) *имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - w_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = 0,$$

где $w_\varepsilon(x)$ — 2ε-периодическая функция, заданная соотношениями

$$w_\varepsilon = \begin{cases} 0, & x \in \bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}^3} (\varepsilon^3 G_0 + 2\varepsilon z), \\ 1, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}^3} \varepsilon(G_0 + 2z), \\ \dfrac{(1/r - 1/\varepsilon^3)}{(1/\varepsilon - 1/\varepsilon^3)}, & x \in \bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}^3} (\varepsilon G_0 \setminus \varepsilon^3 G_0 + 2\varepsilon z). \end{cases} \tag{16.3}$$

Если $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ для некоторого $\alpha > 0$, то справедливы оценки

$$\|u_\varepsilon - w_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}, \quad \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})},$$

где C не зависит от ε и от $f(x)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть гёльдеровы функции f. Для правых частей общего вида требуемые утверждения можно получить аппроксимацией с использованием априорных оценок. Доказательство теоремы опирается на решения следующих задач.

Задача 16.1. Докажите, что $\|w_\varepsilon - 1\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и справедлива оценка $\|w_\varepsilon - 1\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^2$, где C не зависит от ε.

Задача 16.2. Докажите, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ имеет место оценка $\|(\Delta w_\varepsilon - \mu)u\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon \|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от ε и $u(x)$.

Решения этих задач основаны на исследовании явного вида функции $w_\varepsilon(x)$ и определения нормы в пространстве $H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$.

Рассмотрим тождества

$$\begin{aligned}\Delta(u_\varepsilon - w_\varepsilon u) &= f - \Delta u w_\varepsilon - 2(\nabla u, \nabla w_\varepsilon) - u\Delta w_\varepsilon \\ &= f(1 - w_\varepsilon) - (\Delta w_\varepsilon - \mu)u + \mu(w_\varepsilon - 1)u - 2(\nabla u, \nabla w_\varepsilon).\end{aligned}$$

Правая часть последнего тождества состоит из четырех слагаемых. Если удастся оценить каждое из них в норме пространства $H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$ через величину $\varepsilon C\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$, то теорема будет доказана. Это можно легко сделать (проделайте!), пользуясь оценками задач (16.1) и (16.2), а также оценкой Шаудера $\|u\|_{C^{\alpha+2}(\overline{\Omega})} \leqslant K\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$ для решения краевой задачи (16.2) (см., например, [**40**]); здесь $\alpha > 0$, $K > 0$ — постоянные, а $K > 0$ не зависит от функции $f(x)$.

Второе неравенство вытекает из первого и определения w_ε. □

16.2. Усреднение краевой задачи в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием на границе полостей. Рассмотрим эллиптическую задачу в перфорированной области с третьим краевым условием (*условием Фурье*) на границе (поверхности) перфорации. Постановка 3-го краевого условия на границе полостей во многих случаях приводит к появлению ненулевого потенциала в усредненном уравнении.

Заметим, что $(d-1)$-мерный объем поверхности перфорации неограниченно возрастает при гомотетическом сжатии перфорированной среды, т.е. при стремлении периода к нулю. В связи с этим постановка 3-го краевого условия на границе отверстий может привести к вырождению либо неограниченному росту решений (в зависимости от знака коэффициента в условии Фурье).

Явления вырождения или неограниченного роста решений не возникает, если коэффициенты в третьем краевом условии малы по абсолютной величине (вырождаются при стремлении малого параметра к нулю) либо среднее значение коэффициентов по поверхности полостей равно нулю.

Здесь мы рассмотрим оба случая. В первом случае потенциал, возникающий в предельном операторе, зависит только от среднего значения коэффициента по поверхности отверстия, в то время как осцилляция коэффициента относительно среднего не дает вклада в предельный оператор (см. [**12, 133**]). Во втором случае (см. [**13**]) корректность соответствующей краевой задачи не вытекает из положительной определенности дифференциального оператора и требуются дополнительные условия. Согласно [**106**] корректность исходной задачи при достаточно малых значениях периода микроструктуры следует из положительной определенности формально усредненного оператора. В частности, важную роль играют оценки потенциала в усредненном уравнении. Здесь предложен метод получения таких оценок в терминах вспомогательной задачи типа Стеклова.

16.2.1. *Постановка задачи.* Пусть Ω — гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$. Положим $J^\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^d : \operatorname{dist}(\varepsilon j, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon\sqrt{d}\}$ и $\square \equiv \{\xi | -1/2 < \xi_j < 1/2,\ j = 1, \ldots, d\}$. Задав 1-периодическую по ξ гладкую функцию

$F(\xi)$ такую, что $F(\xi)\big|_{\xi\in\partial\square} \geqslant \text{const} > 0$, $F(0) = -1$, $\nabla_\xi F \neq 0$ при $\xi \in \square\backslash\{0\}$, положим $Q_j^\varepsilon = \{x \in \varepsilon(\square + j) | F(x/\varepsilon) \leqslant 0\}$ и введем перфорированную область $\Omega^\varepsilon = \Omega\backslash \bigcup\limits_{j\in J^\varepsilon} Q_j^\varepsilon$. В соответствии с вышеприведенной конструкцией граница $\partial\Omega^\varepsilon$ состоит из $\partial\Omega$ и границы включений $S_\varepsilon \subset \Omega$, $S_\varepsilon = (\partial\Omega^\varepsilon) \cap \Omega$.

Пусть $Q = \{\xi | -1/2 < \xi_j < 1/2, j = 1, \dots, d,\ F(\xi) \leqslant 0\}$ — включение, $S = \{\xi | F(\xi) = 0\}$ — граница включения Q и ν — единичный вектор внешней нормали к S в "растянутых" координатах. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &-\mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon := \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(a_{kj}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\Big) = f(x) \ \text{ в } \ \Omega^\varepsilon, \\ &\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\gamma} + p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_\varepsilon + \varepsilon q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ S_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{16.4}$$

где $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial\gamma} := \nu_k^\varepsilon a_{kj}\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}$, и $\nu^\varepsilon = (\nu_1^\varepsilon, \dots, \nu_d^\varepsilon)$ — единичный вектор внешней нормали к границе включений. Здесь предполагается, что матрица $\{a_{kj}(\xi)\}$ симметричная и положительно определенная, т.е. $\varkappa_1\eta^2 \leqslant a_{kj}\eta_k\eta_j \leqslant \varkappa_2\eta^2$ для любого вектора $\eta \in \mathbb{R}^d$, где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — положительные константы, и что все функции $a_{kj}(\xi)$, $p(\xi)$ и $q(\xi)$ 1-периодические по $\xi \in \mathbb{R}^d$. Пусть

$$\langle p(\xi)\rangle_S = 0, \tag{16.5}$$

где $\langle\cdot\rangle_S := \dfrac{}{}\displaystyle\int_S \cdot\, d\sigma$ и σ — элемент $(d-1)$-мерного объема на поверхности S. Оператор краевой задачи (16.4) будем обозначать A^ε.

16.2.2. *Формальный асимптотический анализ.* Будем искать решение в виде формального асимптотического ряда

$$u_\varepsilon(x) \sim u_0(x) + \varepsilon u_1(x,\xi) + \varepsilon^2 u_2(x,\xi) + \dots, \quad \xi = x/\varepsilon, \tag{16.6}$$

где все функции $u_i(x,\xi)$ периодичны по ξ. Введем обозначения

$$\begin{aligned} &-\mathscr{L}_{xx}\varphi(x,\xi) := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kj}(\xi)\frac{\partial\varphi(x,\xi)}{\partial x_j}\right), \\ &\frac{\partial\varphi(x,\xi)}{\partial\gamma_x} := a_{kj}(\xi)\frac{\partial\varphi(x,\xi)}{\partial x_j}\nu_k, \\ &-\mathscr{L}_{x\xi}\varphi(x,\xi) := \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(a_{kj}(\xi)\frac{\partial\varphi(x,\xi)}{\partial\xi_j}\Big), \\ &-\mathscr{L}_{\xi x}\varphi(x,\xi) := \frac{\partial}{\partial\xi_k}\Big(a_{kj}(\xi)\frac{\partial\varphi(x,\xi)}{\partial x_j}\Big), \\ &-\mathscr{L}_{\xi\xi}\varphi(x,\xi) := \frac{\partial}{\partial\xi_k}\Big(a_{kj}(\xi)\frac{\partial\varphi(x,\xi)}{\partial\xi_j}\Big), \\ &\frac{\partial\varphi(x,\xi)}{\partial\gamma_\xi} := a_{kj}(\xi)\frac{\partial\varphi(x,\xi)}{\partial\xi_j}\nu_k. \end{aligned}$$

Подставляя (16.6) в уравнение и граничные условия (16.4) и группируя члены при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную последовательность задач, первая из которых имеет вид

$$\mathscr{L}_{\xi\xi}u_1 + \mathscr{L}_{\xi x}u_0 = 0 \text{ в } \square\backslash Q, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial\gamma_\xi} + \frac{\partial u_0}{\partial\gamma_x} + p(\xi)u_0 = 0 \text{ на } S, \tag{16.7}$$

где $x \in \Omega$ играет роль параметра. Выпишем интегральное тождество задачи (16.7):

$$\int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_j}\frac{\partial v}{\partial \xi_k}d\xi + \int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial \xi_k}d\xi + \int\limits_S p(\xi)u_0 v\, d\sigma = 0, \tag{16.8}$$

где $v \in H^1_{\mathrm{per}}(\square\setminus Q)$. Вид интегрального тождества подсказывает структуру функции $u_1(x,\xi)$:

$$u_1(x,\xi) = M(\xi)u_0(x) + N_i(\xi)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}. \tag{16.9}$$

Подставляя (16.9) в (16.8) и группируя соответствующие члены, приходим к следующим задачам для функций $N_i(\xi)$ и $M(\xi)$:

$$\int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial N_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial v}{\partial \xi_k}d\xi + \int\limits_{\square\setminus Q} a_{ki}\frac{\partial v}{\partial \xi_k}d\xi = 0 \tag{16.10}$$

или в классической форме

$$\mathscr{L}_{\xi\xi}\left(N_i(\xi) + \xi_i\right) = 0 \text{ в } \square\setminus Q, \qquad \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \gamma_\xi} = -a_{ki}(\xi)\nu_k \text{ на } S,$$

где $i = 1, \dots, d$, и

$$\int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial M}{\partial \xi_j}\frac{\partial v}{\partial \xi_k}d\xi + \int\limits_S p(\xi)v\, d\sigma = 0 \tag{16.11}$$

или в классической форме

$$\mathscr{L}_{\xi\xi}M(\xi) = 0 \text{ в } \square\setminus Q, \qquad \frac{\partial M(\xi)}{\partial \gamma_\xi} = -p(\xi) \text{ на } S.$$

Условие согласования легко проверяется с помощью интегрирования по частям в задаче (16.10) и следует из (16.5) в задаче (16.11). Заметим, что функции $M(\xi)$ и $N_i(\xi)$ определены с точностью до аддитивной константы, естественным условием нормировки является $\langle M\rangle_{\square\setminus Q} = \langle N_i\rangle_{\square\setminus Q} = 0$ для всех $i = 1, \dots, d$. Далее эти условия предполагаются выполненными.

Следующая задача в рекуррентной последовательности имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_{\xi\xi}u_2 + \mathscr{L}_{x\xi}u_1 + \mathscr{L}_{\xi x}u_1 + \mathscr{L}_{xx}u_0 = -f \text{ в } \square\setminus Q,\\ &\frac{\partial u_2}{\partial \gamma_\xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \gamma_x} + p(\xi)u_1 + q(\xi)u_0 = 0 \text{ на } S. \end{aligned} \tag{16.12}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 16.1. *Функции $M(\xi)$ и $N_k(\xi)$ связаны интегральным равенством*

$$\int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial M}{\partial \xi_j}\, d\xi - \int\limits_S pN_k\, d\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

Доказательство. Подставим $N_i(\xi)$ в качестве пробной функции в (16.11):

$$\int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial M}{\partial \xi_j}\frac{\partial N_i}{\partial \xi_k}d\xi + \int\limits_S p(\xi)N_i\, d\sigma = 0.$$

Аналогично подставим $M(\xi)$ как пробную функцию в (16.10):

$$\int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial N_i}{\partial\xi_j}\frac{\partial M}{\partial\xi_k}d\xi + \int\limits_{\square\setminus Q} a_{ki}\frac{\partial M}{\partial\xi_k}d\xi = 0.$$

Ввиду симметричности матрицы $\{a_{kj}\}$

$$\int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial M}{\partial\xi_j}\,d\xi = \int\limits_S pN_k\,d\sigma.$$

Лемма доказана. □

Запишем интегральное тождество задачи (16.12):

$$\int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial u_2}{\partial\xi_j}\frac{\partial v}{\partial\xi_k}d\xi + \int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial\xi_k}d\xi + \int\limits_S p(\xi)u_1 v\,d\sigma + u_0(x)\int\limits_S q(\xi)v\,d\sigma$$
$$- \int\limits_{\square\setminus Q} a_{kj}\frac{\partial M}{\partial\xi_j}vd\xi\frac{\partial u_0}{\partial x_k} - \int\limits_{\square\setminus Q}\left(a_{ij}\frac{\partial N_k}{\partial\xi_j} + a_{ik}\right)vd\xi\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i\partial x_k} + |\square\setminus Q|f = 0.$$

Условие разрешимости этой задачи представляет собой уравнение для функции $u_0(x)$. Оно является искомым формальным усредненным (предельным) уравнением. Применяя лемму 16.1, запишем его в виде

$$\widehat{a}_{kj}\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_k\partial x_j} - u_0(x)\Big(\int\limits_S q(\xi)\,d\sigma + \int\limits_S p(\xi)M(\xi)\,d\sigma\Big) = |\square\setminus Q|f(x), \qquad (16.13)$$

где

$$\widehat{a}_{ik} := \int\limits_{\square\setminus Q}\left(a_{ij}(\xi)\frac{\partial N_k(\xi)}{\partial\xi_j} + a_{ik}(\xi)\right)d\xi.$$

Таким образом, усредненная задача принимает вид

$$\begin{aligned}&\widehat{a}_{kj}\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_k\partial x_j} - \langle q\rangle_S\,u_0(x) + m\,u_0(x) = |\square\setminus Q|f(x) \ \text{ в } \ \Omega,\\ &u_0(x) = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega,\end{aligned} \qquad (16.14)$$

где $m := -\langle pM\rangle_S$ и $\widehat{A}$ — оператор краевой задачи (16.14).

Замечание 16.1. Потенциал m в предельном уравнении всегда положителен, и тем самым наличие этого потенциала может привести к потере коэрцитивности задачи (16.14). Легко видеть, что задача (16.14) корректна, если $m\langle q\rangle_S < \lambda_0$, где λ_0 — первое собственное значение оператора $\widehat{a}_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

16.2.3. *Основные утверждения и оценки.* Сначала мы получим оценки усредненного потенциала в (16.14), а затем сформулируем основной результат раздела.

Рассмотрим вспомогательную спектральную задачу типа Стеклова

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\Big(a_{kj}(\xi)\frac{\partial\theta}{\partial\xi_j}\Big) = 0 \text{ в } \square\setminus Q, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\gamma} = \Upsilon\theta \text{ на } S, \quad \langle\theta\rangle_S = 0, \qquad (16.15)$$

в пространстве 1-периодических по ξ функций. Обозначим через Υ_1 первое собственное значение этой задачи, которое может быть найдено как минимум вариационной задачи

$$\Upsilon_1 = \inf \frac{a(\psi,\psi)}{\langle \psi^2 \rangle_S},$$

где инфимум берется по $\psi \in H^1_{\mathrm{per}}(\square)\backslash\{0\}$ таким, что $\langle \psi \rangle_S = 0$, и

$$a(u,v) := \int\limits_{\square\backslash Q} a_{kj} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_k}\, d\xi.$$

Лемма 16.2. *Константа m положительна и имеет место оценка*

$$\langle p^2 \rangle_S \frac{\langle p^2 \rangle_S}{a(p,p)} \leqslant m \leqslant \frac{\langle p^2 \rangle_S}{\Upsilon_1}, \tag{16.16}$$

где $p(\xi)$ — коэффициент в краевом условии исходной задачи.

Замечание 16.2. Оба неравенства в (16.16) обращаются в равенства на функциях $p(\xi)$, принадлежащих собственному подпространству задачи (16.15), соответствующему первому собственному значению Υ_1.

Доказательство леммы 16.2. Подставим $M(\xi)$ в качестве пробной функции в (16.11):

$$\int\limits_{\square\backslash Q} a_{kj} \frac{\partial M}{\partial \xi_j} \frac{\partial M}{\partial \xi_k} d\xi + \int\limits_S p(\xi) M\, d\sigma = 0.$$

Таким образом,

$$m = -\langle pM \rangle_S = \left\langle a_{kj} \frac{\partial M}{\partial \xi_j} \frac{\partial M}{\partial \xi_k} \right\rangle_{\square\backslash Q} > 0,$$

если $M \neq 0$. Отметим, что M равна нулю тождественно тогда и только тогда, когда $p = 0$.

Рассмотрим вариационную задачу

$$\inf_{\psi \in H^1_{\mathrm{per}}(\square)} H(\psi) \equiv \inf_{\psi \in H^1_{\mathrm{per}}(\square)} \{a(\psi,\psi) + 2\langle p\psi \rangle_S\}. \tag{16.17}$$

В силу (16.11) на функции M достигается минимум в задаче (16.17). Следовательно,

$$-\inf_{\psi \in H^1_{\mathrm{per}}(\square)} \{a(\psi,\psi) + 2\langle p\psi \rangle_S\} = -a(M,M) - 2\langle pM \rangle_S = -\langle pM \rangle_S = m.$$

Подставляя $\psi = -tp$ в функционал $H(\psi)$, получаем $H(-tp) = t^2 a(p,p) - 2t\langle p^2 \rangle_S$. Чтобы найти минимум по t функции $H(-tp)$, приравниваем к нулю производную по t функции $H(-tp)$, т.е. $0 = H'_t(-t_0 p) = 2t_0 a(p,p) - 2\langle p^2 \rangle_S$. Далее, $t_0 = \dfrac{\langle p^2 \rangle_S}{a(p,p)}$ и, следовательно,

$$H(-t_0 p) = \frac{(\langle p^2 \rangle_S)^2}{a(p,p)} - 2\frac{(\langle p^2 \rangle_S)^2}{a(p,p)} = -\frac{(\langle p^2 \rangle_S)^2}{a(p,p)}.$$

Первое неравенство в (16.16) доказано.

Подставляя $\psi = -t\varphi$ и применяя аналогичную процедуру, получим

$$H(-t_0 \varphi) = -\frac{\left(\langle p\varphi \rangle_S\right)^2}{a(\varphi,\varphi)}.$$

Поскольку

$$m = \sup_{\varphi \in H^1_{\mathrm{per}}(\square)} \frac{(\langle p\varphi \rangle_S)^2}{a(\varphi, \varphi)} \tag{16.18}$$

и максимум достигается при $\varphi = M$, для произвольного φ имеем $m \geqslant \dfrac{(\langle p\varphi \rangle_S)^2}{a(\varphi, \varphi)}$. Из (16.18) следует, что

$$\frac{1}{m} = \inf_{\varphi \in H^1_{\mathrm{per}}(\square)\setminus\{0\}} \frac{a(\varphi,\varphi)}{(\langle p\varphi\rangle_S)^2} \geqslant \inf_{\substack{\varphi \in H^1_{\mathrm{per}}(\square)\setminus\{0\},\\ \langle\varphi\rangle_S = 0}} \frac{a(\varphi,\varphi)}{\langle p^2\rangle_S \langle \varphi^2\rangle_S} = \frac{\Upsilon_1}{\langle p^2\rangle_S}.$$

Окончательно, $m \leqslant \dfrac{\langle p^2\rangle_S}{\Upsilon_1}$, где Υ_1 — первое собственное значение задачи (16.15). Тем самым доказано второе неравенство в (16.16). □

Следующая теорема дает обоснование построенной асимптотики решения задачи (16.4) и оценку остаточного члена.

Теорема 16.2. *Пусть $f(x) \in H^1(\Omega)$, $p(\xi)$, $q(\xi)$ — 1-периодические C^1-функции, u_0 — решение задачи (16.14), u_1 имеет вид (16.9), $M(\xi)$ и $N_i(\xi)$ — функции, построенные выше. Предположим также, что*

$$m < \lambda_0 + \langle q\rangle_S, \tag{16.19}$$

где λ_0 определено в замечании 16.1. Тогда при всех достаточно малых ε задача (16.4) имеет единственное решение u_ε и $\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Более того, справедлива оценка

$$\|u_0 + \varepsilon u_1 - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant K_1 \sqrt{\varepsilon}, \tag{16.20}$$

где константа $K_1 > 0$ не зависит от ε.

16.2.4. *Предварительные леммы.* Приведем технические утверждения, которые будут использованы в дальнейшем. Доказательства первых двух лемм содержатся в [**12, 132**], поэтому здесь даны только их формулировки.

Лемма 16.3. *Пусть $\zeta(x,\xi)$ — 1-периодическая по ξ функция класса $C^1(\Omega, S)$, и пусть*

$$Z(x) \equiv \int\limits_S \zeta(x,\xi)\, d\sigma. \tag{16.21}$$

Тогда справедлива оценка

$$\Big| \frac{1}{|\square\setminus Q|} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} Z(x)\, u(x) v(x)\, dx - \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} \zeta\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\, u(x) v(x)\, d\sigma^\varepsilon \Big| \leqslant C_2 \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \tag{16.22}$$

для любых $u(x), v(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, где константа C_2 не зависит от ε.

Замечание 16.3. Подобные оценки были получены в [**104, 105, 106**].

Следующее утверждение является модификацией леммы 1.1.

Лемма 16.4. *Пусть $\zeta(x,\xi)$ — 1-периодическая по ξ функция класса $C^1(\Omega, L_\infty(\square\setminus Q))$, и пусть*

$$\int\limits_{\square\setminus Q} \zeta(x,\xi)\, d\xi \equiv 0. \tag{16.23}$$

Тогда справедлива оценка

$$\Big|\frac{1}{|\square\backslash Q|}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\zeta\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,u(x)v(x)\,dx\Big|\leqslant C_3\varepsilon\|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$

для любых $u(x),v(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon)$, *где константа* C_3 *не зависит от* ε.

Пусть число λ_0 определено так же, как в замечании 16.1.

Лемма 16.5. *Если* $m<\lambda_0+\langle q\rangle_S$, *то задача* (16.14) *коэрцитивна.*

Доказательство. Используя вариационные свойства собственных значений оператора $\widehat{A}$, находим

$$\inf_{\substack{v\in\mathring{H}^1(\Omega),\\ \|v\|_{L_2(\Omega)}=1}}(-\widehat{A}v,v)_{L_2(\Omega)}=\inf_{\substack{v\in\mathring{H}^1(\Omega),\\ \|v\|_{L_2(\Omega)}=1}}\int\limits_\Omega\widehat{a}_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+(\langle q\rangle_S-m)\,v^2\,dx$$

$$=\inf_{\substack{v\in\mathring{H}^1(\Omega),\\ \|v\|_{L_2(\Omega)}=1}}\int\limits_\Omega\widehat{a}_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx+(\langle q\rangle_S-m)=\lambda_0+\langle q\rangle_S-m.$$

Тем самым в условиях леммы $(-\widehat{A}v,v)_{L_2(\Omega)}\geqslant C_4\|v\|^2_{L_2(\Omega)}$, $C_4>0$, что и требовалось доказать. □

Лемма 16.6. *Если* $p\in C^1(S)$, $\langle p\rangle_S=0$, *то для любых* $u(\xi),v(\xi)\in H^1(\square)$ (*без условия периодичности*) *справедливо неравенство*

$$\Big|\int\limits_S p(\xi)\,u(\xi)v(\xi)\,d\sigma\Big|\leqslant C_5(\|\nabla u\|_{L_2(\square)}\|v\|_{L_2(\square)}+\|u\|_{L_2(\square)}\|\nabla v\|_{L_2(\square)}),\quad(16.24)$$

где константа C_5 *не зависит от* ε.

Доказательство. Из условия леммы следует, что задача

$$\Delta_\xi\Psi(\xi)=0\text{ в }\square\backslash Q,\qquad\frac{\partial\Psi}{\partial n}=p(\xi)\text{ на }S,\qquad\frac{\partial\Psi}{\partial n}=0\text{ на }\partial\square\qquad(16.25)$$

разрешима и решение единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Умножим уравнение (16.25) на функцию uv, где $u(\xi),v(\xi)\in H^1(\square)$, и проинтегрируем по области $\square\backslash Q$. Интегрируя по частям, получим

$$\Big|\int\limits_S p(\xi)\,u(\xi)v(\xi)\,d\sigma\Big|=\Big|\int\limits_{\square\backslash Q}\Delta_\xi\Psi(\xi)u(\xi)v(\xi)\,d\xi-\int\limits_S p(\xi)\,u(\xi)v(\xi)\,d\sigma\Big|$$

$$\leqslant\Big|\int\limits_{\square\backslash Q}((\nabla_\xi\Psi(\xi)),\nabla_\xi(u(\xi)v(\xi)))d\xi\Big|$$

$$\leqslant C_5(\|\nabla u\|_{L_2(\square)}\|v\|_{L_2(\square)}+\|u\|_{L_2(\square)}\|\nabla v\|_{L_2(\square)}).\qquad(16.26)$$

Лемма доказана. □

Лемма 16.7. *Коэрцитивность усредненной задачи* (16.14) *влечет коэрцитивность исходной задачи* (16.4) *при достаточно малых* ε.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\int\limits_{S_\varepsilon}p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u^2(x)\,ds\leqslant C_6\Big(\alpha\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla u|^2\,dx+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}u^2\,dx\Big)\qquad(16.27)$$

для любого $\alpha > 0$. Действительно, в силу леммы 16.6

$$\left| \int\limits_S p(\xi)\, u^2(\xi)\, d\sigma \right| \leqslant 2C_5 \|\nabla u\|_{L_2(\square)} \|u\|_{L_2(\square)} \leqslant C_7 \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} \int\limits_\square |\nabla u|^2\, d\xi + \frac{\varepsilon}{\alpha} \int\limits_\square u^2\, d\xi \right).$$

Переходя к координатам $x = \varepsilon\xi$ и суммируя по всем ячейкам, получаем искомое неравенство (см. также [**104, 105**]).

Докажем, что найдется достаточно большое Λ, не зависящее от ε и такое, что краевая задача

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon + \Lambda u_\varepsilon = -f(x) \text{ в } \Omega^\varepsilon, \\ &\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \gamma} + p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) u_\varepsilon + \varepsilon q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) u_\varepsilon = 0 \text{ на } S_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega \end{aligned} \tag{16.28}$$

корректна для любого $\varepsilon > 0$.

В силу лемм 16.3 и 16.6

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega^\varepsilon} a_{ik}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{S_\varepsilon} p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) v^2 ds + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) v^2 ds + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Lambda v^2\, dx \\ &\geqslant \varkappa_1 \|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - (C_6\alpha + O(\varepsilon)) \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \Big(\langle q \rangle_S - \frac{C_6}{\alpha} + \Lambda \Big) \|v\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{16.29}$$

Выбирая достаточно малое α, а затем достаточно большое Λ, добиваемся положительной определенности квадратичной формы в правой части неравенства (16.29) и тем самым получаем необходимую оценку.

Рассмотрим спектральные задачи

$$(-A^\varepsilon + \Lambda)^{-1} u^k_\varepsilon = \lambda^k_\varepsilon u^k_\varepsilon, \tag{16.30}$$

$$(-\widehat{A} + \Lambda)^{-1} u^k = \lambda^k u^k, \tag{16.31}$$

где A^ε — оператор краевой задачи (16.4) и $\widehat{A}$ — оператор усредненной задачи (16.14). Под $(-A^\varepsilon + \Lambda)^{-1}$ мы понимаем оператор, который произвольной функции $f \in L_2(\Omega^\varepsilon)$ ставит в соответствие решение $u_\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ задачи (16.28). Аналогично определяется оператор $(-\widehat{A} + \Lambda)^{-1}$. Принимая во внимание свойство коэрцитивности, нетрудно проверить, что операторы $(-A^\varepsilon + \Lambda)^{-1}$ и $(-\widehat{A} + \Lambda)^{-1}$ удовлетворяют условиям C1–C4 теоремы 1.9 о сходимости спектров семейства операторов, заданных в различных пространствах (см. [**98**, гл. III]). Из этой теоремы, в частности, следует, что $\lambda^0_\varepsilon \to \lambda^0$ при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через μ^0_ε и μ^0 первые собственные значения операторов $-A^\varepsilon$ и $-\widehat{A}$ соответственно. Тогда $\mu^0_\varepsilon \equiv -\Lambda + 1/\lambda^0_\varepsilon \to \mu^0 \equiv -\Lambda + 1/\lambda^0$ при $\varepsilon \to 0$ и ввиду вариационного принципа положительная определенность оператора $-\widehat{A}$ влечет положительную определенность оператора $-A^\varepsilon$ при всех достаточно малых ε. □

Замечание 16.4. Прием, связанный с переходом к вспомогательной задаче смещением по спектру, был использован [**106**, лемма 3], где коэрцитивность задачи (16.28) доказывалась аналогичным методом.

16.2.5. *Обоснование асимптотики.*

Доказательство теоремы 16.2. Чтобы оценить H^1-норму остатка $\|u_0 + \varepsilon u_1 - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$, подставим выражение $z_\varepsilon(x, x/\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x, x/\varepsilon) - u_\varepsilon(x)$

в уравнение (16.4):

$$\mathscr{L}_\varepsilon\Big(z_\varepsilon\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)=\frac{1}{\varepsilon}\mathscr{L}_{\xi x}u_0(x)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}+\mathscr{L}_{xx}u_0(x)+\varepsilon\mathscr{L}_{xx}u_1(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}$$
$$+\mathscr{L}_{\xi x}u_1(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}+\mathscr{L}_{x\xi}u_1(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\mathscr{L}_{\xi\xi}u_1(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}-\mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon(x). \tag{16.32}$$

Принимая во внимание соотношения

$$\mathscr{L}_{\xi\xi}u_1(x,\xi)=-\mathscr{L}_{\xi x}u_0(x),\quad \mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon(x)=-f(x),$$
$$-\mathscr{L}_{\xi x}u_1(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}M(\xi)\Big)+\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_j\partial x_k}N_k(\xi)\Big),$$
$$-\mathscr{L}_{x\xi}u_1(x,\xi)=a_{ij}(\xi)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial M(\xi)}{\partial\xi_j}+a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial N_k(\xi)}{\partial\xi_j}$$

и

$$\widehat{a}_{kj}\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_k\partial x_j}\ -\langle q\rangle_S\,u_0(x)+m\,u_0(x)=|\square\backslash Q|f(x)\ \text{ в }\ \Omega,$$

перепишем (16.32) в области Ω^ε следующим образом:

$$-\mathscr{L}_\varepsilon(z_\varepsilon(x,x/\varepsilon))=-\varepsilon\mathscr{L}_{xx}u_1(x,\xi)\big|_{\xi=x/\varepsilon}$$
$$+\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}M(\xi)\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}+\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_j\,\partial x_k}N_k(\xi)\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}$$
$$+a_{ij}(\xi)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial M(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=x/\varepsilon}+a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial N_k(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=x/\varepsilon}$$
$$-\mathscr{L}_{xx}u_0(x)-\frac{1}{|\square\backslash Q|}\widehat{a}_{kj}\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_k\partial x_j}+\frac{(\langle q\rangle_S-m)}{|\square\backslash Q|}\,u_0(x). \tag{16.33}$$

Аналогично, обозначив

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_x}g\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)=\nu^\varepsilon a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla_x g(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon},$$
$$\frac{\partial}{\partial\gamma_\xi}g\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)=\nu^\varepsilon a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla_\xi g(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon},$$

на S_ε получаем

$$\frac{\partial z_\varepsilon\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)}{\partial\gamma}-p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)z_\varepsilon-\varepsilon q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)z_\varepsilon$$
$$=-\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_0(x)}{\partial\gamma}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\gamma_x}u_1\big(x,\frac{x}{\varepsilon}\big)+\frac{\partial}{\partial\gamma_\xi}u_1\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$
$$=p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_\varepsilon(x)+\varepsilon q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_\varepsilon(x)+\frac{\partial u_0(x)}{\partial\gamma}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\gamma_x}u_1\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$
$$+u_0(x)\frac{\partial}{\partial\gamma_\xi}M\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)+\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\gamma_\xi}N_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Умножая уравнение (16.33) на $v(x)\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и интегрируя по Ω^ε, находим

$$-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\mathscr{L}_\varepsilon\Big(z_\varepsilon\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)v(x)\,dx=-\varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\mathscr{L}_{xx}u_1(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}M(\xi)\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx\\
&+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_j\,\partial x_k}N_k(\xi)\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx\\
&+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}a_{ij}(\xi)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial M(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx\\
&+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial N_k(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx\\
&-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\mathscr{L}_\varepsilon u_0(x)v(x)\,dx-\frac{1}{|\square\backslash Q|}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\widehat{a}_{kj}\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_k\partial x_j}\,v(x)\,dx\\
&+\frac{1}{|\square\backslash Q|}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}t(\langle q\rangle_S-m)\,u_0(x)\,v(x)\,dx.
\end{aligned}
\tag{16.34}
$$

С другой стороны, с помощью формулы Грина можно преобразовать левую часть равенства (16.34) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\mathscr{L}_\varepsilon\Big(z_\varepsilon\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)v(x)\,dx=\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial\gamma}v(x)\,ds-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\nabla z_\varepsilon\,\nabla v(x)\,dx\\
&=\int\limits_{S_\varepsilon}p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_\varepsilon(x)\,v(x)\,ds+\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_\varepsilon(x)\,v(x)\,ds\\
&\quad+\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial u_0(x)}{\partial\gamma_x}\,v(x)\,ds+\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial u_1(x,\xi)}{\partial\gamma_x}\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,ds\\
&\quad+\int\limits_{S_\varepsilon}\Big(u_0(x)\frac{\partial M(\xi)}{\partial\gamma_\xi}+\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial N_i(\xi)}{\partial\gamma_\xi}\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,ds\\
&\quad-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\nabla z_\varepsilon\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\nabla v(x)\,dx.
\end{aligned}
\tag{16.35}
$$

Из (16.34) и (16.35) выводим

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\nabla z_\varepsilon\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\nabla v(x)\,dx=\int\limits_{S_\varepsilon}p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_\varepsilon(x)\,v(x)\,ds+\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_\varepsilon(x)\,v(x)\,ds\\
&+\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial u_0(x)}{\partial\gamma}\,v(x)\,ds+\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\gamma_x}u_1\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)v(x)\,ds+\int\limits_{S_\varepsilon}\Big(u_0(x)\frac{\partial}{\partial\gamma_\xi}M\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\\
&+\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\gamma_\xi}N_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)v(x)\,ds-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}M(\xi)\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_j\,\partial x_k}N_k(\xi)\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx\\
&-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}a_{ij}(\xi)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial M(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\mathscr{L}_{xx}u_1(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx\\
&-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial N_k(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\mathscr{L}_{xx}u_0(x)v(x)\,dx\\
&+\frac{1}{|\square\backslash Q|}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\widehat{a}_{kj}\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_k\partial x_j}\,v(x)\,dx-\frac{1}{|\square\backslash Q|}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\langle q\rangle_S-m)u_0(x)\,v(x)\,dx. \quad (16.36)
\end{aligned}
$$

Ввиду очевидного соотношения

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_j\partial x_k}N_k(\xi)\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}\\
&=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_j\partial x_k}N_k(\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}\Big)-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_j\partial x_k}N_k(\xi)\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon},
\end{aligned}
$$

по формуле Стокса получим

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_j\,\partial x_k}N_k(\xi)\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx\\
&\quad+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(a_{ij}(\xi)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}M(\xi)\Big)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx\\
&\quad=\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\gamma_x}u_1\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)v(x)\,ds+O(\varepsilon)\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \qquad (16.37)
\end{aligned}
$$

Используя (16.36) и граничные условия в (16.7) и (16.14), оценим

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\nabla z_\varepsilon\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\nabla v(x)\,dx+\int\limits_{S_\varepsilon}\Big(p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)+\varepsilon q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)z_\varepsilon\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,v(x)\,ds\Big|\\
&\leqslant\varepsilon\Big|\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_1(x,\frac{x}{\varepsilon})\,v(x)\,ds\Big|+\Big|\int\limits_{S_\varepsilon}u_0\frac{\partial}{\partial\gamma_\xi}M\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)v\,ds+\int\limits_{S_\varepsilon}p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_0v\,ds\Big|\\
&\quad+\Big|\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_0(x)\,v(x)\,ds-\frac{1}{|\square\backslash Q|}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\langle q\rangle_Su_0(x)\,v(x)\,dx\Big|\\
&\quad+\Big|\varepsilon\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\mathscr{L}_{xx}u_1(x,\xi)\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx\Big|+O(\varepsilon)\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\\
&\quad+\Big|\int\limits_{S_\varepsilon}\Big(\frac{\partial u_0(x)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\gamma_\xi}N_i\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,v(x)\,ds\Big|\\
&\quad+\Big|\int\limits_{S_\varepsilon}\varepsilon M\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,u_0(x)\,v(x)\,ds+\frac{1}{|\square\backslash Q|}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}mu_0(x)v(x)\,dx\Big|
\end{aligned}
$$

$$+\Big|\int\limits_{S_\varepsilon}\varepsilon p\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_0}{\partial x_k}N_k\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)v(x)\,ds-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial M(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)\,dx\Big|$$

$$+\Big|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Big(\frac{\widehat{a}_{kj}}{|\square\backslash Q|}\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_k\partial x_j}\,v(x)-a_{ij}(\xi)\frac{\partial^2u_0(x)}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial N_k(\xi)}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi=x/\varepsilon}v(x)$$

$$+\mathscr{L}_{xx}u_0(x)v(x)\Big)\,dx\Big|=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8. \tag{16.38}$$

Оценим I_3. Согласно лемме 16.3

$$I_3=\Big|\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}q\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_0(x)\,v(x)\,ds-\frac{1}{|\square\backslash Q|}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\langle q\rangle_S u_0(x)\,v(x)\,dx\Big|$$
$$\leqslant C_2\varepsilon\|u_0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Аналогично с помощью леммы 16.3 оценивается I_6:

$$I_6\leqslant C_8\varepsilon\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)},$$

а с помощью леммы 16.4 — I_8:

$$I_8\leqslant C_{10}\varepsilon\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Для I_1 и I_4 имеем оценку

$$|I_1|+|I_4|\leqslant C_{11}\varepsilon\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{16.39}$$

Задача 16.3. Докажите оценку (16.39).

Тождества $I_2\equiv 0$ и $I_5\equiv 0$ вытекают из (16.10)–(16.11). Из леммы 16.1 следует, что $|I_7|\leqslant C\varepsilon$. Функция z_ε не обращается в нуль на границе $\partial\Omega$, поскольку функция u_1 ("корректор") не обращается в нуль на $\partial\Omega$. Вводя срезку $\chi_\varepsilon(x)$ в ε-окрестности внешней границы, $\chi_\varepsilon(x)\equiv\chi((\rho(x))/\varepsilon)$, где $\chi(t)=0$ при $t<0$ и $\chi(t)=1$ при $t>1$, $\chi\in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\rho(x)$ — расстояние от точки $x\in\Omega$ до $\partial\Omega$, рассмотрим тестовую функцию $v=u_0+\varepsilon\chi_\varepsilon(x)u_1-u_\varepsilon$. При этом нетрудно убедиться (убедитесь!), что $\|\varepsilon u_1(1-\chi_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C_{12}\sqrt{\varepsilon}$. Подставляя функцию v в (16.38) и принимая во внимание предыдущие оценки v, приходим к искомому неравенству (16.20). □

§ 17. Параболические уравнения в средах с быстро пульсирующей перфорацией

17.1. Постановка задачи и примеры. В этом параграфе мы будем изучать параболические уравнения, для простоты изложения — уравнение теплопроводности, на множестве с периодической перфорацией, геометрия которой быстро меняется во времени. В предположении, что эти изменения геометрии микроструктуры периодичны по времени и автомодельны, т.е. согласованы с автомодельной заменой переменных $x\to\varepsilon x$, $t\to\varepsilon^2t$, мы построим усредненную модель, докажем теорему о сходимости и исследуем свойства усредненной задачи. В частности, будет показано, что осцилляция перфорации во времени может привести в присутствию неограниченно возрастающей конвекции в эффективной динамике. В этом случае наблюдается эффективная диффузия на фоне большой конвекции

и теорема усреднения справедлива в движущихся координатах. Эта задача изучалась в [**136**].

Определим пульсирующую перфорацию. Пусть $F_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — 1-периодическое по t семейство диффеоморфизмов таких, что $F_t(x+k) = F_t(x) + k$ при всех $x \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{Z}^d$, и $-\infty < t < \infty$. Пусть G_{ref} — $\square$-периодическое связное открытое множество в $\mathbb{R}^d$ с липшицевой границей, где $\square = [0,1]^d$. Подчеркнем, что дополнение к G_{ref} может быть, как дисперсным, так и множеством с неограниченной компонентой связности.

Положим $G(t) = F_t(G_{\mathrm{ref}})$ и назовем множество $Q_T^\varepsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 \leqslant t \leqslant T; x/\varepsilon \in G(t/\varepsilon^2)\}$ *перфорированной областью с пульсирующей границей*; здесь $\varepsilon > 0$.

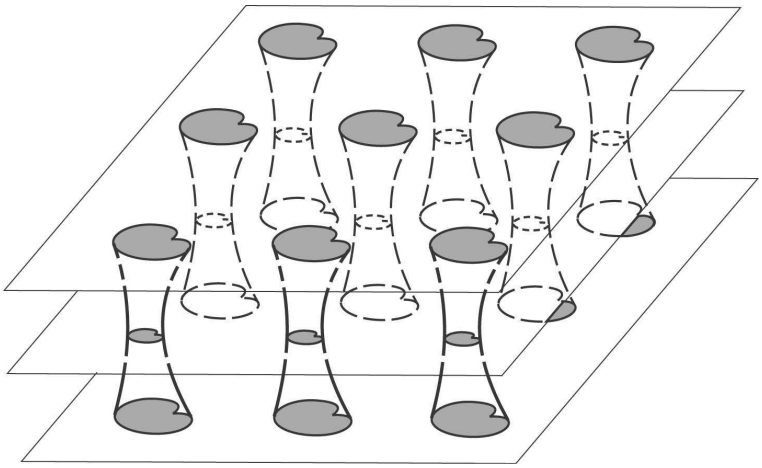

Рис. 17.1

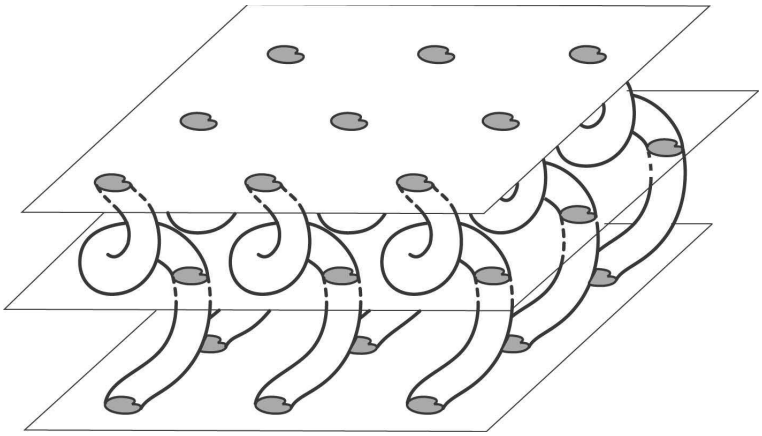

Рис. 17.2

Пример 17.1. Типичный пример дисперсной перфорации дает множество вида $G_{\mathrm{ref}} = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} (B_0 + k)$, где B_0 — шар радиуса $r < 1/2$ с центром в начале координат.

Если диффеоморфизмы F_t не зависят от t, мы имеем обычную задаче усреднения в перфорированной среде.

На множестве Q_T^ε рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}u^\varepsilon(x,t) - \Delta u^\varepsilon(x,t) = f(x,t) \text{ в } Q_T^\varepsilon, \\ &\frac{\partial}{\partial n^\varepsilon(t)}u^\varepsilon(x,t) = 0 \text{ на } \partial Q_T^\varepsilon \cap \{0<t<T\}, \\ &u^\varepsilon\big|_{t=0} = g(x) \text{ на } \varepsilon G(0), \end{aligned} \tag{17.1}$$

где $n^\varepsilon(t)) = n^\varepsilon(x,t)$ — единичная нормаль к границе сечения множества G_T^ε плоскостью $t = \text{const}$, т.е. к границе множества $\varepsilon G(t/\varepsilon^2)$ в $\mathbb{R}^d$.

Предполагаем, что $f(x,t)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям

$$f \in L_2(0,T;L_2(\mathbb{R}^d)), \quad g \in L_2(\mathbb{R}^d). \tag{17.2}$$

Далее используется обозначение $G^\varepsilon(t) = \varepsilon G(t/\varepsilon^2)$.

Предложение 17.1. *При перечисленных выше условиях для каждого $\varepsilon > 0$ уравнение* (17.1) *однозначно разрешимо в пространстве $V = L_2(0,T;H^1(G^\varepsilon(t))) \cap L_\infty(0,T;L_2(G^\varepsilon(t)))$.*

Доказательство. Замена переменных $(y,t) = (\varepsilon F^{-1}_{(t/\varepsilon^2)}(x/\varepsilon),t)$ в уравнении (17.1) позволяет "выпрямить" границу области Q_T^ε так, что в новых переменных (y,t) задача (17.1) задана в цилиндре $\widetilde{Q}_T^\varepsilon = (\varepsilon G_{\text{ref}}) \times (0,T)$ и имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}u^\varepsilon(y,t) - a_{ij}^\varepsilon(y,t)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}u^\varepsilon(y,t) - b_i^\varepsilon(y,t)\frac{\partial}{\partial x_i}u^\varepsilon(y,t) = f(y,t) \quad \text{в } \widetilde{Q}_T^\varepsilon, \\ &\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_a^\varepsilon} = 0 \text{ на } \varepsilon\partial G_{\text{ref}} \times (0,T), \quad u^\varepsilon\big|_{t=0} = g(y). \end{aligned} \tag{17.3}$$

где $f(y,t) = f(x(y),t)$ и $g(y) = g(x(y))$, $n_a^\varepsilon(y,t)$ — конормаль к границе $\varepsilon\partial G_{\text{ref}}$: $(n_a^\varepsilon)_i(y,t) = a_{ij}^\varepsilon(y,t)n_j^\varepsilon(y,t)$, и $n_j^\varepsilon(y,t)$ — единичная нормаль к $\varepsilon\partial G_{\text{ref}}$. Прямым вычислением проверяется, что

$$\begin{aligned} a_{ij}^\varepsilon(y,t) &= \sum_{k=1}^d \Big(\frac{\partial (F^{-1}_{t/\varepsilon^2})_i}{\partial x_k}\Big)\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big(\frac{\partial (F^{-1}_{t/\varepsilon^2})_j}{\partial x_k}\Big)\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big), \\ b_i^\varepsilon(y,t) &= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^d \Big\{\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial (F^{-1}_{t/\varepsilon^2})_i}{\partial x_k}\Big)\Big\}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big). \end{aligned}$$

Разрешимость уравнения (17.3) хорошо известна (см., например, [**72**]). При сделанных выше предположениях на данные задачи (17.1) решение принадлежит пространству $L_2(0,T;H^1(\varepsilon G_{\text{ref}})) \cap L_\infty(0,T;L_2(\varepsilon G_{\text{ref}}))$. Сделав обратную замену переменных, получим требуемое утверждение. □

Замечание 17.1. В связи с наличием в уравнении (17.3) коэффициентов, растущих по абсолютной величине при $\varepsilon \to 0$, использованный при доказательстве предложения 17.1 метод не позволяет получить равномерные по ε оценки решения задачи (17.1).

Обозначим через G "перфорированную" $(d+1)$-мерную ячейку периодичности: $G = \{(z,\tau) \in [0,1]^{d+1} : z \in G(\tau)\}$. В дальнейшем, как при

получении равномерных априорных оценок, так и при асимптотическом анализе задачи (17.1), важную роль играет периодическая задача на G

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial \tau} + \Delta_z p = 0 \ \text{ в } \ G, \\ &\frac{\partial p}{\partial n_z(\tau)} + n_\tau p = 0 \ \text{ на } \ \partial G, \\ &p(z,\tau) 1\text{-периодична по } z \text{ и } \tau, \end{aligned} \tag{17.4}$$

где n_z и n_τ — пространственная и временная компоненты $(d+1)$-мерного единичного вектора нормали $n(z,\tau)$ к ∂G. Задача (17.4) служит формально сопряженной, т.е. полученной формальным интегрированием по частям, для задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial \tau} - \Delta_z v = 0 \ \text{ в } \ G, \\ &\frac{\partial v}{\partial n_z(\tau)} = 0 \ \text{ на } \ \partial G, \\ &v(z,\tau) 1\text{-периодична по } z \text{ и } \tau. \end{aligned} \tag{17.5}$$

Изучим подробнее свойства задачи (17.4).

Теорема 17.1. *Задача* (17.4) *имеет нетривиальное периодическое решение* $p(z,\tau) \not\equiv 0$. *Это решение единственно с точностью до мультипликативной константы и не меняет знак, так что при подходящей нормировке* $p(z,\tau) > 0$ *при всех* z *и* τ.

Доказательство. На множестве $Q_- = \{(z,\tau) \in \mathbb{R}^{d+1} : \tau < 0,\ z \in G(\tau)\}$ рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q}{\partial \tau} + \Delta_z q = 0 \ \text{ в } \ Q_-, \\ &\frac{\partial q}{\partial n_z(\tau)} + n_\tau q = 0 \ \text{ на } \ \partial Q_- \cap \{\tau < 0\}, \\ &q(z,\tau)\big|_{\tau=0} = \psi(z) \ \text{ в } \ G(0), \end{aligned} \tag{17.6}$$

где $\psi(z)$ — 1-периодическая по z функция. Решение этого уравнения также будет периодично по z. Так же, как при доказательстве предложения 17.1, легко показать, что задача (17.6) имеет единственное решение, которое принадлежит пространству $C((-\infty,0); L_2(G(\tau)))$, если $\psi \in L_2(G(0))$, и пространству $C((-\infty,0); C(G(\tau)))$, если $\psi \in C(G(0))$. Рассмотрим отображение за один период:

$$S : \psi(\cdot) \to q(\cdot,-1). \tag{17.7}$$

Задача 17.1. Докажите, что оператор S переводит множество неотрицательных функций в себя.

Указание. Воспользуйтесь принципом максимума.

В силу сглаживающих свойств параболического уравнения оператор S непрерывно отображает $C(G(0))$ в $C^1(G(-1)) = C^1(G(0))$, причем последнее равенство справедливо благодаря периодичности множества $G(\tau)$ по τ. Поскольку $C^1(G(0))$ компактно вложено в $C(G(0))$, оператор S компактен в $C(G(0))$. Мы проверили условия теорем 2.9.2 и 2.11.1 из [**69**], согласно которым найдутся $\lambda_0 > 0$ и $\psi_0(\cdot) > 0$ такие, что $S\psi_0(z) = \lambda_0 \psi_0(z)$. Более того, собственное значение λ_0 однократно и все остальные собственные значения λ_j, $j > 0$, удовлетворяют оценке $|\lambda_k| < \lambda_0$.

Покажем теперь, что $\lambda_0 = 1$. Для этого проверим, что интеграл от функции $q(\cdot, \tau)$ по сечению $G_{\rm per}(\tau) = G(\tau \cap [0,1]^d)$ не зависит от выбора сечения, т.е. является постоянной величиной. Действительно, по формуле Стокса и в силу уравнения (17.6) для произвольных τ_1 и τ_2, $\tau_1 < \tau_2$, имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_{\rm per}(\tau_2)} q(z,\tau_2)dz - \int\limits_{G_{\rm per}(\tau_1)} q(z,\tau_1)dz \\
&= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{G_{\rm per}(\tau)} \frac{\partial q(z,\tau)}{\partial \tau} dz d\tau - \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\partial G_{\rm per}(\tau)} q(z,\tau) n_\tau(z,\tau) dS_{z,\tau} \\
&= -\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{G_{\rm per}(\tau)} \Delta q(z,\tau) dz d\tau - - \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\partial G_{\rm per}(\tau)} q(z,\tau) n_\tau(z,\tau) dS_{z,\tau} \\
&= -\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\partial G_{\rm per}(\tau)} \left(\frac{\partial q(z,\tau)}{\partial n_z} + q(z,\tau) n_\tau(z,\tau) \right) dS_{z,\tau} = 0,
\end{aligned}$$

где $dS_{z,\tau}$ — элемент объема на ∂G. Пусть $q_0(z,\tau)$ — решение задачи (17.6) с начальным условием $\psi_0(z)$. Без ограничения общности считаем, что

$$\int\limits_{G_{\rm per}(0)} \psi_0(z) dz = 1. \tag{17.8}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \int\limits_{G_{\rm per}(-1)} \lambda_0 \psi_0(z) = \int\limits_{G_{\rm per}(-1)} q_0(z,-1) dz = \int\limits_{G_{\rm per}(0)} q_0(z,0) dz \\
&= \int\limits_{G_{\rm per}(0)} \psi_0(z) dz = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, положив $p(z,\tau) = q_0(z,\tau)$, мы приходим к искомому положительному решению задачи (17.4). Единственность периодического решения следует из однократности λ_0. □

Задача 17.2. Докажите единственность периодического решения.

Отметим, что нормировка (17.8) влечет равенство

$$\int\limits_{G_{\rm per}(\tau)} p(z,\tau) dz d\tau = 1,$$

которое всюду в дальнейшем считается выполненным.

Наряду с (17.6) рассмотрим неоднородную задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \tau} v - \Delta_z v = f(z,\tau) \ \text{ в } \ G \\
&\frac{\partial v}{\partial n(\tau)} v = g(z,\tau) \ \text{ на } \ \partial G, \\
&v(z,\tau) \ \text{ 1-периодична по } z \text{ и } \tau,
\end{aligned} \tag{17.9}$$

где f и g — $[0,1]^{d+1}$-периодические функции, $f \in L_2(G)$, $g \in L_2(\partial G)$.

Теорема 17.2. *Задача* (17.9) *разрешима в пространстве периодических по* z *и* τ *функций тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{G_{\rm per}} f(z,\tau)p(z,\tau)dzd\tau + \int\limits_{\partial G_{\rm per}} g(z,\tau)p(z,\tau)dS_z d\tau = 0. \tag{17.10}$$

При условии (17.10) *решение единственно с точностью до аддитивной константы и принадлежит* $L_2^{\rm per}(0,1;H^1_{\rm per}(G(\tau))) \cap L_\infty^{\rm per}(0,1;L_2^{\rm per}(G(\tau)))$.

Замечание 17.2. Краевое условие в (17.9) можно записать как

$$\frac{\partial v}{\partial n_z(\tau)}v = g(z,\tau) \ \text{ на } \ \partial G. \tag{17.11}$$

В этом случае условие согласования принимает вид

$$\int\limits_{G_{\rm per}} f(z,\tau)p(z,\tau)dzd\tau + \int\limits_{\partial G_{\rm per}} g(z,\tau)p(z,\tau)dS_{z,\tau} = 0. \tag{17.12}$$

Доказательство теоремы 17.2. Начнем с проверки необходимости условия (17.10). Для произвольного решения $v(z,\tau)$ имеем

$$\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{G_{\rm per}(1)} v(z,1)p(z,1)dz - \int\limits_{G_{\rm per}(0)} v(z,0)p(z,0)dz \\
&= \int\limits_{G_{\rm per}} \frac{\partial(v(z,\tau)p(z,\tau))}{\partial\tau}dzd\tau - \int\limits_{\partial G_{\rm per}} v(z,\tau)p(z,\tau)n_\tau(z,\tau)dS_{z,\tau} \\
&= \int\limits_{G_{\rm per}} p(z,\tau)\Delta_z v(z,\tau)dzd\tau - \int\limits_{G_{\rm per}} v(z,\tau)\Delta_z p(z,\tau)dzd\tau \\
&+ \int\limits_{G_{\rm per}} p(z,\tau)f(z,\tau)dzd\tau - \int\limits_{\partial G_{\rm per}} v(z,\tau)p(z,\tau)n_\tau(z,\tau)dS_{z,\tau}.
\end{aligned}$$

По формуле Стокса

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_{\rm per}} p(z,\tau)\Delta_z v(z,\tau)dzd\tau - \int\limits_{G_{\rm per}} v(z,\tau)\Delta_z p(z,\tau)dzd\tau \\
&= \int\limits_{\partial G_{\rm per}} \frac{\partial v(z,\tau)}{\partial n(\tau)}p(z,\tau)dS_z d\tau - \int\limits_{\partial G_{\rm per}} \frac{\partial p(z,\tau)}{\partial n(\tau)}v(z,\tau)dS_z d\tau \\
&= \int\limits_{\partial G_{\rm per}} g(z,\tau)p(z,\tau)dS_z d\tau - \int\limits_{\partial G_{\rm per}} \frac{\partial p(z,\tau)}{\partial n_z(\tau)}v(z,\tau)dS_{z,\tau}.
\end{aligned}$$

Подставив это равенство в предыдущую формулу, находим

$$\begin{aligned}
0 = &\int\limits_{G_{\rm per}} p(z,\tau)f(z,\tau)dzd\tau + \int\limits_{\partial G_{\rm per}} g(z,\tau)p(z,\tau)dS_z d\tau \\
&- \int\limits_{\partial G_{\rm per}} v(z,\tau)\Big(\frac{\partial p(z,\tau)}{\partial n_z(\tau)} + p(z,\tau)n_\tau(z,\tau)\Big)dS_{z,\tau}
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{G_{\rm per}} p(z,\tau)f(z,\tau)dzd\tau + \int\limits_{\partial G_{\rm per}} g(z,\tau)p(z,\tau)dS_z d\tau.$$

Докажем теперь достаточность условия (17.10). Пусть функции f и g удовлетворяют этому условию. На множестве $Q_+ = \{(z,\tau) \in \mathbb{R}^{d+1} : \tau > 0,\ z \in G(\tau)\}$ рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_+}{\partial \tau} + \Delta_z v_+ = f \ \text{ в } \ Q_+, \\ &\frac{\partial v_+}{\partial n(\tau)} = g \ \text{ на } \partial Q_+ \cap \{\tau > 0\}, \\ &v_+(z,0) = 0 \ \text{ в } \ G(0). \end{aligned} \tag{17.13}$$

Используя формулу Стокса, легко проверить равенство

$$\int\limits_{G_{\rm per}(0)} v_+(z,0)p(z,0)dz = \int\limits_{G_{\rm per}(1)} v_+(z,1)p(z,1)dz = 0.$$

По построению функция $p(z,1) = p(z,0)$ лежит в одномерном ядре оператора $(\mathbf{I}-S)$, где $\mathbf{I}$ — единичный оператор, а S задан в (17.7). Таким образом, $v_+(z,1)$ ортогональна одномерному ядру оператора $(\mathbf{I}-S)$. Поэтому в силу компактности S уравнение

$$(\mathbf{I} - S^*)\varphi = v_+(\cdot,1) \tag{17.14}$$

для сопряженного оператора S^* разрешимо. Покажем, что S^* есть отображение за период в задаче

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial \tau} - \Delta_z w = 0 \ \text{ в } \ Q_+, \\ &\frac{\partial w}{\partial n(\tau)} = 0 \ \text{ на } \ \partial Q_+ \cap \{\tau > 0\}, \\ &w(z,0) = \varphi \ \text{ в } \ G(0), \end{aligned} \tag{17.15}$$

т.е. $S^*\varphi = w(\cdot,1)$. Надо показать, что

$$J \stackrel{\rm def}{=} \int\limits_{G_{\rm per}(1)} \psi(z)w(z,1)dz - \int\limits_{G_{\rm per}(0)} q(z,-1)\varphi(z)dz = 0 \quad \forall \varphi, \psi \in C_{\rm per}(G(0)),$$

где по определению оператора S функции ψ и $q(z,\tau)$ суть начальное условие и решение в задаче (17.6). Применяя многократно формулу Стокса, преобразуем J следующим образом:

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_G \frac{\partial(q(z,\tau-1)w(z,\tau))}{\partial \tau} dzd\tau - \int\limits_{\partial G} q(z,\tau-1)w(z,\tau)n_\tau(z,\tau)dS_{z,\tau} \\ &= \int\limits_G q(z,\tau-1)\Delta_z w(z,\tau)dzd\tau - \int\limits_G w(z,\tau)\Delta_z q(z,\tau-1)dzd\tau \\ &- \int\limits_{\partial G} q(z,\tau-1)w(z,\tau)n_\tau(z,\tau)dS_{z,\tau} = \int\limits_{\partial G} q(z,\tau-1)\frac{\partial w(z,\tau)}{\partial n_z(\tau)}dS_{z,\tau} \\ &- \int\limits_{\partial G} w(z,\tau)\Big(\frac{\partial q(z,\tau)}{\partial n_z(\tau)} + q(z,\tau)n_\tau(z,\tau)\Big)dS_{z,\tau} = 0. \end{aligned}$$

Выбрав в качестве начального условия φ в (17.15) решение уравнения (17.14) и положив $v(z,\tau) = w(z,\tau) + v_+(z,\tau)$, получим требуемое периодическое решение задачи (17.9). Действительно, в силу (17.14), (17.15)

$$v(z,1) = w(z,1) + v_+(z,1) = S^*\varphi + (\varphi - S^*\varphi) = \varphi,$$

в то время как согласно выбору начальных условий в (17.13) и (17.15)

$$v(z,0) = \varphi + 0 = \varphi.$$

Единственность решения следует из принципа максимума (докажите!). □

17.2. Энергетические оценки. При доказательстве энергетических оценок мы будем использовать решение задачи (17.4) в качестве весовой функции. Наряду с (17.1) рассмотрим также следующую задачу с неоднородным краевым условием Неймана на границе перфорации:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \Delta v^\varepsilon = F(x,t) \ \text{ в } \ Q_T^\varepsilon, \\ &\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n^\varepsilon(t)} = h(x,t) \ \text{ на } \ \partial Q_T^\varepsilon \cap \{t>0\}, \quad v^\varepsilon(x,0) = H(x). \end{aligned} \tag{17.16}$$

Лемма 17.1. *Решение задачи* (17.1) *удовлетворяет оценке*

$$\int\limits_{Q_T^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon(x,t)|^2 dxdt + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_{G^\varepsilon(t)} (u^\varepsilon(x,t))^2 dx \leqslant C(\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} + \|q\|^2_{L_2(R^d)}). \tag{17.17}$$

Пусть $F \in L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$, $h \in L_2(\partial Q_T^\varepsilon)$, $H \in L_2(\mathbb{R}^d)$. *Тогда решение* v^ε *задачи* (17.16) *удовлетворяет оценке*

$$\int\limits_{Q_T^\varepsilon} |\nabla v^\varepsilon(x,t)|^2 dxdt + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_{G^\varepsilon(t)} (v^\varepsilon(x,t))^2 dx \leqslant C(\|F\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} + \|H\|^2_{L_2(R^d)} + \varepsilon^{-1}\|h\|^2_{L_2(\partial Q_T^\varepsilon)}). \tag{17.18}$$

Если h *в задаче* (17.16) *является следом на* ∂Q_T^ε *некоторой функции* $\widetilde{h}$ *из* $L_2(0,T;H^1(G^\varepsilon(t)))$, *то*

$$\int\limits_{Q_T^\varepsilon} |\nabla v^\varepsilon(x,t)|^2 dxdt + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_{G^\varepsilon(t)} (v^\varepsilon(x,t))^2 dx \leqslant C(\|F\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} + \|H\|^2_{L_2(R^d)} + \varepsilon^{-2}\|\widetilde{h}\|^2_{L_2(0,T;H^1(G^\varepsilon(t)))}). \tag{17.19}$$

Во всех оценках константа C *не зависит от* ε.

Доказательство. Умножим (17.16) на функцию $v^\varepsilon(x,t)p(x/\varepsilon, t/\varepsilon^2)$ и проинтегрируем полученное соотношение по множеству $Q_t^\varepsilon = \{(x,s) \in Q_T^\varepsilon : s \leqslant t\}$. Используя уравнение (17.4) и применяя многократно формулу Стокса, после простых но громоздких преобразований получим

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_t^\varepsilon} p\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial s}(v^\varepsilon)^2\,dx\,ds - \int\limits_{Q_t^\varepsilon} p\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\Big)v^\varepsilon \Delta v^\varepsilon\,dx\,ds \\ - \int\limits_{Q_t^\varepsilon} f(x,t)p\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon^2}\Big)v^\varepsilon\,dx\,ds = 1/2 \int\limits_{G^\varepsilon(t)} (v^\varepsilon(x,t))^2 p\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\,dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int\limits_{G^\varepsilon(0)} H^2(x)p\Big(\frac{x}{\varepsilon},0\Big)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial Q_t^\varepsilon}(v^\varepsilon)^2 p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)n_s^\varepsilon(x,s)dS_{x,s}^\varepsilon\\
&-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_{Q_t^\varepsilon}(v^\varepsilon)^2\Big(\frac{\partial}{\partial s}p\Big)\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\,dx\,ds+\int\limits_{Q_t^\varepsilon}p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)|\nabla v^\varepsilon|^2\,dx\,ds\\
&+\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{Q_t^\varepsilon}(\nabla_x p)\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\nabla((v^\varepsilon)^2)\,dx\,ds\\
&-\int\limits_{\partial Q_t^\varepsilon}p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)v^\varepsilon h(x,t)dS_{x,s}^\varepsilon-\int\limits_{Q_t^\varepsilon}F(x,s)v^\varepsilon p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\,dx\,ds\\
&=\frac{1}{2}\int\limits_{G^\varepsilon(t)}(v^\varepsilon(x,t))^2 p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\,dx\\
&-\frac{1}{2}\int\limits_{G^\varepsilon(0)} H^2(x)p(\frac{x}{\varepsilon},0)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial Q_t^\varepsilon}(v^\varepsilon)^2 p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)n_s^\varepsilon(x,s)dS_{x,s}^\varepsilon\\
&-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_{Q_t^\varepsilon}(v^\varepsilon)^2\Big(\frac{\partial}{\partial s}p\Big)\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\,dx\,ds+\int\limits_{Q_t^\varepsilon}p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)|\nabla v^\varepsilon|^2\,dx\,ds\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial Q_t^\varepsilon}(v^\varepsilon)^2\frac{\partial}{\partial n_s^\varepsilon}p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)dS_{x,s}^\varepsilon-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_{Q_t^\varepsilon}(v^\varepsilon)^2(\Delta p)\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\,dx\,ds\\
&-\int\limits_{\partial Q_t^\varepsilon}v^\varepsilon h(x,s)p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)dS_{x,s}^\varepsilon-\int\limits_{Q_t^\varepsilon}F(x,s)v^\varepsilon p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\,dx\,ds\\
&=\frac{1}{2}\int\limits_{G^\varepsilon(t)}(v^\varepsilon(x,t))^2 p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\,dx+\int\limits_{Q_t^\varepsilon}p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)|\nabla v^\varepsilon|^2\,dx\,ds\\
&-\frac{1}{2}\int\limits_{G^\varepsilon(0)} H^2(x)p\Big(\frac{x}{\varepsilon},0\Big)\,dx-\int\limits_{\partial Q_t^\varepsilon}v^\varepsilon h(x,s)p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)dS_{x,s}^\varepsilon\\
&-\int\limits_{Q_t^\varepsilon}F(x,s)v^\varepsilon p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

Из этого равенства с помощью оценок $0<c\leqslant p(z,\tau)\leqslant c^{-1}$ и неравенства Коши — Буняковского получаем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{G^\varepsilon(t)}(v^\varepsilon(x,t))^2dx+\int\limits_{Q_t^\varepsilon}|\nabla v^\varepsilon|^2\,dx\,ds\\
&\leqslant C(\|H\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\|v^\varepsilon\|_{L_2(\partial Q_t^\varepsilon)}\|h\|_{L_2(\partial Q_t^\varepsilon)}+\|v^\varepsilon\|_{L_2(Q_t^\varepsilon)}\|F\|_{L_2(Q_t^\varepsilon)}).
\end{aligned}
\tag{17.20}
$$

По теореме о следах [**75**] в растянутых координатах $z=x/\varepsilon$ при каждом $t\in[0,T]$ имеем $\|v^\varepsilon(\varepsilon z)\|^2_{L_2(\partial G(t))}\leqslant C\|v^\varepsilon(\varepsilon z)\|^2_{H^1(G(t))}$, что в исходных координатах x дает $\|v^\varepsilon\|^2_{L_2(\partial G^\varepsilon(t))}\leqslant C\varepsilon^{-1}\|v^\varepsilon\|^2_{H^1(G^\varepsilon(t))}$. Следовательно,

$$\|v^\varepsilon\|^2_{L_2(\partial Q^\varepsilon_t)} = \int\limits_{\partial Q^\varepsilon_t} (v^\varepsilon)^2 dS^\varepsilon_{x,s} = \int\limits_{\partial Q^\varepsilon_t} (v^\varepsilon)^2 \Big|\frac{dS^\varepsilon_{x,s}}{dS^\varepsilon_x ds}\Big| dS^\varepsilon_x ds \leqslant C_1\varepsilon^{-1} \int\limits_{\partial Q^\varepsilon_t} (v^\varepsilon)^2 dS^\varepsilon_x ds$$

$$\leqslant C_2\varepsilon^{-2} \int\limits_0^t \|v^\varepsilon\|^2_{L_2(G^\varepsilon(s))} ds = c_2\varepsilon^{-2}\|v^\varepsilon\|^2_{L_2(0,t;H^1(G^\varepsilon(s)))},$$

т.е.

$$\|v^\varepsilon\|_{L_2(\partial Q^\varepsilon_t))} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|v^\varepsilon\|_{L_2(0,t;H^1(G^\varepsilon(s)))} \tag{17.21}$$

при всех $t \in [0,T]$. Из (17.20) и (17.21) стандартным образом получаем оценку (17.18) и, как частный случай, (17.17). Оценка (17.19) выводится из (17.18) на основании неравенства (17.21) □

17.3. Формальное асимптотическое разложение. Перейдем к построению формального асимптотического разложения решения u^ε задачи (17.1). Следуя общей схеме, изложенной в §7, представим u^ε в виде асимптотического ряда

$$\begin{aligned} u^\varepsilon \sim{}& u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big) + \varepsilon\Big\{\nabla_x u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) + u_1\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\Big\} \\ &+ \varepsilon^2\Big\{\nabla_x\nabla_x u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\xi\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) \\ &+ \nabla_x u_1\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) + u_2\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\Big\} + \dots, \end{aligned} \tag{17.22}$$

в котором $\chi(z,\tau)$ и $\xi(z,\tau)$ — векторнозначные и матричнозначные $[0,1]^{d+1}$-периодические функции соответственно. Отличительной особенностью этого ряда является присутствие движущихся координат $(x - (\alpha/\varepsilon)t)$ с параметром $\alpha \in \mathbb{R}^d$, назначение которых будет объяснено ниже.

Подставляя ряд (17.22) в уравнение (17.1), используя формулы

$$\frac{\partial}{\partial x}\gamma\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\gamma(x,z) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\gamma(x,z)\Big)\Big|_{z=x/\varepsilon},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma\Big(t, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial t}\gamma(t,\tau) + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial \tau}\gamma(t,\tau)\Big)\Big|_{t=t/\varepsilon^2}$$

и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, приходим к цепочке уравнений, первое из которых имеет вид

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\chi - \Delta_z\chi\Big)\nabla_x u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big) = -\alpha\nabla_x u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big), \\ &\qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T), \quad (z,\tau) \in G \\ &\frac{\partial}{\partial n(\tau)}\chi\nabla_x u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big) + n(z,\tau)\nabla_x u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big) = 0, \\ &\qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T), \quad (z,\tau) \in \partial G. \end{aligned} \tag{17.23}$$

Задача 17.3. Выполните указанную выше подстановку и получите уравнение и краевое условие (17.23).

Поскольку u_0 не зависит от z и τ, мы приходим к задаче

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\chi - \Delta_z\chi = -\alpha \ \text{ в } \ G, \qquad \frac{\partial}{\partial n(\tau)}\chi = -n(z,\tau) \ \text{ на } \ \partial G, \tag{17.24}$$

решение которой будем искать в пространстве функций, периодических по z и τ. По теореме 17.2 эта задача разрешима тогда и только тогда, когда

$$\alpha = -\int\limits_{\partial G} p(z,\tau)n(z,\tau)dS_z d\tau, \tag{17.25}$$

что однозначно диктует нам выбор векторного параметра α.

Следующее уравнение (по переменным τ и z; переменные x и t входят в него как параметры) в цепочке имеет вид

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\xi_{ij} - \Delta_z\xi_{ij}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u_0\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big) + \frac{\partial}{\partial s}u_0\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,s\Big)\Big|_{s=t}\\
&-\Delta u_0\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big) + 2\frac{\partial}{\partial z_i}\chi_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u_0\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big)\\
&-\alpha_i\chi_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u_0\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big)+\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\chi-\Delta_z\chi\Big)\nabla_x u_1\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big)=f(x,t),\\
&\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^d\times(0,T),\ (z,\tau)\in G,\\
&\frac{\partial}{\partial n(\tau)}\xi_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u_0\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big) + n_i(z,\tau)\chi_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u_0\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big)\\
&+\frac{\partial}{\partial n(\tau)}\chi_i\frac{\partial}{\partial x_j}u_1\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big) + n_i(z,\tau)\frac{\partial}{\partial x_j}u_1\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big) = 0,\\
&\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^d\times(0,T),\ (z,\tau)\in\partial G.
\end{aligned} \tag{17.26}$$

Заметим, что в этих равенствах сумма всех членов, содержащих градиент функции u_1, равна нулю, как в уравнении, так и в краевом условии, поскольку $\chi(z,\tau)$ удовлетворяет уравнению (17.24). Условие разрешимости (согласования) этого уравнения относительно неизвестной функции $\xi_{ij}(z,\tau)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u_0\Big(x-\dfrac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big)$ переменных z и τ согласно теореме 17.2 принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial s}u_0\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,s\Big)\Big|_{s=t} - \widehat{a}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u_0\Big(x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t,t\Big) = f(x,t), \tag{17.27}$$

где усредненная матрица $\widehat{a}_{ij}$ определена формулой

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_i\int\limits_G \chi_j(z,\tau)p(z,\tau)dzd\tau + 2\int\limits_G\frac{\partial}{\partial z_j}\chi_j(z,\tau)p(z,\tau)dzd\tau\\
+\int\limits_{\partial G}\chi_j(z,\tau)n_i(z,\tau)dS_z d\tau.
\end{aligned}$$

Учитывая определения функций χ и p, можно преобразовать правую часть последнего равенства к виду

$$\widehat{a}_{ij} = \int\limits_G (\mathbf{I}+\nabla_z\chi(z,\tau))p(z,\tau)(\mathbf{I}+\nabla_z\chi(z,\tau))^* dzd\tau,$$

из которого следует положительная определенность матрицы $\widehat{a}_{ij}$.

Задача 17.4. Докажите положительную определенность матрицы $\widehat{a}_{ij}$.

17.4. Теорема усреднения.

Теорема 17.3. (i) *Пусть* $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ *и* $f \equiv 0$ *в задаче* (17.1). *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \Big\| u^\varepsilon - u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\Big\|_{L_2(Q_T^\varepsilon)} = 0, \tag{17.28}$$

где $u_0 = u_0(x,t)$ *— решение усредненной задачи Коши*

$$\frac{\partial}{\partial t}u_0 = \widehat{a}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u_0 \quad в \quad \mathbb{R}^d \times (0,T), \qquad u_0(x,0) = g(x). \tag{17.29}$$

(ii) *Если* $g \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *и* $f \equiv 0$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \Big\| u^\varepsilon - u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big) - \nabla u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big\|_{L_2(0,T;H^1(G^\varepsilon(t)))} = 0. \tag{17.30}$$

(iii) *Если правая часть в* (17.1) *имеет вид* $f(x,t) = F(x - (\alpha t)/\varepsilon, t)$, $F \in L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$, *и* $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$, *то* (17.28) *справедливо с функцией* u^0 *такой, что*

$$\frac{\partial}{\partial t}u_0 = \widehat{a}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u_0 + F(x,t), \quad u_0(x,0) = g(x). \tag{17.31}$$

(iv) *Если* $f \in L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ *не зависит от* ε *и* $\alpha \neq 0$, *то* (17.28) *и* (17.29) *остаются в силе.*

Замечание 17.3. Утверждение (i) теоремы 17.3 может быть сформулировано следующим образом: в движущихся координатах $y = x + (\alpha t)/\varepsilon$ решение $u^\varepsilon(x + (\alpha y)/\varepsilon, t)$ сходится к решению $u^0(x,t)$ задачи (17.29) в норме $L_2(0,T; L_2(G^\varepsilon(t) + (\alpha t)/\varepsilon))$. Аналогично может быть переформулировано утверждение (iii).

Замечание 17.4. Функция $U_\varepsilon^0 = u_0(x - (\alpha t)/\varepsilon, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}U_\varepsilon^0 = \widehat{a}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}U_\varepsilon^0 + \frac{\alpha}{\varepsilon}\nabla U_\varepsilon^0 = f\Big(x + \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big),$$

т.е. эффективная динамика при малых ε включает в себя большую конвекцию порядка ε^{-1} в направлении вектора α.

Замечание 17.5. Если геометрия включений обладает достаточным запасом симметрий, то $\alpha = 0$. Приведем два примера:

1) при всех t множество $G(t)$ инвариантно относительно вращений, сохраняющих куб периодов $[-1/2, 1/2]^d$,

2) для каждого движения S, сохраняющего куб периодов, найдется $t_0 > 0$ такое, что $G(t + t_0) = SG(t)$ при всех t.

Задача 17.5. Докажите, что вектор $\overline{\alpha}$, построенный выше, в условиях обоих примеров инвариантен относительно движений, сохраняющих куб периодов и, следовательно, равен нулю.

Доказательство теоремы 17.3. Пусть f и g — гладкие функции. В этом случае u_0 также гладкая функция. Обозначим

$$w^\varepsilon = u^\varepsilon - u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big) - \varepsilon\Big\{\nabla_x u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) + u_1\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\Big\}$$
$$-\varepsilon^2\Big\{\nabla_x\nabla_x u_0\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\xi\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) + \nabla_x u_1\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) + u_2\Big(x - \frac{\alpha}{\varepsilon}t, t\Big)\Big\}.$$

При подстановке w^ε в уравнение (17.1) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}w^\varepsilon - \Delta w^\varepsilon = f + \varepsilon^2 v_1^\varepsilon(x,t) \ \text{ в } \ Q_T^\varepsilon,$$
$$\frac{\partial}{\partial n^\varepsilon(t)}w^\varepsilon(x,t) = \varepsilon^3 v_2^\varepsilon(x,t) \ \text{ на } \ \partial Q_T^\varepsilon \cap \{0<t<T\},$$
$$w^\varepsilon\big|_{t=0} = g(x) + \varepsilon v_3^\varepsilon(x) \ \text{ на } \ \varepsilon G(0),$$

где $v_1^\varepsilon(x,t)$, $v_2^\varepsilon(x,t)$ и $v_3^\varepsilon(x)$ удовлетворяют оценкам

$$\|v_1^\varepsilon\|_{L_2(Q_T^\varepsilon)} \leqslant C, \quad \|v_2^\varepsilon\|_{L_2(\partial Q_T^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \quad \|v_3^\varepsilon\|_{L_2(G^\varepsilon(0))} \leqslant C,$$

что проверяется непосредственной подстановкой с использованием уравнений (17.4), (17.24) и (17.27) (проверьте!). Из (17.18) следует оценка

$$\|w^\varepsilon\|_{L_2(0,T;H^1(G^\varepsilon(t)))} \leqslant C\varepsilon.$$

Аппроксимируя функции $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ гладкими функциями $g_n \to g$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ $(H^1(\mathbb{R}^d))$ и $f_n \to f$ в $L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$, с помощью леммы 17.1 легко получить все утверждения теоремы. □

Замечание 17.6. В случае гладких данных в задаче (17.1) и гладкой границы "дырок", как в примере 17.1, можно построить полное асимптотическое разложение решения u^ε, последовательно решая уравнения цепочки, в которой мы рассмотрели только первые три уравнения.

Замечание 17.7. Имеются примеры структур, в которых $\alpha \neq 0$.

§ 18. Усреднение неавтономных параболических уравнений со случайными коэффициентами

Этот параграф посвящен усреднению неавтономных параболических уравнений со случайными коэффициентами, возникающих при описании различных явлений в средах с периодической микроструктурой, характеристики которой меняются во времени и являются случайными стационарными быстро осциллирующими процессами. Мы рассмотрим модельные задачи для операторов в дивергентной форме и для операторов с младшими членами.

Особый интерес заслуживают операторы с асимптотически растущими младшими членами. Такие операторы возникают естественным образом при автомодельном сжатии переменных, например, при изучении поведения процесса на больших временах. Поясним это на примере уравнения конвекции–диффузии

$$\frac{\partial}{\partial \tau}v(y,\tau) = \operatorname{div}(a(y,\tau)\nabla v(y,\tau)) + b(y,\tau)\nabla v(y,\tau),$$

в котором коэффициенты матричной функции $a(y,\tau)$ и вектор-функции $b(y,\tau)$ периодичны по пространственному аргументу y и являются случайными стационарными функциями времени τ. Будем изучать поведение решений на больших временах порядка ε^{-2}, где ε — малый (положительный) параметр. Вводя масштабный множитель ε и выполняя автомодельную замену переменных $x = \varepsilon y$, $t = \varepsilon^2\tau$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}v^\varepsilon(x,t) = \operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla v^\varepsilon(x,t)\Big) + \frac{1}{\varepsilon}b\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla v^\varepsilon(x,t). \tag{18.1}$$

Исходная задача сводится к изучению предельного поведения решения этого уравнения на конечном интервале времени при $\varepsilon \to 0$.

Мы рассматриваем эволюционные уравнения с частными производными параболического типа, подверженные случайным внешним воздействиям. Наша задача — изучить систематические изменения фазового состояния системы, связанные с внешними возмущениями указанного типа. Ниже показано, что в ряде случаев описать эти изменения удается с помощью аппарата стохастических дифференциальных уравнений с частными производными и связанных с ними мер на функциональных пространствах решений таких уравнений. Необходимые определения даны в §2.

Подчеркнем, что для эллиптических и параболических операторов в дивергентной форме результаты об усреднении уравнений с периодическими коэффициентами и со случайными стохастически однородными коэффициентами схожи: в обоих случаях утверждается наличие предельного оператора с постоянными коэффициентами.

Картина разительно меняется при автомодельном усреднении операторов с младшими членами. Результаты, полученные для периодических операторов с младшими членами, часто не удается обобщить на аналогичные случайные операторы. В частности, при изучении уравнения вида

$$\frac{\partial}{\partial t}v = \Delta v + \frac{1}{\varepsilon}b\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla v$$

со случайными статистически однородными коэффициентами могут наблюдаются явления супер- и субдиффузии (см. примеры в [**1, 114**]).

Уравнение (18.1) и другие уравнения, изучаемые в этом параграфе, представляет собой промежуточный случай; для них результат о п.н. сходимости решений к детерминированному пределу может не быть справедливым. Мы покажем, что при усреднении таких уравнений предельная динамика может оставаться случайной, и что решения исходной задачи сходятся по распределению в энергетическом функциональном пространстве, в то время как сходимость п.н. или по вероятности, вообще говоря, не имеет места.

18.1. Уравнения с большим потенциалом.

18.1.1. *Постановка задачи.* Начнем с изучения уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}u^\varepsilon(x,t) = \operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)\nabla u^\varepsilon(x,t)\Big) + \frac{1}{\varepsilon^{1\wedge\frac{\alpha}{2}}}g\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)u^\varepsilon(x,t) + f(x,t), \quad (18.2)$$

где $\alpha > 0$ — заданный положительный параметр, $1\wedge\frac{\alpha}{2} = \min\{1,\alpha/2\}$. Для определенности рассмотрим для этого уравнения задачу Коши в $\mathbb{R}^d\times(0,T)$ с начальным условием

$$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \quad (18.3)$$

и предположим, что $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $f \in L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$. Однако отметим, что начально-краевые задачи Дирихле и Неймана в ограниченной области могут быть исследованы теми же методами. Соответствующие результаты будут сформулированы ниже.

В важном частном случае зависимость от времени коэффициентов уравнения (18.2) управляется конечномерным стационарным диффузионным процессом ξ_s, и задача (18.2), (18.3) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}u^\varepsilon(x,t) = \operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{t}{\varepsilon^\alpha}}\Big)\nabla u^\varepsilon(x,t)\Big) + \frac{1}{\varepsilon^{1\wedge\frac{\alpha}{2}}} g\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{t}{\varepsilon^\alpha}}\Big)u^\varepsilon(x,t) + f(x,t), \qquad (18.4)$$
$$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x),$$

Сформулируем основные условия на данные задачи (18.2), (18.3).

H1. Коэффициенты $a_{ij}(y,s)$ и $g(y,s)$ периодичны по переменной y с периодом единица по каждому координатному направлению.

H2. Функции $a_{ij}(y,s)$ и $g(y,s)$ являются случайными стационарными процессами по переменной s, заданными на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, со значениями в пространстве периодических функций. Предположим, что коэффициенты $a_{ij}(y,s) = a_{ij}(y,s,\omega)$, $g(y,s) = g(y,s,\omega)$ измеримы относительно σ-алгебры $\mathscr{B}(\mathbb{T}^d)\times\mathscr{B}(-\infty,+\infty)\times\mathscr{F}$, где $\mathscr{B}$ обозначает борелевскую σ-алгебру.

Для простоты изложения считаем, что в Ω задана случайная эргодическая динамическая система T_τ и процессы $a_{ij}(y,s)$ и $g(y,s)$ представляют собой действие этой динамической системы на случайные величины $\widetilde{a}_{ij}(y)$ и $\widetilde{g}(y)$ со значениями в $L_\infty(\mathbb{T}^d)$, т.е.

$$a_{ij}(y,s,\omega) = \widetilde{a}_{ij}(y, T_s\omega), \quad g(y,s,\omega) = \widetilde{g}(y, T_s\omega). \qquad (18.5)$$

Определения случайной динамической системы и эргодичности были даны в §2.

H3. *Равномерная параболичность*:

$$\lambda^{-1}|\zeta|^2 \leqslant a_{ij}(y,\tau)\zeta_i\zeta_j \leqslant \lambda|\zeta|^2, \quad \lambda > 0, \qquad |g(y,s)| \leqslant \lambda$$

при всех y, τ и $\zeta \in \mathbb{R}^d$.

H4. *Центрирование.* Полное среднее функции $g(z,s)$ равно нулю, т.е.

$$\langle \overline{g} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \int\limits_{[0,1]^d} g(z,s)dz = 0 \quad \forall\ s.$$

Еще одно условие будет задано в терминах коэффициентов перемешивания. Напомним определения из §2.

Пусть ξ_s — произвольный стационарный случайный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Обозначим через $\mathscr{F}_{\leqslant t}$ σ-алгебру, порожденную процессом ξ_s при всех $s \leqslant t$, а через $\mathscr{F}_{\geqslant t}$ – σ-алгебру, порожденную ξ_s при всех $s \geqslant t$. Иными словами, $\mathscr{F}_{\leqslant t}$ ($\mathscr{F}_{\geqslant t}$) — это минимальная σ-алгебра, относительно которой процесс ξ_s измерим при всех $s \leqslant t$ ($s \geqslant t$). Существование такой σ-алгебры хорошо известно в теории меры.

Коэффициент сильного перемешивания процесса ξ_s — это функция

$$\varkappa(\gamma) = \sup_{E_1\in\mathscr{F}_{\leqslant t},\, E_2\in\mathscr{F}_{\geqslant(t+\gamma)}} |\mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2) - \mathbf{P}(E_1\cap E_2)|,$$

где супремум берется по всем E_1 и E_2, измеримым относительно $\mathscr{F}_{\leqslant t}$ и $\mathscr{F}_{\geqslant(t+\gamma)}$ соответственно. Ввиду стационарности процесса выражение в правой части не зависит от t; в частности, в качестве t можно выбрать 0. Коэффициенты равномерного перемешивания $\varphi(\gamma)$ и максимальной корреляции

$\rho(\gamma)$ определяются формулами

$$\varphi(\gamma) = \sup_{\substack{E_1 \in \mathscr{F}_{\leqslant t},\ E_2 \in \mathscr{F}_{\geqslant (t+\gamma)} \\ \mathbf{P}(E_2) \neq 0}} \left| \mathbf{P}(E_1) - \frac{\mathbf{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbf{P}(E_2)} \right|,$$

$$\rho(\gamma) = \sup_{\eta_1,\, \eta_2} \left| \frac{\mathbf{E}((\eta_1 - \mathbf{E}\eta_1)(\eta_2 - \mathbf{E}\eta_2))}{\sqrt{\mathbf{E}\eta_1^2\, \mathbf{E}\eta_2^2}} \right|,$$

$$\eta_1 \in L_2(\Omega, \mathscr{F}_{\leqslant t}, \mathbf{P}),\ \eta_2 \in L_2(\Omega, \mathscr{F}_{\geqslant (t+\gamma)}, \mathbf{P}).$$

Построим σ-алгебры $\mathscr{F}_{\leqslant t}$ и $\mathscr{F}_{\geqslant t}$, порожденные набором коэффициентов оператора (18.2), и соответствующие коэффициенты перемешивания, и потребуем, чтобы было выполнено следующее условие.

H5. *Перемешивание.* Справедливо хотя бы одно из следующих соотношений:

$$\int_0^\infty \varkappa(\gamma) d\gamma < \infty, \quad \int_0^\infty \sqrt{\varphi(\gamma)} d\gamma < \infty, \quad \int_0^\infty \rho(\gamma) d\gamma < \infty$$

Замечание 18.1. Для стационарного процесса $\{a_{ij}(s), g(s)\}$ общего вида со значениями в $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ (и тем самым в $L_2(\mathbb{T}^d)$) приведем пример построения эквивалентного процесса над новым вероятностным пространством $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathbf{P}})$ с действием динамической системы $\widetilde{T}_\tau$ так, что $\{\widetilde{a}_{ij}(s), \widetilde{g}(s)\} = \widetilde{T}_s(\{a_{ij}(0), g(0)\})$. Для простоты изложения считаем, что процесс $\{a_{ij}(s), g(s)\}$ непрерывен по s как функция со значениями в $L_2(\mathbb{T}^d)$.

Введем вероятностное пространство $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathbf{P}})$, которое состоит из $\widetilde{\Omega} = (C(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{T}^d)^{(n^2+1)}))$ с топологией равномерной сходимости на компактах по первому аргументу, борелевской σ-алгебры на нем и вероятностной меры $\widetilde{\mathbf{P}}$, определяемой равенством $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathscr{A}) = \mathbf{P}\{(\{a_{ij}(\cdot)\}, g(\cdot)) \in \mathscr{A}\}$. При наших предположениях отображение $(\{a_{ij}(\cdot)\}, g(\cdot)) : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ измеримо, поэтому определение меры $\widetilde{\mathbf{P}}$ корректно. На $\widetilde{\Omega}$ зададим функции $a_{ij}(s, \widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}_{ij}(s)$, $g(s, \widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}_{(n^2+1)}(s)$. Из определения $\widetilde{\mathbf{P}}$ легко следует, что эти случайные функции имеют те же конечномерные распределения, что и исходные коэффициенты (проверьте!). В новом вероятностном пространстве $\widetilde{\Omega}$ введем группу $\widetilde{T}_\tau$ сдвигов второго аргумента: $\widetilde{T}_\tau(\widetilde{\omega}(y, s) = \widetilde{\omega}(y, s+\tau)$.

Задача 18.1. Проверьте, что при наших предположениях эта группа преобразований сохраняет меру $\widetilde{\mathbf{P}}$, непрерывна и эргодична.

Замечание 18.2. Условие **H4** в действительности не является ограничением, оно всегда может быть достигнуто посредством замены неизвестной функции вида $\widetilde{u}^\varepsilon(x,t) = \exp(\langle \overline{g} \rangle / \varepsilon) u(x,t)$, где $\langle \overline{g} \rangle$ — полное среднее g. Если $\langle \overline{g} \rangle \neq 0$, то усреднение происходит на фоне экспоненциального роста или убывания.

Условия **H1**–**H3** обеспечивают при каждом $\varepsilon > 0$ корректность исходной задачи Коши.

Лемма 18.1. *При условиях* **H1**–**H3** *при каждом* $\varepsilon > 0$ *задача* (18.2), (18.3) *однозначно разрешима для всех* $\omega \in \Omega$, *и ее решение есть измеримое*

отображение $u^\varepsilon : (\Omega, \mathscr{F}) \to (L_2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)) \cap C((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)), \mathscr{B})$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$\|u^\varepsilon\|_{C((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} + \|u^\varepsilon\|_{L_2((0,T);H^1(\mathbb{R}^d))} \leqslant C(\varepsilon). \tag{18.6}$$

Доказательство. Однозначная разрешимость и априорная оценка (18.6) могут быть получены стандартными методами теории параболических уравнений. Измеримость решения легко выводится из непрерывной зависимости решения от данных задачи. □

18.1.2. *Факторизация уравнения.* Исследование асимптотического поведения решения задачи (18.2), (18.3) можно существенно упростить с помощью факторизации. Представим решение u^ε в виде произведения

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x,t) &= v^\varepsilon(x,t) \exp\biggl(\frac{1}{\varepsilon^{1\wedge\frac{\alpha}{2}}} \int\limits_0^t \langle g\rangle\Bigl(\frac{s}{\varepsilon^\alpha}\Bigr) ds \biggr), \\ \langle g\rangle(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{[0,1]^d} g(z,s)dz. \end{aligned} \tag{18.7}$$

Непосредственно проверяется, что функция v^ε удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v^\varepsilon(x,t) &= \operatorname{div}\Bigl(a\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Bigr) \nabla v^\varepsilon(x,t)\Bigr) + \frac{1}{\varepsilon^{1\wedge\frac{\alpha}{2}}} \widetilde{g}\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Bigr) v^\varepsilon(x,t) \\ &\quad + f(x,t) \exp\biggl(-\frac{1}{\varepsilon^{1\wedge\frac{\alpha}{2}}} \int\limits_0^t \langle g\rangle\Bigl(\frac{s}{\varepsilon^\alpha}\Bigr) ds \biggr), \\ v^\varepsilon(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{18.8}$$

где $\widetilde{g}(z,s)$ обозначает функцию $g(z,s) - \langle g\rangle(s)$. Уравнение (18.8) будет исследовано ниже, а сейчас мы переходим к изучению экспоненциального множителя в (18.7).

Лемма 18.2. *Пусть выполнено хотя бы одно из неравенств* **H5**. *Тогда при* $\alpha \leqslant 2$ *процесс*

$$\zeta_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{1\wedge\frac{\alpha}{2}}} \int\limits_0^t \langle g\rangle\Bigl(\frac{s}{\varepsilon^\alpha}\Bigr) ds \tag{18.9}$$

удовлетворяет функциональной центральной предельной теореме (принципу инвариантности) с нулевым средним и диффузией, задаваемой выражением

$$\sigma^2 = 2 \int\limits_0^\infty \mathbf{E}(\langle g\rangle(0)\langle g\rangle(s)) ds, \tag{18.10}$$

т.е. $\{\zeta_t^\varepsilon\}$ *сходится по распределению в пространстве непрерывных функций* $C[0,\infty)$ *к процессу* $\{\sigma W_t\}$, *где* W_t *— стандартный винеровский процесс. Если* $\alpha > 2$, *то* $\{\zeta_\cdot^\varepsilon\}$ *сходится к нулю п.н. равномерно на компактах.*

Первое утверждение леммы, функциональная центральная предельная теорема для стационарных процессов с хорошими свойствами перемешивания, — это один из классических результатов теории стационарных процессов (см. §2). Доказательство этого утверждения имеется, например, в [**76**, гл. 9]. Второе утверждение легко следует из первого.

В случае $\alpha \leqslant 2$ простым следствием леммы 18.2 является сходимость по распределению

$$\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2}}\int\limits_0^t \langle g\rangle\Big(\frac{s}{\varepsilon^\alpha}\Big)ds\Big) \xrightarrow{\mathscr{L}} \exp(\sigma W_t) \tag{18.11}$$

в пространстве $C[0,\infty)$. При $\alpha > 2$ п.н. имеет место равномерная сходимость на компактах

$$\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\langle g\rangle\Big(\frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)\Big) \to 1. \tag{18.12}$$

18.1.3. *Априорные оценки для факторизованного уравнения.* Нам понадобятся априорные оценки для уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}z^\varepsilon(x,t) &= \operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)\nabla z^\varepsilon(x,t)\Big)\\ &\quad+\frac{1}{\varepsilon^{1\wedge\frac{\alpha}{2}}}\widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)z^\varepsilon(x,t)+h(x,t),\qquad z^\varepsilon(x,0)=z_0(x),\end{aligned} \tag{18.13}$$

которое отличается от (18.8) наличием правой части общего вида.

Предложение 18.1. *Для решения задачи* (18.13) *справедлива априорная оценка*

$$\begin{aligned}&\|z^\varepsilon\|_{L_\infty((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}+\|z^\varepsilon\|_{L_2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))}\\ &\qquad\leqslant C(\|z_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\|h\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))}),\end{aligned} \tag{18.14}$$

где константа C не зависит от ε.

Доказательство. По построению функция $\widetilde{g}(y,s)$ имеет нулевое среднее по периоду при каждых s и ω. Поэтому уравнение $\Delta\widetilde{Q}=\widetilde{g}$ разрешимо в пространстве периодических функций. Обозначим $\widetilde{q}=\nabla_y\widetilde{Q}$. В силу равномерной ограниченности $\widetilde{g}$ выполнена оценка $|\widetilde{q}(y,s)|\leqslant C$ (проверьте!). Тем самым построено равномерно ограниченное решение уравнения $\operatorname{div}_y\widetilde{q}(y,s)=\widetilde{g}(y,s)$, которое в координатах $x=\varepsilon y$, $t=\varepsilon^2 s$ имеет вид

$$\varepsilon\operatorname{div}_x\widetilde{q}^\varepsilon(x,t)=\widetilde{g}^\varepsilon(x,t); \tag{18.15}$$

здесь и далее для произвольной функции $F(y,s)$ используем обозначения

$$\begin{aligned}&F^\varepsilon(x,t)=F\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big),\\ &\frac{\partial}{\partial y_i}F^\varepsilon(x,t)=\frac{\partial}{\partial y_i}F\Big(y,\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big|_{y=x/\varepsilon},\\ &\frac{\partial}{\partial s}F^\varepsilon(x,t)=\frac{\partial}{\partial s}F\Big(\frac{x}{\varepsilon},s\Big)\Big|_{s=t/\varepsilon^2}\end{aligned} \tag{18.16}$$

Умножим уравнение (18.13) на z^ε и проинтегрируем результат на множестве $\mathbb{R}^d\times(0,T)$. Это дает

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^d}(z^\varepsilon(x,t))^2dx-\int\limits_{\mathbb{R}^d}(z_0(x))^2dx\\ &=-\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}a_{ij,\varepsilon}(x,\tau)\nabla z^\varepsilon(x,\tau)\cdot\nabla z^\varepsilon(x,\tau)\,dxd\tau\end{aligned}$$

$$+\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widetilde{g}_\varepsilon(x,\tau)(z^\varepsilon(x,\tau))^2dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}z^\varepsilon(x,\tau)h(x,\tau)\,dxd\tau.$$

Далее, используя (18.15) и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^d}(z^\varepsilon(x,t))^2dx+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}a_{ij,\varepsilon}(x,\tau)\nabla z^\varepsilon(x,\tau)\cdot\nabla z^\varepsilon(x,\tau)\,dxd\tau\\&=\int\limits_{\mathbb{R}^d}(z_0(x))^2dx+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}z^\varepsilon(x,\tau)\widetilde{q}_\varepsilon(x,\tau)\cdot\nabla z^\varepsilon(x,\tau)dxd\tau\\&+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}z^\varepsilon(x,\tau)h(x,\tau)\,dxd\tau.\end{aligned}\tag{18.17}$$

Обозначим правую часть этого равенства через $R^\varepsilon(t)$. При каждом $\gamma>0$ она удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned}|R^\varepsilon(t)|&\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^d}(z_0(x))^2dx+\gamma^{-1}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}|z^\varepsilon(x,\tau)\widetilde{q}_\varepsilon(x,\tau)|^2dxd\tau\\&+\gamma\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\nabla z^\varepsilon(x,\tau)|^2dxd\tau+\int\limits_0^t\|z^\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|h(\cdot,\tau)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}d\tau\\&\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^d}(z_0(x))^2dx+C\gamma^{-1}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}|z^\varepsilon(x,\tau)|^2dxd\tau+\gamma\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\nabla z^\varepsilon(x,\tau)|^2dxd\tau\\&+\gamma^{-1}\int\limits_0^t\|h(\cdot,\tau)\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}d\tau+\gamma\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|z^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2+|\nabla z^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2)\,dxd\tau.\end{aligned}$$

Осталось выбрать γ достаточно малым и подставить это неравенство в (18.17), после чего (18.14) следует из леммы Гронуолла. □

18.1.4. *Вспомогательные задачи.* Для перехода к пределу в уравнении (18.8) нам понадобится набор вспомогательных задач, являющихся по сути "ячеичными" задачами для (18.8). В этом разделе мы введем вспомогательные уравнения и изучим их свойства.

Обозначим $A=\dfrac{\partial}{\partial y_i}a_{ij}(y,s)\dfrac{\partial}{\partial y_j}$ и рассмотрим в цилиндре $\mathbb{T}^d\times(-\infty,+\infty)$ два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s}\chi^j(y,s)-A\chi^j(y,s)=\frac{\partial}{\partial y_i}a_{ij}(y,s),\tag{18.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}G(y,s)-AG(y,s)=\widetilde{g}(y,s).\tag{18.19}$$

Предложение 18.2. *Уравнения* (18.18) *и* (18.19) *имеют стационарные решения в классе* $L_\infty((-\infty,+\infty);C(\mathbb{T}^d))\cap L_2^{\mathrm{loc}}((-\infty,+\infty);H^1(\mathbb{T}^d))$. *Для каждого из этих уравнений стационарное решение единственно с*

точностью до аддитивной константы. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\|\chi\|_{L_2((N,N+1);H^1(\mathbb{T}^d))} \leqslant C, \quad \|\chi\|_{L_\infty((-\infty,\infty);L_2(\mathbb{T}^d))} \leqslant C, \\ &\|G\|_{L_2((N,N+1);H^1(\mathbb{T}^d))} \leqslant C, \quad \|G\|_{L_\infty((-\infty,\infty);L_2(\mathbb{T}^d))} \leqslant C, \end{aligned} \tag{18.20}$$

равномерные по $N \in \mathbb{R}$, *причем константа* C *неслучайна и зависит только от величины* λ *в условии* **H3**.

Доказательство. Выберем для определенности уравнение (18.18) и покажем существование стационарного решения. С этой целью рассмотрим последовательность задач Коши вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s}\chi_N^j(y,s) - A\chi_N^j(y,s) = \frac{\partial}{\partial y_i}a_{ij}(y,s)\mathbf{1}_{[N,N+1)}(s), \\ &\qquad\qquad (y,s) \in \mathbb{T}^d \times (N,+\infty), \\ &\chi_N^j(y,N) = 0. \end{aligned} \tag{18.21}$$

При $s < N$ доопределим решения $\chi_N^j(y,s)$ нулем. В силу известных оценок Нэша (см. [**72**]) функция χ_N^j непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$\|\chi_N^j\|_{L_\infty((-\infty,N+1]\times\mathbb{T}^d)} \leqslant c_1(\lambda).$$

Поскольку правая часть в (18.21) обращается в нуль при $s > N+1$, по принципа максимума последняя оценка верна при всех s:

$$\|\chi_N^j\|_{L_\infty((-\infty,+\infty)\times\mathbb{T}^d)} \leqslant c_1(\lambda).$$

Надо показать, что $\chi_N^j(y,s)$ экспоненциально затухает при $(s-N) \to \infty$.

Лемма 18.3. *Найдутся детерминированные не зависящие от* N *константы* $c_2(\lambda) > 0$ *и* $c_3(\lambda) > 0$ *такие, что*

$$|\chi_N^j(y,s)| \leqslant c_2 \exp(-c_3(s-N)). \tag{18.22}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \chi_N^j(y,s)dy = 0 \tag{18.23}$$

при каждом $s \in \mathbb{R}$. Действительно, интегрируя уравнения (18.18) по цилиндру $(s_1,s_2)\times\mathbb{T}^d$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \chi_N^j(y,s_1)dy = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \chi_N^j(y,s_2)dy.$$

Отсюда следует требуемое равенство, поскольку $\chi_N^j(y,N) = 0$.

В силу (18.23) к функции $\chi_N^j(\cdot,s)$ применимо при каждом s неравенство Пуанкаре. В совокупности с **H3** это дает

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{T}^d} a_{ij}(y,s)\frac{\partial}{\partial y_i}\chi_N^k(y,s)\frac{\partial}{\partial y_j}\chi_N^k(y,s)dy &\geqslant \lambda^{-1}\int\limits_{\mathbb{T}^d} |\nabla_y\chi_N^k(y,s)|^2 dy \\ &\geqslant c_4\lambda^{-1}\int\limits_{\mathbb{T}^d} |\chi_N^k(y,s)|^2 dy. \end{aligned} \tag{18.24}$$

Умножая (18.18) на $\chi_N^j(y,s)$ и интегрируя полученное равенство по цилиндру $(\mathbb{T}^d \times (s_1, s_2)$, находим

$$\|\chi_N^k(\cdot,s_2)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)} - \|\chi_N^k(\cdot,s_1)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)} \leqslant -c_4\lambda^{-1}\int\limits_{s_1}^{s_2} \|\chi_N^k(\cdot,s)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)}ds \quad (18.25)$$

при всех s_1 и s_2 таких, что $N+1 \leqslant s_1 \leqslant s_2$.

Задача 18.2. Докажите, что при условии (18.25) $\|\chi_N^k(\cdot,s)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)}$ монотонно убывает при $s \geqslant N+1$ и удовлетворяет оценке

$$\|\chi_N^k(\cdot,s)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)} \leqslant c_2\exp(-c_3(s-(N+1))$$

Осталось применить оценку Нэша. □

Определим функцию $\chi(y,s)$ формулой

$$\chi^k(y,s) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \chi_N^k(y,s). \quad (18.26)$$

По построению и в силу леммы 18.3 очевидно, что $\chi^j(y,s)$ является решением уравнения (18.18) и удовлетворяет оценке (18.20). Проверим стационарность этого решения. Инвариантность любого конечномерного распределения относительно целочисленных сдвигов следует из построения и стационарности коэффициентов $a_{ij}(\cdot,s)$. Далее, мы можем повторить приведенную выше процедуру построения решения, используя вместо целочисленного разбиения оси времени разбиение с рациональным шагом вида $q = 1/l$. Вновь построенное решение совпадает с $\chi(y,s)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно объединить соответствующие вспомогательные решения в блоки длины l и использовать единственность решения задачи Коши. Отсюда следует инвариантность конечномерных распределений относительно всех рациональных сдвигов, что, в свою очередь, влечет стационарность.

Единственность стационарного решения с точностью до (вообще говоря, случайной) константы может быть доказана так же, как лемма 18.3. Действительно, если предположить существование двух различных стационарных решений с нулевым средним по тору, то их разность будет экспоненциально затухать при $s \to \infty$, что противоречит стационарности. Предложение доказано. □

Выбор аддитивной константы для решений $\chi^k(y,s)$ и $G(y,s)$ может быть зафиксирован с помощью условий нормировки:

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \chi^j(y,s)dy = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{T}^d} G(y,s)dy = 0, \quad (18.27)$$

которые всюду в дальнейшем предполагаются выполненными. Отметим, что условия (18.27) корректны, поскольку, как мы видели при доказательстве предложения 18.2, соответствующие интегралы не зависят от s.

Положим $\widetilde{\chi}^k(y,\omega) = \chi^k(y,0,\omega)$ и $\widetilde{G}(y,\omega) = G(y,0,\omega)$. Корректность этого определения следует из непрерывности $\chi^k(y,s)$ и $G(y,s)$ по s.

Поскольку по определению $a_{ij}(y,s+\tau,\omega) = a_{ij}(y,s,T_\tau\omega)$, в силу единственности решения задачи (18.18) имеем $\chi^k(y,s+\tau,\omega) = \chi^k(y,s,T_\tau\omega)$. В частности, $\chi^k(y,s,\omega) = \chi^k(y,0,T_s\omega) = \widetilde{\chi}^k(y,T_s\omega)$. Аналогично $G(y,s,\omega) = G(y,0,T_s\omega) = \widetilde{G}(y,T_s\omega)$.

В дальнейшем нам понадобятся еще два семейства вспомогательных функций. Первое из них при каждом $s \in \mathbb{R}$ найдем из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(y,s) \frac{\partial}{\partial y_j} \psi^k(y,s) = -\frac{\partial}{\partial y_i} a_{ik}(y,s). \tag{18.28}$$

Существование и единственность периодических решений таких задач обсуждались в §7. Напомним, что эти задачи разрешимы при каждых $s \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \Omega$, поскольку среднее по периоду правых частей обращается в нуль. Решения $\psi^k(y,s)$ определены однозначно с точностью до аддитивной случайной функции аргумента s, служащего в (18.28) параметром.

Чтобы построить второе семейство, определим сначала функции

$$\overline{a}_{ij}(y) = \mathbf{E} a_{ij}(y,s), \quad \overline{g}(y) = \mathbf{E}\widetilde{g}(y,s) = \mathbf{E} g(y,s), \tag{18.29}$$

которые не зависят от s в силу стационарности случайных функций a_{ij} и g. После этого найдем $\overline{\psi}^k(y)$ и $\overline{G}(y)$ из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \overline{a}_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \overline{\psi}^k(y) = -\frac{\partial}{\partial y_i} \overline{a}_{ik}(y), \tag{18.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \overline{a}_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \overline{G}(y) = -\overline{g}(y). \tag{18.31}$$

18.1.5. *Усреднение факторизованного уравнения. I. Случай $f = 0$.* В этом разделе мы исследуем частный случай однородного уравнения (18.2), т.е. положим $f = 0$ в (18.2) и покажем, что для факторизованной задачи (18.8) при каждом $\alpha > 0$ справедлив п.н. результат об усреднении. Однако процедура построения коэффициентов предельного оператора, и даже вид этого оператора, зависят от выбора α. В связи с этим рассмотрим независимо три случая: $0 < \alpha < 2$, $\alpha > 2$ и критический случай $\alpha = 2$.

При $\alpha = 2$ справедлив следующий результат.

Теорема 18.1. *Пусть $\alpha = 2$ и $f = 0$. Тогда решения v^ε задачи* (18.8) *сходятся п.н. при $\varepsilon \to 0$ в пространстве $L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))$ к решению задачи Коши*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} v^0(x,t) = \operatorname{div}(\widehat{a}\nabla v^0(x,t)) + \widehat{b}\cdot\nabla v^0(x,t) + \widehat{G} v^0(x,t), \\ &v^0(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{18.32}$$

с постоянными коэффициентами

$$\widehat{a}_{ij} = \mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{T}^d} a_{ik}(y,s)\Big(\delta_{kj} + \frac{\partial}{\partial y_k}\chi^j(y,s)\Big)\,dy, \tag{18.33}$$

$$\widehat{b}_i = \mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Big(\widetilde{g}(y,s)\chi^i(y,s) + a_{ij}(y,s)\frac{\partial}{\partial y_j} G(y,s)\Big)\,dy, \tag{18.34}$$

$$\widehat{G} = \mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \widetilde{g}(y,s) G(y,s)\,dy. \tag{18.35}$$

Сформулируем аналогичные результаты для других значений α.

Теорема 18.2. *Пусть $\alpha < 2$ и $f = 0$. Тогда решения v^ε задачи* (18.8) *сходятся по вероятности при $\varepsilon \to 0$ в пространстве $L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))$ к*

решению задачи Коши (18.32) *с постоянными коэффициентами*

$$\widehat{a}_{ij} = \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{T}^d} a_{ik}(y,s)\Big(\delta_{kj} + \frac{\partial}{\partial y_k}\psi^j(y,s)\Big)dy, \tag{18.36}$$

$$\widehat{b} = 0, \quad \widehat{G} = 0. \tag{18.37}$$

Теорема 18.3. *Пусть* $\alpha > 2$ *и* $f = 0$. *Тогда решения* v^ε *задачи* (18.8) *сходятся по вероятности при* $\varepsilon \to 0$ *в пространстве* $L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))$ *к решению задачи Коши* (18.32) *с постоянными коэффициентами*

$$\widehat{a}_{ij} = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \overline{a}_{ik}(y)\Big(\delta_{kj} + \frac{\partial}{\partial y_k}\overline{\psi}^j(y)\Big)dy, \tag{18.38}$$

$$\widehat{b} = 0, \quad \widehat{G} = \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \overline{g}(y)\overline{G}(y)dy. \tag{18.39}$$

Доказательство теоремы 18.1. С помощью (18.15) перепишем уравнение (18.8) в виде (напомним, что $f = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial t}v^\varepsilon(x,t) = \operatorname{div}(a^\varepsilon(x,t)\nabla v^\varepsilon(x,t)) + \operatorname{div}(\widetilde{q}^\varepsilon(x,t)v^\varepsilon(x,t)) - \widetilde{q}^\varepsilon(x,t)\nabla v^\varepsilon(x,t).$$

Принимая во внимание оценки (18.14), приходим к неравенству

$$\|\partial_t v^\varepsilon\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^n))} \leqslant C. \tag{18.40}$$

По теореме 5.1 из [**73**] семейство $\{v^\varepsilon\}$ компактно в $L_2(0,T;L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n))$.

При доказательстве сходимости предположим сначала, что $u_0 \in C_0^\infty$, так что решение v^0 задачи (18.32) бесконечно дифференцируемо и при $|x| \to \infty$ убывает экспоненциально вместе с производными любого порядка. Введем обозначения

$$\check{a}_{ij}(s) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} a_{ik}(y,s)\Big(\delta_{kj} + \frac{\partial}{\partial y_k}\chi^j(y,s)\Big)dy,$$

$$\check{b}_i(s) = \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \Big(\widetilde{g}(y,s)\chi^i(y,s) + a_{ij}(y,s)\frac{\partial}{\partial y_j}G(y,s)\Big)dy,$$

$$\check{G}(s) = \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \widetilde{g}(y,s)G(y,s)dy.$$

Подставим выражение

$$\check{v}^\varepsilon(x,t) = v^0(x,t) + \varepsilon\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\cdot\nabla v^0 + \varepsilon G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)v^0$$

в (18.8). В силу (18.18), (18.19), после несложных преобразований находим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\check{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t)) - \operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla(\check{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t))\Big)\\
&- \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)(\check{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t))\\
&= \frac{\partial}{\partial t}v^0 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial s}\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_k}v^0 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial s}G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)v^0 + \varepsilon\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_k}v^0\\
&+ \varepsilon G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial t}v^0 - a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v^0 - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}v^0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)v^0 - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_j}\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_k}v^0\\
&- a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_i}\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}v^0 - \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}v^0\\
&- \varepsilon a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^3}{\partial x_k\partial x_i\partial x_j}v^0 - \widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_k}v^0\\
&- \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_j}G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)v^0 - a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_i}G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}v^0\\
&- \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\Big(\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}v^0 - \varepsilon a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v^0\\
&- \widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)v^0\\
&= \frac{\partial}{\partial t}v^0 - a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v^0 - a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_i}\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}v^0\\
&- \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}v^0 - \widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_k}v^0\\
&- a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_i}G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}v^0 - \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}v^0\\
&- \widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)v^0 + \varepsilon\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_k}v^0 + \varepsilon G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial t}v^0\\
&- \varepsilon a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^3}{\partial x_k\partial x_i\partial x_j}v^0 - \varepsilon a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v^0.
\end{aligned}
$$

Подставим правую часть уравнения (18.32) вместо $\dfrac{\partial}{\partial t}v^0$ и перегруппируем члены в полученном соотношении:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\check{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t)) - \operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla(\check{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t))\Big)\\
&- \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)(\check{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t))\\
&= \Big[\Big(\widehat{a}_{ij} - \check{a}_{ij}\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v^0 + \Big(\widehat{b}_i - \check{b}_i\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}v^0 + \Big(\widehat{G} - \check{G}\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)v^0\Big]\\
&+ \Big\{\check{a}_{ij}\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big) - a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big) - a_{ik}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_k}\chi^j\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\\
&- \frac{\partial}{\partial y_k}\Big(a_{kj}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^i\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\Big\}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v^0\\
&+ \Big\{\check{b}_i\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big) - \widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^j\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big) - a_{ji}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_i}G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\\
&- \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\Big\}\frac{\partial}{\partial x_j}v^0 + \Big\{\check{G}\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big) - \widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big\}v^0\\
&+ \varepsilon\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_k}v^0 + \varepsilon G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial t}v^0\\
&- \varepsilon a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^3}{\partial x_k\partial x_i\partial x_j}v^0 - \varepsilon a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v^0.
\end{aligned}
$$

Выражение в правой части, заключенное в квадратные скобки, обозначим через R_1^ε, а сумму всех остальных членов — через R_2^ε. Поскольку выражения в фигурных скобках периодичны по пространственным переменным и имеют нулевое среднее при всех значениях t, для каждого из них справедливо представление вида (18.15) и R_2^ε принимает вид

$$\begin{aligned} R_2^\varepsilon &= \varepsilon \operatorname{div}_x \varkappa_{1,ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}v^0 + \varepsilon \operatorname{div}_x \varkappa_{2,i}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}v^0 \\ &+ \varepsilon \operatorname{div}_x \varkappa_3\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)v^0 + \varepsilon \chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_k}v^0 + \varepsilon G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial t}v^0 \\ &- \varepsilon a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^3}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}v^0 \\ &- \varepsilon a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)G\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}v^0, \end{aligned} \tag{18.41}$$

причем функции $\varkappa_{1,ij}(y,s)$, $\varkappa_{2,i}(y,s)$ и $\varkappa_3(y,s)$ периодичны по y и удовлетворяют оценкам

$$\|\varkappa_{1,ij}\|_{L_2((s,s+1)\times\mathbb{T}^d)} \leqslant C, \quad \|\varkappa_{2,i}\|_{L_2((s,s+1)\times\mathbb{T}^d)} \leqslant C, \quad \|\varkappa_3\|_{L_2((s,s+1)\times\mathbb{T}^d)} \leqslant C$$

равномерно по $s \in \mathbb{R}$. Отсюда благодаря свойствам гладкости функции v^0 и ее убывания на бесконечности следует оценка

$$\|R_2^\varepsilon\|_{L_2((0,T);H^{-1}(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon,$$

с помощью которой получаем неравенство

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} R_2^\varepsilon(\check{v}^\varepsilon - v^\varepsilon)\,dxdt\Big| \leqslant C\varepsilon. \tag{18.42}$$

Оценим вклад R_1^ε. По теореме Биркгофа функции $(\widehat{a}_{ij} - \check{a}_{ij}(t/\varepsilon^2))$, $(\widehat{b}_i - \check{b}_i(t/\varepsilon^2))$ и $(\widehat{G} - \check{G}(t/\varepsilon^2))$ сходятся п.н. к нулю слабо в пространстве $L_2(0,T)$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует, что R_1^ε сходится к нулю слабо в $L_2(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))$.

Задача 18.3. Докажите, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} R_1^\varepsilon(\check{v}^\varepsilon - v^\varepsilon)\,dxdt\Big| = 0 \quad ... \tag{18.43}$$

Указание. Воспользуйтесь компактностью семейства $\{(\check{v}^\varepsilon - v^\varepsilon)\}$ в пространстве $C(0,T;L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$, быстрым убыванием на бесконечности функции v^0 и ее производных и слабой сходимостью R_1^ε к нулю.

Умножая уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\check{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t)) - \operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla(\check{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t))\Big) \\ &- \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)(\check{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t)) = R_1^\varepsilon + R_2^\varepsilon \end{aligned}$$

на $(\check{v}^\varepsilon - v^\varepsilon)$ и используя (18.42), (18.43), а также очевидное неравенство

$$\|\check{v}^\varepsilon(\cdot,0) - v^0(\cdot,0)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon,$$

теми же методами, что при доказательстве предложения 18.1, устанавливаем, что п.н. имеет место сходимость

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\|\check{v}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L_2((0,T);H^1(\mathbb{R}^d))} + \|\check{v}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L_\infty((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\big) = 0. \tag{18.44}$$

что завершает доказательство для гладких финитных начальных условий.

Для начального условия общего вида $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$ сходимость легко установить с помощью аппроксимации. Действительно, пусть $u_0^\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ такая, что $\|u_0^\delta - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta$. Решение задачи (18.8) с начальным условием u_0^δ обозначим $v^{\delta,\varepsilon}$. Согласно предложению 18.1 имеем

$$\|v^{\delta,\varepsilon} - v^\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\delta.$$

Ясно также, что

$$\|v^{\delta,0} - v^0\|_{L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\delta.$$

По доказанному выше $v^{\delta,\varepsilon}$ сходится к $v^{\delta,0}$ в пространстве $L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))$. Поэтому

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|v^\varepsilon - v^0\|_{L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\delta.$$

Ввиду произвольности δ отсюда следует требуемое утверждение. □

Доказательства аналогичных утверждений для случаев $\alpha > 2$ и $\alpha < 2$ требуют привлечения некоторых дополнительных аргументов, которым и будет уделено особое внимание ниже.

Доказательство теоремы 18.2. Как и в предыдущей теореме, сначала сделаем дополнительные предположения о гладкости, а именно, будем считать, что начальное условие есть гладкая финитная функция.

Пусть $\Psi^\varepsilon(z,s)$ — стационарное, периодическое по z решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial s}\Psi^\varepsilon(z,s) = \frac{\partial}{\partial z_i}a_{ij}(z,\varepsilon^{2-\alpha}s)\frac{\partial}{\partial z_j}(\Psi^\varepsilon(z,s)+z), \quad \int\limits_{\mathbb{T}^d}\Psi^\varepsilon(z,s)dz = 0. \quad (18.45)$$

Существование такого решения обеспечивается предложением 18.2.

Лемма 18.4. *Имеет место сходимость по вероятности*

$$a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)\Big(\nabla_z\Psi^\varepsilon\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)+I\Big) \rightharpoonup \widehat{a} \quad \text{слабо в } (L_2^{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)^{n^2}, \quad (18.46)$$

где матрица $\widehat{a}$ задана в (18.36).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\nu^\varepsilon(z,s) = \varepsilon^{\frac{2-\alpha}{2}}\Psi^\varepsilon\Big(\frac{z}{\varepsilon^{(2-\alpha)/2}},\frac{s}{\varepsilon^{2-\alpha}}\Big).$$

Легко проверить, что $\nu^\varepsilon(z,s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}\nu^\varepsilon(z,s) = \frac{\partial}{\partial z_i}a_{ij}\Big(\frac{z}{\varepsilon^{(2-\alpha)/2}},s\Big)\frac{\partial}{\partial z_j}(\nu^\varepsilon(z,s)+z), \quad (18.47)$$

которое представляет собой частный случай уравнения с локально периодическими коэффициентами: коэффициенты периодичны и быстро осциллируют по переменной z, в то время как по переменной s масштабирования не делается. Отметим, что для функций $\nu^\varepsilon(z,s)$ справедливы оценки

$$|\nu^\varepsilon(z,s)| \leqslant C, \quad \int\limits_N^{N+1}\int\limits_{[0,1]^d}\Big|a\Big(\frac{z}{\varepsilon^{(2-\alpha)/2}},s\Big)\nabla_z(\nu^\varepsilon(z,s)+z)\Big|^2 dz\,ds \leqslant C \quad (18.48)$$

с неслучайной не зависящей от ε константой C. Эти оценки были получены в предложении 18.2.

Введем быстрые переменные $y = \frac{z}{\varepsilon^{(2-\alpha)/2}}$. Усредненные коэффициенты уравнения (18.47) даются формулой

$$a^{\mathrm{sp}}(s) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} a(z,s)(\nabla_z \psi(z,s) + I)dz, \tag{18.49}$$

где $\psi(z,s)$ — решение задачи (18.28).

Задача 18.4. Используя метод двухмасштабной сходимости и оценки (18.48), докажите, что (1) уравнение (18.47) допускает п.н. усреднение, (2) коэффициенты усредненного уравнения заданы формулой (18.49) и (3) имеет место сходимость

$$a\Big(\frac{z}{\varepsilon^{(2-\alpha)/2}}, s\Big)(\nabla \nu^\varepsilon(z,s) + I) \overset{2}{\rightharpoonup} a(y,s)(\nabla_y \psi(y,s) + I) \tag{18.50}$$

п.н. слабо двухмасштабно.

Обозначим

$$S^\varepsilon(s) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} a(y,s)\nu^\varepsilon(\varepsilon^{(2-\alpha)/2}y, s)dy.$$

Из (18.50) следует, что п.н. $S^\varepsilon(s) \rightharpoonup a^{\mathrm{sp}}(s)$ слабо в $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \to 0$.

Задача 18.5. Пусть случайный процесс $\eta^\varepsilon(s)$ стационарен, $\|\eta^\varepsilon\|_{L_2(0,1)} \leqslant C$ и $\eta^\varepsilon(s)$ сходится п.н. к нулю слабо в $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \to 0$. Докажите, что $\eta^\varepsilon(s/\varepsilon^\gamma)$ слабо сходится к нулю в $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ по вероятности при каждом $\gamma > 0$.

Таким образом, $S^\varepsilon(s/\varepsilon^\alpha) - a^{\mathrm{sp}}(s/\varepsilon^\alpha)$ сходится к нулю слабо в $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ по вероятности. По теореме Биркгофа

$$a^{\mathrm{sp}}(s/\varepsilon^\alpha) \rightharpoonup \widehat{a} \quad \text{слабо в } L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \text{ п.н.}$$

при $\varepsilon \to 0$, что вместе с предыдущей сходимостью дает

$$S^\varepsilon(s/\varepsilon^\alpha) \rightharpoonup \widehat{a} \quad \text{слабо в } L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$$

по вероятности. Наконец, в силу определения S^ε, ν^ε и периодичности $\Psi^\varepsilon(y,s)$ по первому аргументу имеем

$$a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha})\Big(\nabla_z \Psi^\varepsilon\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) + I\Big) - S^\varepsilon(\frac{s}{\varepsilon^\alpha}) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в } L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Из последних двух соотношений следует утверждение леммы. □

Подставим в факторизованное уравнение (18.8) разность $(\breve{v}^\varepsilon - v^\varepsilon)$, где

$$\breve{v}^\varepsilon = v^0(x,t) + \varepsilon \Psi^{\varepsilon,j}\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_j} v^0.$$

Учитывая (18.45), (18.32), (18.36) и (18.37), после простых преобразований найдем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\breve{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t)) - \operatorname{div}\Big(a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha})\nabla(\breve{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t))Big) \\
&- \frac{1}{\varepsilon^{\alpha/2}}\widetilde{g}\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)(\breve{v}^\varepsilon(x,t) - v^\varepsilon(x,t)) = \Big\{\widehat{a}_{ij} - a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}) \\
&- a_{ik}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha})\frac{\partial}{\partial y_k}\Psi^{\varepsilon,j}\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial y_k}\Big(a_{kj}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha})\Psi^{\varepsilon,i}\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v^0 - \varepsilon^{-\alpha/2} \widetilde{g}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}) v^0 - \varepsilon^{1-\alpha/2} \widetilde{g}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}) \Psi^{\varepsilon,j}\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) \frac{\partial}{\partial x_j} v^0$$
$$- -\varepsilon \Psi^{\varepsilon,k}\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_k} v^0 - \varepsilon a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}) \Psi^{\varepsilon,k}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}) \frac{\partial^3}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} v^0. \quad (18.51)$$

По лемме 18.4 выражение

$$\Big\{ a_{ij} - a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big) - a_{ik}\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big) \frac{\partial}{\partial y_k} \Psi^{\varepsilon,j}\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) \Big\} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v^0$$

слабо сходится к нулю в $L_2(0,T; L_2(\mathbb{R}^d))$ по вероятности. Остальные члены в правой части (18.51) сходятся к нулю в норме $L_2(0,T; H^{-1}(\mathbb{R}^d))$ п.н. либо по вероятности. Отсюда, так же как в случае $\alpha = 2$, следует сходимость $(\breve{v}^\varepsilon - v^\varepsilon)$ к нулю. Справедливость результата для общего начального условия проверяется так же, как при доказательстве предыдущей теоремы. □

Переходим к случаю $\alpha > 2$.

Доказательство теоремы 18.3. Как и в предыдущих случаях, сначала проверим справедливость теоремы для гладких начальных условий u_0 с финитным носителем. Нам потребуются вспомогательные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s} \zeta^\varepsilon(z,s) = \frac{\partial}{\partial z_i} a_{ij}(z, \frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}) \frac{\partial}{\partial z_j} (\zeta^\varepsilon(z,s) + z), \quad (18.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathscr{G}^\varepsilon(z,s) = \frac{\partial}{\partial z_i} a_{ij}(z, \frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}) \frac{\partial}{\partial z_j} \mathscr{G}^\varepsilon(z,s) - \widetilde{g}(z, \frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}), \quad (18.53)$$

каждое из которых имеет единственное стационарное решение с нулевым средним в силу леммы 18.3.

Лемма 18.5. *Имеют место сходимости по вероятности*

$$a\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)\Big(\nabla_z \zeta^\varepsilon\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) + I\Big) \rightharpoonup \widehat{a} \quad \textit{слабо в } (L_2^{\mathrm{loc}}((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)^{n^2}, \quad (18.54)$$

$$a\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big) \nabla_z \mathscr{G}^\varepsilon\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) + \widetilde{g}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}) \nabla_z \zeta^\varepsilon\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) \rightharpoonup 0 \quad \textit{слабо в } (L_2^{\mathrm{loc}}((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)^d, \quad (18.55)$$

$$\mathscr{G}^\varepsilon\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) \widetilde{g}(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}) \rightharpoonup \widehat{G} \quad \textit{слабо в } L_2^{\mathrm{loc}}((0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \quad (18.56)$$

где матрица $\widehat{a}$ и величина $\widehat{G}$ заданы в (18.38) *и* (18.39) *соответственно.*

Доказательство. Покажем сначала, что

$$a_{ij}\Big(z, \frac{s}{\varepsilon^{(2-\alpha)}}\Big)\Big(\nabla \zeta^\varepsilon(z,s) + I\Big) \rightharpoonup \overline{a}(z)(\nabla \overline{\psi}(z) + I)) \quad \text{слабо в } L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^d) \text{ п.н. }, \quad (18.57)$$

где $\overline{a}(z) = \mathbf{E} a(z,s)$ и $\overline{\psi}(z)$ — решение задачи (18.30). С этой целью рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial s} \zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s) = \frac{\partial}{\partial z_i} a_{ij}\Big(z, \frac{s}{\varepsilon^{(2-\alpha)}}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial z_j} \zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s) + I\Big), \quad \zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s_0) = 0 \quad (18.58)$$

в цилиндре $\mathbb{T}^d \times (s_0, \infty)$. Обозначим через $\zeta^0_{s_0}(z,s)$ решение аналогичной задачи Коши с детерминированными коэффициентами $\overline{a}(z)$, заданными в (18.29):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial s}\zeta^0_{s_0}(z,s) = \frac{\partial}{\partial z_i}\overline{a}_{ij}(z)\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\zeta^0_{s_0}(z,s) + I\Big),\\ \zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s_0) = 0.\end{gathered} \tag{18.59}$$

Из утверждения леммы 18.3 следует, что

$$\|\zeta^\varepsilon - \zeta^\varepsilon_{s_0}\|_{L_2(s,s+1;H^1(\mathbb{T}^d))} + \|\zeta^\varepsilon(\cdot,s) - \zeta^\varepsilon_{s_0}(\cdot,s)\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \leqslant c_1 \exp(-c_2(s-s_0))$$

при $s > s_0$, причем константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ неслучайны и не зависят от ε. Легко также проверить (проверьте!), что $\zeta^0_{s_0}(z,s)$ сходится с экспоненциальной скоростью к $\overline{\psi}(z)$ при $(s-s_0) \to \infty$. Поэтому для доказательства сходимости (18.57) достаточно проверить, что

$$\begin{gathered}a_{ij}\Big(z, \frac{s}{\varepsilon^{(2-\alpha)}}\Big)(\nabla\zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s) + I) \rightharpoonup \overline{a}(z)(\nabla\zeta^0_{s_0}(z,s) + I))\\ \text{слабо в } L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^d) \text{ п.н.}\end{gathered} \tag{18.60}$$

при всех s_0. Указанная сходимость легко проверяется в случае, когда коэффициенты $a(z,s)$ непрерывно дифференцируемы по z, причем $|\nabla a(z,s)| \leqslant C$. В этом случае, дифференцируя уравнение (18.58) по z, получим оценки (получите!)

$$\|\nabla\zeta^\varepsilon_{s_0}\|_{L_2(s,s+1;H^1(\mathbb{T}^d))} \leqslant C, \quad \|\partial_t\nabla\zeta^\varepsilon_{s_0}\|_{L_2(s,s+1;H^{-1}(\mathbb{T}^d))} \leqslant C,$$

из которых в силу теоремы 5.1 из [**73**] следует компактность семейства функций $\nabla\zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s)$ в пространстве $L_2((s_0,\infty);L^2(\mathbb{T}^d))$.

По теореме Биркгофа семейство $\{a(z, s/\varepsilon^{(2-\alpha)})\}$ слабо сходится п.н. в $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^d)$ к $\overline{a}(z)$.

Переходя к пределу в интегральном тождестве задачи (18.58), легко убедиться, что п.н. любая предельная точка семейства $\{\zeta^\varepsilon_{s_0}\}$ есть решение задачи (18.59). Сходимость (18.60) следует теперь из компактности семейства $\nabla\zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s)$ и теоремы Биркгофа.

Для коэффициентов общего вида сходимость (18.60) может быть проверена путем аппроксимации. Пусть δ_n — убывающая последовательность положительных чисел, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через $a^\delta(z,s)$ и $\overline{a}^\delta(z)$ регуляризованные по переменной z функции $a(z,s)$ и $\overline{a}(z)$, определение регуляризации было дано в (2.6). Тогда на множестве полной меры в Ω выполняются соотношения

$$\Big(a^{\delta_n}\Big(z, \frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}\Big) - a^{\delta_n}(z)\Big) \rightharpoonup 0 \text{ слабо в } L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1; H^1(\mathbb{T}^d)) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{18.61}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big\|\Big(a^{\delta_n}\Big(z, \frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}\Big) - a^{\delta_n}\Big(z, \frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}\Big)\Big)\Big\|^2_{L_2((s_1,s_2)\times\mathbb{T}^d)} \tag{18.62}$$

$$= (s_2 - s_1)\mathbf{E}\|a^{\delta_n}(z,s) - a(z,s)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varkappa(\delta_n). \tag{18.63}$$

Поскольку при почти всех ω выражение $\|a^{\delta_n}(z,s) - a(z,s)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)}$ сходится к нулю при $n \to \infty$, по теореме Лебега имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varkappa(\delta_n) = 0 \tag{18.64}$$

Пусть $\zeta_{s_0}(z,s)$ — произвольная предельная точка семейства $\zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s)$ и

$$\Phi_\varphi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{T}^d} (u(z,s)\partial_s\varphi(z,s) - \overline{a}(z)(\nabla u(z,s)+I)\cdot\nabla\varphi(z,s))dz\,ds \right|.$$

Тогда для произвольной тестовой функции $\varphi \in C_0^\infty((s_0,\infty)\times\mathbb{T}^d)$

$$\Phi_\varphi(\zeta_{s_0}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varphi(\zeta^\varepsilon_{s_0}).$$

Оценим величину $\Phi_\varphi(\zeta^\varepsilon_{s_0})$:

$$\begin{aligned}
\Phi_\varphi(\zeta^\varepsilon_{s_0}) \leqslant & \left| \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Big(\zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s)\partial_s\varphi(z,s) - a\Big(z,\frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}\Big)(\nabla\zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s)+I)\nabla\varphi(z,s)\Big) dz\,ds \right| \\
& + \left| \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Big(a\Big(z,\frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}\Big) - a^\delta\Big(z,\frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}\Big)\Big)(\nabla\zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s)+I)\nabla\varphi(z,s)dz\,ds \right| \\
& + \left| \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Big(a^\delta\Big(z,\frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}\Big) - \overline{a}^\delta(z)\Big)(\nabla\zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s)+I)\nabla\varphi(z,s)dz\,ds \right| \\
& + \left| \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Big(\overline{a}^\delta(z) - \overline{a}(z)\Big)(\nabla\zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s)+I)\nabla\varphi(z,s)dz\,ds \right|.
\end{aligned}$$

Первый член в правой части последнего неравенства обращается в нуль в силу уравнения для $\zeta^\varepsilon_{s_0}$. Выберем s_1 и s_2 так, что $\operatorname{supp}(\varphi) \subset (s_1,s_2)\times\mathbb{T}^d$. С учетом оценок предложения 18.2 находим

$$\begin{aligned}
\Phi_\varphi(\zeta^\varepsilon_{s_0}) \leqslant & C \int\limits_{s_1}^{s_2} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Big(a\Big(z,\frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}\Big) - a^{\delta_n}\Big(z,\frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}\Big)\Big)^2 dz\,ds \\
& + \left| \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Big(a^{\delta_n}\Big(z,\frac{s}{\varepsilon^{\alpha-2}}\Big) - \overline{a}^{\delta_n}(z)\Big)(\nabla\zeta^\varepsilon_{s_0}(z,s)+I)\nabla\varphi(z,s)dz\,ds \right| \\
& + C \int\limits_{\mathbb{T}^d} (a^{\delta_n}(z) - a(z))^2 dz.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание (18.61) и компактность $\zeta^\varepsilon_{s_0}$ в $C(s_1,s_2;L_2(\mathbb{T}^d))$, приходим к выводу, что второй член в правой части сходится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Поэтому

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varphi(\zeta^\varepsilon_{s_0}) \leqslant C\varkappa(\delta_n) + C\|a^{\delta_n}(z) - a(z)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)}.$$

В силу произвольности n имеем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varphi(\zeta^\varepsilon_{s_0}) = 0$. Таким образом, ζ_{s_0} совпадает с $\zeta^0_{s_0}$, и вся последовательность $\zeta^\varepsilon_{s_0}$ сходится п.н. к $\zeta^0_{s_0}$.

Попутно мы доказали формулу (18.60), а с ней и (18.57). Отсюда, так же как при доказательстве леммы 18.4, следует (18.54). Сходимости (18.55) и (18.56) могут быть доказаны аналогично, если мы покажем, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} (\overline{a}(z)\nabla_z\overline{G}(z) + \overline{g}(z)\overline{\psi}(z))dz = 0.$$

Согласно уравнениям (18.30) и (18.31) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \overline{g}(z)\overline{\psi}(z)dz = -\int\limits_{\mathbb{T}^d} \operatorname{div}(\overline{a}(z)\nabla_z \overline{G}(z))\overline{\psi}(z))dz$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{T}^d} \operatorname{div}(\overline{a}(z)\nabla_z \overline{\psi}(z))\overline{G}(z)dz = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \operatorname{div}\overline{a}(z)\overline{G}(z)dz$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{T}^d} \overline{a}(z)\nabla_z \overline{G}(z))dz,$$

и требуемое соотношение следует. □

Оставшаяся часть доказательства теоремы 18.3 практически не отличается от аналогичной части доказательства предыдущей теоремы, поэтому мы оставляем ее читателю в качестве упражнения. □

Замечание 18.3. При доказательстве теорем 18.1–18.3 мы нигде не использовали условие перемешивания **H5**, поэтому утверждения этих теорем также верны для общих стационарных эргодических по времени и периодических по пространственным переменным полей коэффициентов, удовлетворяющих условиям **H3** и $\int\limits_{\mathbb{T}^d} \widetilde{g}(y,s)dy = 0$ при всех s п.н.

Замечание 18.4. Методы доказательств теорем 18.1–18.3 применимы без каких-либо существенных изменений к случаю уравнения (18.13) с гладкой финитной по переменной x правой частью $h(x,t)$. В силу равномерных априорных оценок (18.14) соответствующие утверждения также остаются в силе для произвольной $h(x,t) \in L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$. Точная формулировка будет дана в начале следующего раздела.

18.1.6. *Усреднение факторизованного уравнения. II. Общий случай.* Займемся усреднением факторизованного уравнения (18.8) с ненулевой правой частью. Сначала рассмотрим вспомогательное уравнение (18.13) с фиксированной $h(x,t) \in L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$. Как отмечалось в замечании 18.4, методы предыдущего пункта работают и в этом случае. Справедлив следующий результат.

Теорема 18.4. *Пусть $h(x,t) \in L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$, и $z_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда решения уравнения* (18.13) *сходятся п.н. при $\alpha = 2$ и по вероятности при $\alpha \neq 2$ к решению задачи*

$$\frac{\partial}{\partial t} z^0(x,t) = \operatorname{div}(\widehat{a}\nabla z^0(x,t)) + \widehat{b}\cdot\nabla z^0(x,t) + \widehat{G} z^0(x,t) + h(x,t),$$
$$z^0(x,0) = z_0(x). \tag{18.65}$$

с детерминированными постоянными коэффициентами, заданными формулами (18.33)–(18.35) *при $\alpha = 2$,* (18.36)–(18.37) *при $0 < \alpha < 2$, и* (18.38)–(18.39) *при $\alpha > 2$.*

Обозначим для краткости

$$\zeta^\varepsilon_t = \frac{1}{\varepsilon^{1\wedge\frac{\alpha}{2}}} \int\limits_0^t \langle g\rangle\Big(\frac{s}{\varepsilon^\alpha}\Big)ds.$$

Пусть сначала $\alpha \leqslant 2$. Представим решение v^ε задачи (18.8) в виде суммы $v^\varepsilon = V^\varepsilon + (v^\varepsilon - V^\varepsilon)$, где $V^\varepsilon(x,t)$ — решение задачи Коши в $\mathbb{R}^d \times (0,T)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V^\varepsilon(x,t) &= \operatorname{div}(\widehat{a}\nabla V^\varepsilon(x,t)) + \widehat{b}\cdot\nabla V^\varepsilon(x,t) + \widehat{G}V^\varepsilon(x,t) \\ &\quad + f(x,t)\exp(-\zeta_t^\varepsilon), \\ V^\varepsilon(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{18.66}$$

с коэффициентами, заданными формулами (18.33)–(18.35), либо (18.36)–(18.37) в зависимости от значения α. Проверим, что $(v^\varepsilon - V^\varepsilon) \to 0$ в $L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ по вероятности, в то время как V^ε сходится по распределению в $L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ к решению следующей задачи Коши со случайной правой частью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v^0(x,t) &= \operatorname{div}(\widehat{a}\nabla v^0(x,t)) + \widehat{b}\cdot\nabla v^0(x,t) + \widehat{G}v^0(x,t) \\ &\quad + f(x,t)\exp(-\sigma W_t), \\ v^0(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{18.67}$$

где σ определена в (18.10).

Предложение 18.3. *Функция $(v^\varepsilon - V^\varepsilon)$ сходится к нулю по вероятности в норме пространства $L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. Согласно лемме 18.2 процесс ζ_t^ε сходится при $\varepsilon\to 0$ к σW_t по распределению в пространстве $C(0,T)$, поэтому случайная функция $f(x,t)\zeta_t^\varepsilon$ сходится по распределению в пространстве $L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ к $\sigma f(x,t)W_t$. По теореме Прохорова отсюда следует, что для каждого $\delta>0$ найдется компакт $K^\delta \subset L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ такой, что $\mathbf{P}\{f(x,t)\zeta_t^\varepsilon \notin K^\delta\} \leqslant \delta$. Выберем в K^δ конечную δ-сеть $\{h_j\}$, $j=1,2,\dots,N(\delta)$, и обозначим через $z_j^\varepsilon(x,t)$ и $z_j^0(x,t)$ решения уравнений (18.13) и (18.65) с правой частью $h_j(x,t)$ и начальным условием $u_0(x)$. Согласно теоремам 18.1 и 18.2 для каждого $\delta>0$ можно выбрать $\varepsilon_0(\delta)>0$ такое, что при всех $\varepsilon<\varepsilon_0(\delta)$

$$\max_j \mathbf{P}\{\|z_j^\varepsilon - z_j^0\|_{L_2(0,T;\mathbb{R}^d)} > \delta\} < \frac{\delta}{N(\delta)}.$$

Введем события

$$\mathscr{E}_j = \{\Omega : \|f(x,t)\zeta_t^\varepsilon - h_j(x,t)\|_{L_2(0,T;\mathbb{R}^d)} < \delta\}.$$

По построению $\mathbf{P}(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N(\delta)} \mathscr{E}_j) < \delta$. Заметим также, что согласно оценке (18.14) и аналогичной тривиальной оценке для усредненной задачи при всех $\omega\in\mathscr{E}_j$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|V^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L_2} &\leqslant \|V^\varepsilon - z_j^0\|_{L_2} + \|z_j^0 - z_j^\varepsilon\|_{L_2} + \|z_j^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L_2} \\ &\leqslant 2C\delta + \|z_j^0 - z_j^\varepsilon\|_{L_2}, \end{aligned}$$

с универсальной константой C, поэтому при всех $\varepsilon<\varepsilon_0(\delta)$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\|V^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L_2} > (2C+1)\delta\} \\ &\leqslant \mathbf{P}(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N(\delta)} \mathscr{E}_j) + \sum_{j=1}^{N(\delta)} \mathbf{P}\{\mathscr{E}_j \cap (\|V^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L_2} > (2C+1)\delta)\} \end{aligned}$$

$$\leqslant \delta + \sum_{j=1}^{N(\delta)} \mathbf{P}\{\|z_j^0 - z_j^\varepsilon\|_{L_2} > \delta\} \leqslant \delta + \sum_{j=1}^{N(\delta)} \frac{\delta}{N(\delta)} = 2\delta,$$

что дает искомую сходимость по вероятности. □

Предложение 18.4. *Функция V^ε сходится по распределению при $\varepsilon \to 0$ в пространстве $L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ к решению v^0 задачи* (18.67).

Доказательство. Это утверждение легко следует из непрерывности зависимости решения от правой части в норме $L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ в задаче (18.65). В силу непрерывности сходимость по распределению правых частей влечет требуемую сходимость решений. □

Теперь мы можем сформулировать и доказать результат о сходимости для неоднородного факторизованного уравнения (18.8)

Теорема 18.5. *Пусть выполнены предположения* **H1**–**H5**. *Тогда при $\alpha \leqslant 2$ решение факторизованной задачи* (18.8) *сходится по распределению при $\varepsilon \to 0$ к решению задачи* (18.67) *в пространстве $L_2((0,T)\times L_2(\mathbb{R}^d))$, причем коэффициенты предельного уравнения заданы формулами* (18.33)–(18.35) *при $\alpha = 2$, и формулами* (18.36), (18.37) *при $\alpha < 2$.*

При $\alpha > 2$ решение задачи (18.8) *сходится по вероятности в пространстве $L_2((0,T)\times L_2(\mathbb{R}^d))$ к решению детерминированной задачи*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}v^0(x,t) = \operatorname{div}(\widehat{a}\nabla v^0(x,t)) + \widehat{b}\cdot\nabla v^0(x,t) + \widehat{G}v^0(x,t) + f(x,t),\\ &v^0(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{18.68}$$

коэффициенты которой определены формулами (18.38), (18.39).

Доказательство. При $\alpha \leqslant 2$ достаточно использовать представление $v^\varepsilon = V^\varepsilon + (v^\varepsilon - V^\varepsilon)$ и предложения 18.3 и 18.4. При $\alpha > 2$ требуемое утверждение непосредственно следует из теоремы 18.4, леммы 18.2 и априорной оценки (18.14). □

18.1.7. *Усреднение исходного нефакторизованного уравнения.* Наша цель — получение основных результатов об усреднении исходной задачи (18.2), (18.3). Необходимые для этого технические утверждения были доказаны выше.

Заметим, что при $\alpha \leqslant 2$ случайный процесс $(\exp(\zeta_t^\varepsilon), \exp(-\zeta_t^\varepsilon))$ сходится по распределению к процессу $(\exp(\sigma W_t), \exp(-\sigma W_t))$, где ζ_t^ε и σ заданы в (18.9), (18.10).

Теорема 18.6. *Пусть $\alpha \leqslant 2$ и выполнены условия* **H1**–**H5**. *Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение u^ε задачи* (18.2), (18.3) *сходится по распределению в сильной топологии пространства $L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ к решению усредненного стохастического уравнения в частных производных*

$$\begin{aligned} &d\widehat{u} = \Big(\widehat{a}_{ij}\frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial x_i\partial x_j} + \widehat{b}_i\frac{\partial\widehat{u}}{\partial x_i} + \widehat{g}\widehat{u}\Big)dt + \sigma\widehat{u}\,dW_t + f(x,t),\\ &\widehat{u}(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{18.69}$$

где $\widehat{g} = \widehat{G} + \sigma^2$, коэффициенты $\widehat{a}_{ij}$, $\widehat{b}_i$ и $\widehat{G}$ определены формулами (18.33)–(18.35) *при $\alpha = 2$ и формулами* (18.36), (18.37) *при $\alpha < 2$, а σ задана формулой* (18.10).

В силу [**41**, теорема 6.7] задача (18.69) корректна и имеет единственное решение. Поэтому предельное распределение определено однозначно.

Замечание 18.5. Если в задаче (18.2), (18.3) среднее функции $g(z,s)$ по переменной z обращается в нуль при каждом s п.н., то применима теорема 18.4. Поэтому предельная задача является детерминированной, и u^ε сходится по вероятности (и даже п.н. при $\alpha=2$) к неслучайной функции. Легко проверить, что в этом случае коэффициент σ в (18.69) равен нулю.

При $\alpha>2$ усредненное уравнение всегда будет детерминированным.

Теорема 18.7. *Пусть $\alpha>2$, и пусть выполнены предположения* **H1**–**H5**. *Тогда при $\varepsilon\to 0$ решение u^ε задачи* (18.2), (18.3) *сходится по вероятности в норме $L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ к решению усредненной задачи Коши*

$$\begin{aligned} &d\widehat{u}=\Big(\widehat{a}_{ij}\frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial x_i\partial x_j}+\widehat{b}_i\frac{\partial\widehat{u}}{\partial x_i}+\widehat{G}\widehat{u}\Big)dt+f(x,t),\\ &\widehat{u}(x,0)=u_0(x), \end{aligned} \tag{18.70}$$

где коэффициенты $\widehat{a}_{ij}$, $\widehat{b}_i$ и $\widehat{G}$ определены в (18.38)–(18.39).

Доказательство теоремы 18.6. Представим решение u^ε задачи (18.2), (18.3) в виде

$$u^\varepsilon(x,t)=(v^\varepsilon(x,t)-V^\varepsilon(x,t))\exp(\zeta_t^\varepsilon)+V^\varepsilon(x,t)\exp(\zeta_t^\varepsilon),$$

где v^ε и V^ε — решения задач (18.8) и (18.66) соответственно, и ζ_t^ε задана в (18.9). Как было доказано в предложении 18.3, в первом слагаемом в правой части множитель $(v^\varepsilon(x,t)-V^\varepsilon(x,t))$ сходится к нулю по вероятности в норме $L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$. Поскольку по лемме 18.2 функции ζ_t^ε сходятся по распределению в $C[0,T]$, произведение $(v^\varepsilon(x,t)-V^\varepsilon(x,t))\exp(\zeta_t^\varepsilon)$ стремится к нулю по вероятности в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ (проверьте!).

Во втором слагаемом первый сомножитель V^ε непрерывно отображает в норме $C[0,T]$ траектории $\zeta_\cdot^\varepsilon$ в пространство $L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$. Поэтому произведение $V^\varepsilon(x,t)\exp(\zeta_t^\varepsilon)$ есть непрерывный функционал процесса $\zeta_\cdot^\varepsilon$ в топологии $C[0,T]$ со значениями в $L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$. В силу этой непрерывности сходимость по распределению процесса $\zeta_\cdot^\varepsilon$ к $\sigma W_\cdot$ в $C[0,T]$ влечет сходимость по распределению выражения $V^\varepsilon\exp(\zeta_\cdot^\varepsilon)$ к случайной функции $v^0\exp(\sigma W_\cdot)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$, где v^0 — решение задачи (18.67).

Обозначим $\widehat{u}=v^0\exp(\sigma W_\cdot)$ и

$$\widehat{A}=\widehat{a}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\widehat{b}_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\widehat{G}.$$

Покажем, что $\widehat{u}$ удовлетворяет уравнению (18.69). С этой целью для произвольной $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим скалярное произведение $(\widehat{u}(t),\varphi)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ как функцию времени и применим к этой функции формулу Ито:

$$\begin{aligned} d(\widehat{u},\varphi)&=\exp(\sigma W_t)d(v^0(t),\varphi)+\sigma(v^0(t),\varphi)\exp(\sigma W_t)dW_t\\ &\quad+1/2\sigma^2(v^0(t),\varphi)\exp(\sigma W_t)dt\\ &=\exp(\sigma W_t)(\widehat{A}v^0(t),\varphi)dt+(f(x,t),\varphi)\exp(\sigma W_t)\exp(-\sigma W_t)dt\\ &\quad+\sigma(\widehat{u}(t),\varphi)dW_t+1/2\sigma^2(\widehat{u}(t),\varphi)dt\\ &=(\widehat{A}\widehat{u}(t),\varphi)dt+1/2\sigma^2(\widehat{u}(t),\varphi)dt+(f(x,t),\varphi)dt+\sigma(\widehat{u}(t),\varphi)dW_t. \end{aligned}$$

Полученное соотношение в сочетании с очевидным равенством $\widehat{u}(0) = u_0$ означает, что $\widehat{u}$ — решение задачи (18.69). Согласно [**41**, теорема 6.7] решение этой задачи единственно, поэтому оно однозначно характеризует предельное распределение. □

Замечание 18.6. Другое доказательство последней теоремы опирается на теорему Скорохода (доказательство см. в [**41**, теорема 2.4]). Интересующийся читатель может воспроизвести это доказательство самостоятельно.

Доказательство теоремы 18.7. Утверждение легко следует из леммы 18.2 и теоремы 18.5. □

В заключение этого раздела сформулируем аналогичные результаты для решений начально-краевых задач. Начнем с условия Дирихле. Для произвольной липшицевой области $Q \subset \mathbb{R}^d$ рассмотрим на множестве $Q \times (0,T)$ начально-краевую задачу Дирихле

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}u^\varepsilon(x,t) = \operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)\nabla u^\varepsilon(x,t)\Big) + \frac{1}{\varepsilon^{1\wedge\frac{\alpha}{2}}}g\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)u^\varepsilon(x,t) + f(x,t),\\ &u^\varepsilon(x,t) = 0 \ \text{ при } \ x \in \partial Q, \quad u(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{18.71}$$

Как и прежде, предполагаем, что $u_0 \in L_2(Q)$ и $f \in L_2(Q\times(0,T))$. При выполнении условия **H3** существование и единственность решения такой задачи в пространстве $L_2((0,T);\overset{\circ}{H}{}^1(Q))\cap C((0,T);L_2(Q))$ при каждом $\varepsilon > 0$ хорошо известны (см., например, [**72**]).

Приводимые ниже утверждения могут быть доказаны так же, как в случае задачи Коши, поэтому доказательства опускаем. При $\alpha \leqslant 2$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 18.8. *Пусть $\alpha \leqslant 2$, и пусть выполнены предположения* **H1**–**H5**. *Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение u^ε задачи* (18.71) *сходится по распределению в сильной топологии пространства $L_2(Q\times(0,T))$ к решению усредненного стохастического уравнения в частных производных*

$$\begin{aligned} &d\widehat{u} = \Big(\widehat{a}_{ij}\frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial x_i\partial x_j} + \widehat{b}_i\frac{\partial\widehat{u}}{\partial x_i} + \widehat{g}\widehat{u}\Big)dt + \sigma\widehat{u}\,dW_t + f(x,t),\\ &\widehat{u}(x,t) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \partial Q, \quad \widehat{u}(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{18.72}$$

причем все коэффициенты этого уравнения определены в теореме 18.6.

При $\alpha > 2$ справедлив следующий аналог теоремы 18.7.

Теорема 18.9. *Пусть $\alpha > 2$, и пусть выполнены предположения* **H1**–**H5**. *Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение u^ε задачи* (18.71) *сходится по вероятности в норме $L_2(Q\times(0,T))$ к решению усредненной начально-краевой задачи Дирихле*

$$\begin{aligned} &d\widehat{u} = \Big(\widehat{a}_{ij}\frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial x_i\partial x_j} + \widehat{b}_i\frac{\partial\widehat{u}}{\partial x_i} + \widehat{G}\widehat{u}\Big)dt + f(x,t),\\ &\widehat{u}(x,t) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \partial Q, \quad \widehat{u}(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{18.73}$$

все коэффициенты которой были определены в теореме 18.7.

Такие же результаты справедливы в случае однородных краевых условий Неймана и Фурье. Мы не будем утомлять читателя их описанием.

18.2. Уравнения с большой конвекцией.

18.2.1. *Постановка задачи.* Мы переходим к изучению уравнения конвекции-диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t}u^\varepsilon(x,t)=\operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla u^\varepsilon(x,t)\Big)+\frac{1}{\varepsilon}b\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla u^\varepsilon(x,t), \tag{18.74}$$

в $\mathbb{R}^d\times(0,T)$ с начальным условием

$$u^\varepsilon(x,0)=u_0(x)\in L_2(\mathbb{R}^d). \tag{18.75}$$

Отметим сразу, что здесь рассматривается только автомодельное уравнение. Изучение неавтомодельного случая наталкивается на серьезные дополнительные трудности и выходит за рамки этой книги.

Перечислим условия на коэффициенты оператора (18.74), аналогичные условиям **H1**–**H5** в п. 18.1.1, за исключением **H4**.

A1. Коэффициенты $a_{ij}(y,s)$ и $b_i(y,s)$ периодичны по переменной y с периодом 1 по каждому координатному направлению.

A2. Функции $a_{ij}(y,s)$ и $b_i(y,s)$ являются случайными стационарными процессами по переменной s, заданными на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$, со значениями в пространстве периодических функций. Мы предполагаем измеримость коэффициентов $a_{ij}(y,s)=a_{ij}(y,s,\omega)$ и $b_i(y,s)=b_i(y,s,\omega)$ относительно σ-алгебры $\mathscr{B}(\mathbb{T}^d)\times\mathscr{B}(-\infty,+\infty)\times\mathscr{F}$, где $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра.

Более того, процессы $a_{ij}(y,s)$ и $b_i(y,s)$ представимы как действие некоторой динамической системы T_s на случайные величины $\widetilde{a}_{ij}(y)$ и $\widetilde{b}_i(y)$ со значениями в $L_\infty(\mathbb{T}^d)$, т.е.

$$a_{ij}(y,s,\omega)=\widetilde{a}_{ij}(y,T_s\omega),\quad b_i(y,s,\omega)=\widetilde{b}_i(y,T_s\omega). \tag{18.76}$$

A3. *Равномерная параболичность*: $\lambda^{-1}|\zeta|^2\leqslant a_{ij}(y,\tau)\zeta_i\zeta_j\leqslant\lambda|\zeta|^2$, $\lambda>0$, $|b_i(y,s)|\leqslant\lambda$ при всех y, τ и $\zeta\in\mathbb{R}^d$.

A4. *Перемешивание.* Справедливо хотя бы одно из следующих соотношений:

$$\int\limits_0^\infty\varkappa(\gamma)d\gamma<\infty,\quad\int\limits_0^\infty\sqrt{\varphi(\gamma)}d\gamma<\infty,\quad\int\limits_0^\infty\rho(\gamma)d\gamma<\infty.$$

Существование решения в классе $L_2((0,T);H^1(\mathbb{R}^d))$ при каждом $\varepsilon>0$ и его единственность — это классический материал, который может быть найден, например, в [**72**]. Однако стандартные методы получения априорных оценок не позволяют оценить решение равномерно по параметру ε.

18.2.2. *Вспомогательные уравнения и технические результаты.* Нашим первым шагом будет исследование вспомогательного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s}p(y,s)+\operatorname{div}(a(y,s)\nabla_y p(y,s))-\operatorname{div}(b(y,s)p(y,s))=0, \tag{18.77}$$

заданного в $\mathbb{T}^d\times(-\infty,+\infty)$. Рассмотрим последовательность задач Коши

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial}{\partial s}p^N(y,s)+\operatorname{div}(a(y,s)\nabla_y p^N(y,s))-\operatorname{div}(b(y,s)p^N(y,s))=0,\\ p^N(y,N)=1,\end{gathered} \tag{18.78}$$

в $\mathbb{T}^d\times(-\infty,N)$.

Далее используем обозначения

$$A_s\varphi(y) = \operatorname{div}(a(y,s)\nabla_y\varphi(y)) + b(y,s)\nabla_y\varphi(y),$$
$$A_s^*\varphi(y) = \operatorname{div}(a(y,s)\nabla_y\varphi(y)) - \operatorname{div}(b(y,s)\varphi(y)).$$

Предложение 18.5. *Функции p^N сходятся при $N \to \infty$ равномерно на компактах в $\mathbb{T}^d \times (-\infty, +\infty)$ к стационарному положительному решению $p(y,s)$ уравнения* (18.77)*, причем*

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} p(y,s)dy = 1 \quad \textit{п.н.} \ , \quad s \in (-\infty, +\infty), \tag{18.79}$$

Это решение непрерывно по переменным y и s и удовлетворяет оценкам

$$\begin{aligned} &\|p\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d\times(-\infty,+\infty))} \leqslant C, \\ &\sup_{k\in\mathbb{R}} \|p\|_{L_2((k,k+1);H^1(\mathbb{T}^d))} \leqslant C, \quad p(y,s) \geqslant c_1, \end{aligned} \tag{18.80}$$

$$\max_{y\in\mathbb{T}^d,\ k\leqslant s\leqslant k+1} |p(y,s) - p^N(y,s)| \leqslant C\exp(-c_2(N-k)) \tag{18.81}$$

с неслучайными положительными постоянными C, c_1 и c_2.

Доказательство. К задаче (18.78) применим принцип максимума (см. [**72**]), поэтому из положительности начальных данных следует положительность решения при всех y и $s \leqslant N$. Учитывая структуру уравнения (18.78) и интегрируя его по множеству $\mathbb{T}^d \times (s, N)$, $s < N$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} p^N(y,s)dy = 1$$

при всех $s \leqslant N$. В силу неравенства Гарнака (см. [**122**]) получаем

$$0 < c_1 \leqslant p^N(y,s) \leqslant c_3 < \infty, \tag{18.82}$$

где константы c_1 и c_3 не зависят ни от N, ни от ω.

Для обоснования сходимости $p^N(y,s)$ и оценки (18.81) рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial s}q^N(y,s) + A_s^*q^N(y,s) = 0, \ \ (y,s) \in \mathbb{T}^d\times(-\infty,N), \quad q^N(y,N) = q_0, \tag{18.83}$$

где $q_0 \in L_2(\mathbb{T}^d)$ такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} q_0(y)dy = 0. \tag{18.84}$$

Лемма 18.6. *При $s - N \leqslant -1$ выполнено неравенство*

$$|q^N(y,s)| \leqslant c_1\|q_0\|_{L_2(\mathbb{T}^d)}\exp(C(s-N)). \tag{18.85}$$

Если $q_0 \in L_\infty(\mathbb{T}^d)$, то

$$|q^N(y,s)| \leqslant c_1\|q_0\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)}\exp(C(s-N)) \tag{18.86}$$

при всех $s \leqslant N$.

Лемма будет доказана ниже, а сейчас продолжим доказательство предложения. Разность $(p^{N+k} - p^N)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s}(p^{N+k} - p^N) + A_s^*(p^{N+k} - p^N) = 0, \quad s < N,$$

и выполнено равенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d}(p^{N+k}(y,N)-p^N(y,N))dy=0.$$

Следовательно

$$\|p^{N+k}-p^N\|_{C(\mathbb{T}^d\times(s,s+1))}\leqslant c_1\exp(C(N-s)),$$

и по критерию Коши при $N\to\infty$ последовательность p^N сходится равномерно на компактах к предельной непрерывной функции, которую мы обозначим $p(y,s)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k\to\infty$, приходим к (18.81), (18.79) и первому неравенству в (18.80).

Далее, используя стандартную технику получения эллиптических априорных оценок, легко убедиться, что $\|\nabla p^N\|_{L_2(\mathbb{T}^d\times(s,s+1))}\leqslant c$ равномерно по $\omega\in\Omega$ и $s\leqslant N-1$. Отсюда следует слабая сходимость ∇p^N к ∇p в L_2^{loc} и, как следствие, второе неравенство в (18.80). Переходя к пределу в интегральном тождестве задачи (18.78), приходим к выводу, что $p(y,s)$ есть решение (18.77). Ясно, что при любом $N\in\mathbb{R}$ функция $p^{N+s}(y,s)$ стационарна по s. По доказанному выше $p^{N+s}(y,s)$ сходятся к $p(y,s)$, поэтому $p(y,s)$ также стационарна, что и завершает доказательство предложения. □

Доказательство леммы 18.6. Рассмотрим сопряженную с (18.83) задачу

$$\frac{\partial}{\partial s}\nu^{s_0}(y,s)-A_s\nu^{s_0}(y,s)=0,\ (y,s)\in\mathbb{T}^d\times(s_0,\infty);\quad \nu^{s_0}(y,s_0)=\nu_0(y),\tag{18.87}$$

где ν_0 — произвольная $L_2(\mathbb{T}^d)$-функция. Умножим уравнение на функцию $q^N(y,s)$, заданную в (18.83), и проинтегрируем полученное равенство по множеству $\mathbb{T}^d\times(s_0,N)$. Интегрируя по частям и учитывая (18.83), после несложных преобразований найдем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{T}^d}\nu^{s_0}(y,N)q_0(y)dy-\int\limits_{\mathbb{T}^d}\nu_0(y)q^N(y,s_0)dy\\&=\int\limits_{s_0}^{d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\Big(q^N(y,s)\frac{\partial}{\partial s}\nu^{s_0}(y,s)+\nu^{s_0}(y,s)\frac{\partial}{\partial s}q^N(y,s)\Big)\\&=\int\limits_{s_0}^{d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\Big(q^N(y,s)A_s\nu^{s_0}(y,s)-\nu^{s_0}(y,s)A_s^*q^N(y,s)\Big)=0.\end{aligned}\tag{18.88}$$

В силу неравенства Нэша (см., например, [**72**]) решение задачи (18.87) удовлетворяет оценке

$$|\nu^{s_0}(y,s_0+1)|\leqslant c\|\nu_0\|_{L_2(\mathbb{T}^d)},\tag{18.89}$$

где постоянная c зависит только от λ в **A3** и размерности. Пусть $\nu^+(y,s_1)$ и $\nu^-(y,s_1)$ — положительная и отрицательная части функции $\nu(y,s_1)$: $\nu^+(y,s_1)=\max(\nu^{s_0}(y,s_1),0)$ и $\nu^-(y,s_1)=\min(\nu^{s_0}(y,s_1),0)$. Прибавляя в случае необходимости подходящую константу, можно считать, что

$$\max_{y\in\mathbb{T}^d}\nu^{s_0}(y,s_1)=-\min_{y\in\mathbb{T}^d}\nu^{s_0}(y,s_1)$$

и, как следствие,

$$\|\nu^+(\cdot,s_1)\|_{L_\infty}=\|\nu^-(\cdot,s_1)\|_{L_\infty}.$$

В силу выбора $\nu^+(y,s_1)$ и принципа максимума решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\nu}^1(y,s)-A_s\widetilde{\nu}^1(y,s)=0,\ (y,s)\in\mathbb{T}^d\times(s_1,\infty);\quad \widetilde{\nu}^1(y,s_1)=\nu^+(y,s_1)$$

знакопостоянно, поэтому по неравенству Гарнака

$$\max_{y\in\mathbb{T}^d}\widetilde{\nu}^1(y,s_1+1)\leqslant c_2\min_{y\in\mathbb{T}^d}\widetilde{\nu}^1(y,s_1+1),$$

где c_2 зависит только от константы λ в **A3** и размерности. Итак,

$$c_2^{-1}\|\widetilde{\nu}^1(\cdot,s_1+1)\|_{L_\infty}\leqslant\min_{y\in\mathbb{T}^d}\widetilde{\nu}^1(y,s_1+1).$$

Аналогично решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\nu}^2(y,s)-A_s\widetilde{\nu}^2(y,s)=0,\ (y,s)\in\mathbb{T}^d\times(s_1,\infty);\quad \widetilde{\nu}^2(y,s_1)=\nu^-(y,s_1),$$

удовлетворяет неравенству

$$-c_2^{-1}\|\widetilde{\nu}^2(\cdot,s_1+1)\|_{L_\infty}\geqslant\max_{y\in\mathbb{T}^d}\widetilde{\nu}^2(y,s_1+1).$$

Поскольку $\nu^{s_0}(y,s)=\nu^1(y,s)+\nu^2(y,s)$ при $s\geqslant s_0$, из последних двух неравенств получаем

$$\begin{aligned}&-\|\widetilde{\nu}^2(\cdot,s_1+1)\|_{L_\infty}+c_2^{-1}\|\widetilde{\nu}^1(\cdot,s_1+1)\|_{L_\infty}\leqslant\nu^{s_0}(y,s_1+1)\\&\leqslant\|\widetilde{\nu}^1(\cdot,s_1+1)\|_{L_\infty}-c_2^{-1}\|\widetilde{\nu}^2(\cdot,s_1+1)\|_{L_\infty},\quad c_2>0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\operatorname*{osc}_{y\in\mathbb{T}^d}\nu^{s_0}(y,s_1+1)\leqslant(1-c_2^{-1})(\|\widetilde{\nu}^1(\cdot,s_1+1)\|_{L_\infty}+\|\widetilde{\nu}^2(\cdot,s_1+1)\|_{L_\infty})\\&\leqslant(1-c_2^{-1})(\|\widetilde{\nu}^1(\cdot,s_1)\|_{L_\infty}+\|\widetilde{\nu}^2(\cdot,s_1)\|_{L_\infty})=(1-c_2^{-1})\operatorname*{osc}_{y\in\mathbb{T}^d}\nu^{s_0}(y,s_1).\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (18.89) выводим оценку

$$\operatorname*{osc}_{y\in\mathbb{T}^d}\nu^{s_0}(\cdot,s)\leqslant c_3\exp(-c(s-s_0))\|\nu_0\|_{L_2(\mathbb{T}^d)},\quad s\geqslant s_0+1.\tag{18.90}$$

Из этой оценки и (18.88) следует

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathbb{T}^d}\nu_0(y)q^N(y,s_0)dy\right|&=\left|\int\limits_{\mathbb{T}^d}\nu^{s_0}(y,N)q_0(y)dy\right|\\&\leqslant c_3\exp(-c(N-s_0))\|q_0\|_{L_2(\mathbb{T}^d)}\|\nu_0\|_{L_2(\mathbb{T}^d)}.\end{aligned}$$

В силу произвольности ν_0

$$\|q^N(\cdot,s_0)\|_{L_2(\mathbb{T}^d)}\leqslant c_3\exp(-c(N-s_0))\|q_0\|_{L_2(\mathbb{T}^d)}.$$

Еще раз воспользовавшись оценкой Нэша, получим

$$\|q^N(\cdot,s_0)\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)}\leqslant c_4\exp(-c(N-s_0))\|q_0\|_{L_2(\mathbb{T}^d)},\quad N-s_0\geqslant 1.$$

Лемма доказана. □

Определим постоянный вектор $\overline{b}$ равенством

$$\begin{aligned}\overline{b}^i&=\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}a^{ij}(y,s)+b^i(y,s)\Big)p(y,s)dy\\&=\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\Big(-a^{ij}(y,s)\frac{\partial}{\partial y_j}p(y,s)+b^i(y,s)p(y,s)\Big)dy.\end{aligned}\tag{18.91}$$

Отметим, что подынтегральное выражение стационарно, поэтому правая часть не зависит от s и вектор $\overline{b}$ определен корректно. В дальнейшем мы покажем, что вектор $\varepsilon^{-1}\overline{b}$ играет роль эффективной конвекции в задаче (18.74). Все процессы, участвующие в определении $\overline{b}$, стационарны и эргодичны. По эргодической теореме Биркгофа имеем п.н.

$$\overline{b}^i = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}a^{ij}(y,s)+b^i(y,s)\Big)p(y,s)dy\,ds$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\Big(-a^{ij}(y,s)\frac{\partial}{\partial y_j}p(y,s)+b^i(y,s)p(y,s)\Big)dy\,ds. \qquad (18.92)$$

Для дальнейшего анализа нам понадобятся случайные процессы

$$\overline{\eta}^i(s) = \int_{\mathbb{T}^d}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}a^{ij}(y,s)+b^i(y,s)\Big)p(y,s)dy$$

$$= \int_{\mathbb{T}^d}\Big(-a^{ij}(y,s)\frac{\partial}{\partial y_j}p(y,s)+b^i(y,s)p(y,s)\Big)dy. \qquad (18.93)$$

С их помощью введем матрицу

$$(\sigma^2)^{ij} = \int_0^\infty \mathbf{E}(\eta^i(s)\eta^j(0)+\eta^j(s)\eta^i(0))ds \qquad (18.94)$$

Следующее утверждение будет играть ключевую роль при переходе к пределу и описании предельной динамики.

Лемма 18.7. *Интеграл в правой части* (18.94) *сходится. Процесс* $\eta(s)$ *удовлетворяет функциональной предельной теореме (принципу инвариантности) с ковариационной матрицей* σ^2, *т.е.*

$$\varepsilon\int_0^{t/\varepsilon^2}\eta(s)ds \xrightarrow{\mathscr{L}} \sigma W_t \quad \textit{при } \varepsilon\to 0$$

в $(C[0,T])^d$, *где* $W_\cdot$ *— стандартный* n*-мерный винеровский процесс.*

Доказательство. Покажем сначала, что при всех $T>0$

$$\|\mathbf{E}\{\eta(0)|\mathscr{F}_{\geqslant T}\}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_1(\exp(-cT)+\rho(T/2)), \qquad (18.95)$$

где $c>0$. Для этого на интервале $(0,T/2)$ представим функцию $p(y,s)$ в виде суммы $p(y,s)=p_1(y,s)+p_2(y,s)$, где p_1 и p_2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}p_m(y,s)+A_s^*p_m(y,s)=0, \quad s\leqslant\frac{T}{2}$$

и начальным условиям $p_1(y,T/2)=1$ и $p_2(y,T/2)=p(y,T/2)-1$. Тогда $\eta(0)=\eta_1(0)+\eta_2(0)$, где

$$\eta_m^i(0)=\int_{\mathbb{T}^d}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}a^{ij}(y,0)+b^i(y,0)\Big)p^m(y,0)dy, \quad m=1,2.$$

Из определения функции $p_1(0)$ и случайного вектора $\eta_1(0)$ следует, что они измеримы относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_{\leqslant T/2}$. Поэтому при выполнении одного (например, последнего) из условий перемешивания **A4** для условного математического ожидания $\mathbf{E}\{\eta_1(0)|\mathscr{F}_{\geqslant T}\}$ имеем

$$\|\mathbf{E}\{\eta_1(0)|\mathscr{F}_{\geqslant T}\}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \rho(T/2)\|\eta_1(0)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\rho(T/2). \tag{18.96}$$

Далее, согласно лемме 18.6 выполнена оценка $|p_2(y,0)| \leqslant c_1 \exp(-CT/2)$. Следовательно, $\|\mathbf{E}\{\eta_2(0)|\mathscr{F}_{\geqslant T}\}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\eta_2(0)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_2 \exp(-CT/2)$, что вместе с оценкой (18.96) дает искомое неравенство (18.95).

Как показано в [**76**, § 9.2], неравенство (18.95) обеспечивает справедливость функциональной центральной предельной теоремы для процесса $\eta(-s)$, что, в свою очередь, влечет функциональную центральную предельную теоремы для $\eta(s)$. Действительно, по теореме Прохорова (см. §2 и [**17**]) и в силу стационарности процесса $\eta(s)$ слабая компактность в $(C[0,T])^d$ распределений $\left\{\varepsilon \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \eta(-s)ds\right\}$ эквивалентна слабой компактности распределений $\left\{\varepsilon \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \eta(s)ds\right\}$. Сходимость конечномерных распределений процесса $\left\{\varepsilon \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \eta(-s)ds\right\}$ очевидным образом следует из сходимости соответствующих конечномерных распределений $\left\{\varepsilon \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} \eta(s)ds\right\}$.

Справедливость утверждения леммы при выполнении других условий перемешивания из **A4** проверяется точно так же. □

Помимо рассмотренного выше вспомогательного уравнения нам понадобится еще одно уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial s}\chi^i(y,s) - A_s\chi^i(y,s) = \frac{\partial}{\partial y_j}a^{ij}(y,s) + b^i(y,s) - \overline{b}^i - \eta^i(s). \tag{18.97}$$

Оно тоже имеет стационарное эргодическое решение.

Лемма 18.8. *Уравнение* (18.97) *имеет единственное стационарное решение, удовлетворяющее условию*

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \chi(y,s)p(y,s)dy = 0. \tag{18.98}$$

Это решение эргодично.

Доказательство. Умножим уравнение (18.97) на функцию $p(y,s)$ и проинтегрируем результат в цилиндре $\mathbb{T}^d \times (s_1, s_2)$. Интегрируя по частям и принимая во внимание определения $p(y,s)$, $\eta(s)$ и $\overline{b}$, получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \chi(y,s_2)p(y,s_2)dy - \int\limits_{\mathbb{T}^d} \chi(y,s_1)p(y,s_1)dy = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \chi(y,s)p(y,s)dy = \text{const}\,.$$

Теперь существование стационарного решения и его единственность и эргодичность при условии нормировки (18.98) доказываются точно так же, как в предложении 18.2; при этом используется оценка (18.90) и принцип максимума. □

18.2.3. *Априорные оценки.* Для получения априорных оценок в задаче (18.74), (18.75) и в задаче с правой частью вида

$$\frac{\partial}{\partial t}v^\varepsilon(x,t) = \operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla v^\varepsilon(x,t)\Big) \tag{18.99}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}b\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla v^\varepsilon(x,t) + f(x,t), \tag{18.100}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_0 \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T)), \tag{18.101}$$

будем использовать $p(y,s)$ в качестве весовой функции. Умножая (18.100) на выражение $v^\varepsilon(x,t)p(x/\varepsilon,t/\varepsilon^2)$ и интегрируя полученное равенство по $\mathbb{R}^d\times(0,T)$, после многократного интегрирования по частям получим равенство

$$\begin{aligned}
&1/2\int\limits_{\mathbb{R}^d} p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)(v^\varepsilon(x,t))^2dx - 1/2\int\limits_{\mathbb{R}^d} p\Big(\frac{x}{\varepsilon},0\Big)(v_0(x))^2dx\\
&+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d} a^{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}v^\varepsilon(x,s)\frac{\partial}{\partial x_j}v^\varepsilon(x,s)\,dx\,ds\\
&-1/2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}(v^\varepsilon(x,t))^2\Big[\frac{\partial}{\partial s}p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)+\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\\
&-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b^i\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\Big]\,dx\,ds+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d} v^\varepsilon(x,t)f(x,t)\,dxdt = 0.
\end{aligned}$$

В силу (18.77) выражение в квадратных скобках, а с ним и соответствующий интеграл, равен нулю. Поэтому в силу неравенства Коши — Буняковского и (18.80)

$$\|v^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))} + \|\nabla v^\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T)} \tag{18.102}$$

$$\leqslant C\|v_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}. \tag{18.103}$$

В частности, для решения задачи (18.74)–(18.75) получаем

$$\|u^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))} + \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\|u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{18.104}$$

18.2.4. *Предельный переход. Построение эффективной задачи.* В этом разделе мы найдем два первых члена асимптотики решения u^ε задачи (18.74)–(18.75) и охарактеризуем предельную задачу.

Определим коэффициенты $\overline{a}^{ij}$ равенством

$$\overline{a}^{ij} = \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\Big\{a^{ij}(y,s) + \frac{\partial}{\partial y_k}a^{ik}(y,s)\chi^j(y,s) + a^{ik}(y,s)\frac{\partial}{\partial y_k}\chi^j(y,s) + b^i(y,s)\chi^j(y,s)\Big\}p(y,s)dy.$$

Введем обозначение

$$a^{ij}_{\mathrm{aux}}(y,s) = \Big(a^{y,s} + \frac{\partial}{\partial y_k}\{a^{ik}(y,s)\chi^j(y,s)\} + a^{ik}(y,s)\frac{\partial}{\partial y_k}\chi^j(y,s) + b^i(y,s)\chi^j(y,s) - (\overline{b}^i + \eta^i(s))\chi^j(y,s)\Big)p(y,s).$$

Пусть $u^0(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}u^0(x,t) - \operatorname{div}(\overline{a}\nabla u^0(x,t)) = 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^d\times(0,T),\\ &u^0(x,0) = u_0(x).\end{aligned} \tag{18.105}$$

Теорема 18.10. *Пусть $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда п.н. справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u^0\Big(x + \frac{t}{\varepsilon}\overline{b} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \eta\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)ds, t\Big) - u^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} = 0.$$

Доказательство. Покажем, что для $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ функция

$$V^\varepsilon(x,t) = u^\varepsilon(x,t) - u^0\Big(x + \frac{t}{\varepsilon}\overline{b} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \eta\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)ds, t\Big) - \varepsilon\nabla_x u^0\Big(x + \frac{t}{\varepsilon}\overline{b} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \eta\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)ds, t\Big)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big)$$

стремится п.н. к нулю в норме $L_\infty(\mathbb{R}^d\times[0,T])\cap L_2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$, т.е. сумма второго и третьего члена в правой части последнего равенства приближает решение u^ε в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^d\times[0,T])\cap L_2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$. С этой целью подставим V^ε в уравнение (18.74). Введем обозначения

$$\frac{\partial}{\partial y_i}g\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) = \frac{\partial}{\partial y_i}g\Big(y, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \quad \frac{\partial}{\partial s}g\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) = \frac{\partial}{\partial y_i}g\Big(\frac{x}{\varepsilon}, s\Big)\Big|_{s=\frac{t}{\varepsilon^2}}$$

для произвольной функции $g(y,s)$ и

$$\widetilde{u}^0_\varepsilon(x,t) = u^0\Big(x + \frac{t}{\varepsilon}\overline{b} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \eta\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)ds, t\Big).$$

После простых преобразований найдем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}V^\varepsilon - \operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla V^\varepsilon\Big)\\ &= \frac{1}{\varepsilon}\Big\{\Big(-\overline{b} - \eta\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\cdot\nabla_x\widetilde{u}^0_\varepsilon(x,t) - \Big(\frac{\partial}{\partial y_i}a^{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big) + b^j\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}^0_\varepsilon(x,t)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(\frac{\partial}{\partial s}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)-\frac{\partial}{\partial y_i}a^{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_j}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\\
&-b^i\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_i}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\nabla_x\widetilde{u}_\varepsilon^0(x,t)\Big\}\\
&+\frac{\partial}{\partial t}u^0\Big(x+\frac{\tau}{\varepsilon}\overline{b}+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\eta\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)ds,t\Big)\Big|_{\tau=t}\\
&-\Big\{a^{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)+\overline{b}^i\chi^j\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)+\eta^i\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^j\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\\
&+\frac{\partial}{\partial y_k}\Big[a^{kj}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^i\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big]+a^{ik}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_k}\chi^j\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\\
&+b^i\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^j\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big\}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}_\varepsilon^0(x,t)\\
&+\varepsilon\nabla_x\Big(\frac{\partial}{\partial t}u^0\Big(x+\frac{\tau}{\varepsilon}\overline{b}+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\eta\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)ds,t\Big)\Big|_{\tau=t}\Big)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\\
&+\varepsilon a^{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\widetilde{u}_\varepsilon^0(x,t)\\
=&-\Big\{a^{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)+\overline{b}^i\chi^j\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)+\eta^i\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^j\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\\
&+\frac{\partial}{\partial y_k}\Big[a^{kj}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^i\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big]+a^{ik}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_k}\chi^j\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\\
&+b^i\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^j\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)-\overline{a}^{ij}\Big\}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}_\varepsilon^0(x,t)\\
&+\varepsilon\nabla_x\Big(\frac{\partial}{\partial t}u^0\Big(x+\frac{\tau}{\varepsilon}\overline{b}+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\eta\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)ds,t\Big)\Big|_{\tau=t}\Big)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\\
&+\varepsilon a^{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\chi^k\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\widetilde{u}_\varepsilon^0(x,t)\\
=&\Big(p^{-1}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)a^{ij}_{\mathrm{aux}}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)-\overline{a}^{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}_\varepsilon^0(x,t)+R_\varepsilon(x,t),
\end{aligned}
$$

где $\|R^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}\leqslant C\varepsilon$ и $\|V^\varepsilon(\cdot,0)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon$. В силу (18.103) вклад R^ε и $V^\varepsilon(\cdot,0)$ в решение пренебрежим при $\varepsilon\to 0$. Поэтому достаточно оценить решение задачи

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{V}^\varepsilon(x,t)&=\operatorname{div}\Big(a\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla\widetilde{V}^\varepsilon(x,t)\Big)+\frac{1}{\varepsilon}b\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla\widetilde{V}^\varepsilon(x,t)\\
&\quad+\Big(p^{-1}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)a^{ij}_{\mathrm{aux}}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)-\overline{a}^{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}_\varepsilon^0(x,t),\qquad(18.106)\\
\widetilde{V}^\varepsilon(x,0)&=0.\qquad(18.107)
\end{aligned}
$$

Так же, как в п. 18.2.3, умножив это уравнение на $p(x/\varepsilon,t/\varepsilon^2)\widetilde{V}^\varepsilon(x,t)$ и проинтегрировав результат по частям, найдем

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^d}(\widetilde{V}^\varepsilon(x,t))^2dx+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\nabla\widetilde{V}^\varepsilon(x,s)|^2\,dx\,ds
$$

$$\leqslant C\Big|\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widetilde{V}^\varepsilon(x,t)\Big(a^{ij}_{\mathrm{aux}}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)-p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\overline{a}^{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}^0_\varepsilon(x,s)\,dx\,ds\Big|.$$

Представим подынтегральное выражение в правой части в виде

$$\begin{aligned}&\Big(a^{ij}_{\mathrm{aux}}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)-p\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\overline{a}^{ij}\Big)\widetilde{V}^\varepsilon(x,s)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}^0_\varepsilon(x,s)\\&=\Big(\gamma_1^{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)+\gamma_2^{ij}\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\widetilde{V}^\varepsilon(x,s)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}^0_\varepsilon(x,t)\\&=\Big(\varepsilon\mathrm{div}\varkappa_1^{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)+\gamma_2^{ij}\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)\Big)\widetilde{V}^\varepsilon(x,s)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}^0_\varepsilon(x,t),\end{aligned}$$

где $\gamma_2^{ij}(s)=\int\limits_{\mathbb{T}^d}(a^{ij}_{\mathrm{aux}}(y,s)-p(y,s)\overline{a}^{ij})ds$, $\gamma_1^{ij}(y,s)=(a^{ij}_{\mathrm{aux}}(y,s)-p(y,s)\overline{a}^{ij})$ $-\gamma_2^{ij}(s)$ и $\varkappa^{ij,k}(y,s)$ — периодическая по y функция такая, что $\mathrm{div}_y\varkappa(y,s)=\gamma_1(y,s)$. Из этого представления получаем оценку

$$\begin{aligned}\|\widetilde{V}^\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\|\nabla\widetilde{V}^\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,t))}&\leqslant C\varepsilon\|\widetilde{V}^\varepsilon\|_{L_2(0,t;H^1(\mathbb{R}^d))}\\&+C\Big|\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widetilde{V}^\varepsilon(x,s)\gamma_2^{ij}\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}^0_\varepsilon(x,s)\,dx\,ds\Big|.\end{aligned}\tag{18.108}$$

По построению случайная функция $\gamma_2(s)$ стационарна и имеет нулевое среднее, поэтому по теореме Биркгофа функция $\gamma_2(s/\varepsilon^2)$ сходится п.н. к нулю слабо в $L_2(0,T)$. С помощью замены переменной найдем

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widetilde{V}^\varepsilon(x,s)\gamma_2^{ij}\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u}^0_\varepsilon(x,s)\,dx\,ds\\&=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widetilde{V}^\varepsilon\Big(x-\frac{s}{\varepsilon}\overline{b}-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s\eta\Big(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\Big)d\tau,s\Big)\gamma_2^{ij}\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}u^0(x,s)\,dx\,ds.\end{aligned}$$

Стремление к нулю этого интеграла вытекает из следующего утверждения.

Предложение 18.6. *Семейство функций*

$$\check{V}^\varepsilon(x,t)=\widetilde{V}^\varepsilon\Big(x-\frac{s}{\varepsilon}\overline{b}-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s\eta\Big(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\Big)d\tau,s\Big),$$

$\varepsilon>0$, $\omega\in\Omega$, *компактно в пространстве* $L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$.

Отложим на время доказательство предложения и закончим анализ сходимости функции $\widetilde{V}^\varepsilon$. Из (18.108) и предложения 18.6 следует сходимость $\widetilde{V}^\varepsilon$ п.н. к нулю в норме $L_2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))\cap L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))$, что завершает доказательство теоремы для гладких начальных условий u_0, поскольку в этом случае норма функции

$$\varepsilon\nabla_x u^0\Big(x+\frac{t}{\varepsilon}\overline{b}+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\eta\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)ds,t\Big)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)$$

в пространстве $L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^d))$ стремится к нулю.

Для общего начального условия $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$ утверждение теоремы можно получить с помощью аппроксимации функции u_0 гладкими финитными функциями, при этом используется оценка (18.103). Мы предоставляем это читателю. □

Переходим к основному результату этого раздела.

Теорема 18.11. *Пусть u^ε — решение задачи* (18.74), (18.75). *Тогда при $\varepsilon \to 0$ семейство функций $u^\varepsilon(x - t/\varepsilon\bar{b}, t)$ сходится по распределению в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ к случайной функции $u^0(x + \sigma W_t, t)$, где W_t — стандартный n-мерный винеровский процесс, и матрица σ задана в* (18.10). *Если $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, то эта функция является решением стохастического уравнения в частных производных*

$$du = (\bar{a}^{ij} + 1/2(\sigma^2)^{ij})\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u\, dt + \sigma \nabla u\, dW_t, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{18.109}$$

причем решение единственно и задает предельную меру однозначно.

Доказательство. По предыдущей теореме

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| u^\varepsilon\Big(x - \frac{t}{\varepsilon}\bar{b}, t\Big) - u^0\left(x + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \eta\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)ds, t\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))} = 0 \quad \text{п.н.}$$

Поэтому, чтобы проверить справедливость первого утверждения теоремы, достаточно показать, что $u^0\left(x + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \eta\Big(\frac{s}{\varepsilon^2}\Big)ds, t\right)$ сходится по распределению к функции $u^0(x + \sigma W_t, t)$. Эта сходимость следует из леммы 18.7 и непрерывности отображения $\Theta : (C(0,T))^d \to L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$, $\Theta[\psi(\cdot)](x,t) = u^0(x + \psi(t), t)$ (проверьте!).

Для обоснования второго утверждения теоремы применим к функции $u^0(x + \sigma W_t, t)$ формулу Ито — Крылова:

$$du^0(x + \sigma W_t, t) = \frac{\partial}{\partial t} u^0(z,t)\Big|_{z = x + \sigma W_t} dt + \sigma \nabla u^0(x + \sigma W_t, t) dW_t$$
$$+ 1/2 \sigma\sigma^* \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u^0(x + \sigma W_t, t).$$

В силу (18.105) это уравнение эквивалентно (18.109). Наконец, корректность задачи (18.109) доказана в [**41**]. □

Доказательство предложения 18.6. Обозначим

$$\widetilde{u}^\varepsilon(x,t) = u^\varepsilon\left(x - \frac{s}{\varepsilon}\bar{b} - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s \eta\Big(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\Big)d\tau, s\right).$$

Тогда по определению функции $\widetilde{V}^\varepsilon(x,t)$ имеем $\widetilde{V}^\varepsilon(x,t) = \widetilde{u}^\varepsilon(x,t) - u^0(x,t) + R_3(x,t)$, где $\|R_3\|_{L_2((0,T)\times\mathbb{R}^d}$ сходится п.н. к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поэтому достаточно доказать компактность семейства функций $\{\widetilde{u}^\varepsilon\}$.

Проверим, что функции $\widetilde{u}^\varepsilon$ локализованы, т.е. для каждого $\delta > 0$ найдется $N = N(\delta) > 0$ такое, что $\|\widetilde{u}^\varepsilon\|_{L_2(\{|x|>N\}\times(0,T))} \leqslant \delta$. Пусть $\varphi(s)$ —

гладкая функция, $0 \leqslant \varphi(s) \leqslant 1$, $\varphi(s) = 0$ при $s \leqslant 0$, $\varphi(s) = 1$ при $s \geqslant 1$. Обозначим $\varphi_N(x) = \varphi((|x| - N)/N)$ и $\varphi_N^\varepsilon(x,t) = \varphi_N\biggl(x - \dfrac{t}{\varepsilon}\overline{b} - \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^t \eta\Bigl(\frac{s}{\varepsilon^2}\Bigr)ds\biggr)$. Умножим (18.74) на функцию $u^\varepsilon(x,t)p^\varepsilon(x,t)\varphi_N^\varepsilon(x,t)$, где $p^\varepsilon(x,t) = p(x/\varepsilon, t/\varepsilon^2)$. Проинтегрировав полученное равенство и выполнив преобразования, подобные тем, что неоднократно выполнялись ранее, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (u^\varepsilon)^2(x,t)p^\varepsilon(x,t)\varphi_N^\varepsilon(x,t)\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla u^\varepsilon(x,s)|^2 p^\varepsilon(x,s)\varphi_N^\varepsilon(x,s)\,dx\,ds$$
$$\leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^d} (u_0)^2(x)\varphi_N(x)\,dx + \frac{C}{N}\|u^\varepsilon\|^2_{L_2(0,t;H^1(\mathbb{R}^d))}$$
$$+ C\int\limits_0^t |u^\varepsilon(x,s)|(|u^\varepsilon(x,s)| + |\nabla u^\varepsilon(x,s)|)\varphi_N^\varepsilon(x,s)\,dx\,ds.$$

При подходящем выборе N первые два члена правой части могут быть сделаны как угодно малыми, и требуемое утверждение о локализации следует из леммы Гронуолла.

Для произвольного $\delta > 0$ зафиксируем $N(\delta)$ и выберем в $L_2(\{|x| < N\})$ ортонормированный базис $\{e_j(x)\}$, состоящий из гладких функций, обращающихся в нуль при $|x| = N$. Представим решение $\widetilde{u}^\varepsilon$ в виде $\widetilde{u}^\varepsilon = \sum\limits_{j=1}^\infty \alpha_j^\varepsilon(t)e_j(x) + r^\varepsilon(x,t)$, где α_j^ε — соответствующие коэффициенты Фурье. По доказанному выше $\|r^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant \delta$. Далее, в силу (18.104) можно выбрать $M = M(\delta)$ так, что $\sum\limits_{j=M+1}^\infty \|\alpha_j^\varepsilon e_j\|_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant \delta$. При каждом j

$$|\alpha_j^\varepsilon(t) - (\widetilde{u}^\varepsilon(t)\widetilde{p}^\varepsilon(t), e_j)| = |(\widetilde{u}^\varepsilon(t)(\widetilde{p}^\varepsilon(t) - 1), e_j)| \leqslant C\varepsilon\|\widetilde{u}^\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|e_j\|_{H^1(\mathbb{R}^d)},$$

где $\widetilde{p}^\varepsilon(x,t) = p^\varepsilon\biggl(x - \dfrac{t}{\varepsilon}\overline{b} - \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^t \eta\Bigl(\frac{s}{\varepsilon^2}\Bigr)ds, t\biggr)$. Пусть $\widetilde{\alpha}_j^\varepsilon(t) = (\widetilde{u}^\varepsilon(t)\widetilde{p}^\varepsilon(t), e_j)$. Из последней оценки получаем $\sum\limits_{j=1}^M \|(\alpha_j^\varepsilon - \widetilde{\alpha}_j^\varepsilon)e_j\|_{L_2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\varepsilon$.

Таким образом, достаточно проверить компактность семейства функций $\sum\limits_{j=1}^M \widetilde{\alpha}_j^\varepsilon e_j$. Умножив (18.74) на $p^\varepsilon(x,t)e_j(x)$ и проинтегрировав результат на множестве $\mathbb{R}^d \times (t_1, t_2)$, находим

$$|\widetilde{\alpha}_j^\varepsilon(t_2) - \widetilde{\alpha}_j^\varepsilon(t_1)| \leqslant C_j\int\limits_{t_1}^{t_2} \|u^\varepsilon(s)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\,ds \leqslant C_j\sqrt{|t_2 - t_1|}.$$

Здесь была использована априорная оценка для u^ε. По теореме Арцела семейство функций $\widetilde{\alpha}_j^\varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots, M$, компактно в $(C(0,T))^M$, что влечет требуемую компактность семейства $\sum\limits_{j=1}^M \widetilde{\alpha}_j^\varepsilon e_j$ в $L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$. $\square$