ПИСЬМЕННЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

А.С.Шамаев, Т.О.Капустина

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова
Россия, 119899, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

e-mail: shamaev@ipmnet.ru, okapustin@mtu-net.ru

Кафедра Дифференциальных уравнений Механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова представляет опыт проведения письменного экзамена по обыкновенным дифференциальным уравнениям и дифференциальным уравнениям с частными производными.

Ключевые слова: письменный экзамен по дифференциальным уравнениям.

Кафедра Дифференциальных уравнений Механико-математического факультета МГУ в течение последних двух десятилетий проводит письменный экзамен по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными. Предлагались и испытывались различные формы экзамена: экзаменационный вариант, состоящий только из задач, требующих значительной теоретической подготовки, экзаменационный вариант, состоящий из двух частей — “типовых” задач, решения которых разбирались на семинарских занятиях, и задач, требующих хорошего знания теоретического курса, а также экзаменационный вариант, состоящий из задач и вопросов по теоретическому курсу из заранее объявленного списка вопросов. При этом в двух последних случаях экзамен делился на две части, после каждой из которых работы сдавались, и было предусмотрено время для короткого (около 30 минут) отдыха между двумя частями экзамена. Кроме того, практиковалась и форма экзамена, сочетающая решения задач в письменной форме и сравнительно (с устным экзаменом) короткую беседу со студентом.

Каждая задача письменного экзамена оценивается, в зависимости от сложности, некоторым количеством баллов. Для получения определенной оценки нужно набрать соответствующую сумму баллов, причем на оценку "отлично"необязательно решать всё, а достаточно набрать примерно три четверти от максимальной суммы баллов. Как правило, критерии оценок объявляются в начале экзамена. Это позволяет студентам понять, как они написали работу, а преподавателям — не убеждать каждого студента в справедливости поставленной оценки.

На протяжении всего периода проведения письменных экзаменов сотрудники кафедры вели обсуждения его целесообразности и особенностей проведения. В настоящее время большинство сотрудников кафедры признает ряд преимуществ этого экзамена. К ним относятся единые требования к студентам, когда оценка не зависит от того, кто проверяет работу, а также техническая простота проведения. Однако имеются и недостатки. Это трудноустранимые возможности обмена информацией между студентами ("списывание"), отсутствие "живого общения"со студентом, которое позволяет с точки зрения некоторых преподавателей лучше и объективнее оценить знания и способности студента.

Тем не менее письменный экзамен прочно занял место в учебном процессе на кафедре дифференциальных уравнений. Совершенствование его технологии осуществляется сотрудниками кафедры и в настоящее время.

В данной статье мы приводим ряд вариантов письменных экзаменов по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными, предлагавшихся на экзаменах на Механико-математическом факультете МГУ. На основе задач письменных экзаменов сотрудниками кафедры разработан сборник задач [1].

ЭКЗАМЕНЫ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Экзамен по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2001 г., лектор В.М.Миллионщиков.

$$\text{Оценка} = \min\left\{5\,;\;2+\left[\frac{S}{6}\right]\right\},\ \text{где}\ S-\ \text{сумма набранных баллов.}$$

1. (3 балла) При каких $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ уравнение
$$\ddot{x}+ax=a+(b-1)\cos(bt)$$
имеет хотя бы одно периодическое решение?

2. (4 балла) Нарисовать фазовый портрет системы
$$\dot{x}=2x-\sin(x+y),\qquad \dot{y}=x+y$$
вблизи начала координат. Устойчиво ли нулевое решение этой системы по Ляпунову?

3. (4 балла) Найти $\dfrac{\partial}{\partial\mu}x(t,\mu)$ при $\mu=0$, где $x(t,\mu)-$ решение уравнения $\ddot{x}+\sin x=0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0,\mu)=\mu$, $\dot{x}(0,\mu)=\mu^2$.

4. (6 баллов) Верно ли утверждение: всякое решение уравнения $t^3\ddot{x}+x=0$, определенное на $(1,+\infty)$, имеет бесконечно много нулей?

5. (8 баллов) Имеет ли уравнение
$$x\,\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}=0$$
хоть одно неограниченное решение, определенное в некоторой окрестности окружности $(x-2)^2+y^2=1$?

Экзамен по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2002 г., лектор А.Ф.Филиппов.

1. а) (2 балла) Указать все точки (x_0,y_0), для которых теорема существования и единственности гарантирует однозначную разрешимость задачи
$$(y-3)y'=x(y^2-4)\ln(y+3),\qquad y(x_0)=y_0.$$
   б) (1 балл) Сформулировать теорему существования и единственности решений для системы уравнений.

2. Известно, что уравнение
$$y'''+a(x)y'+b(x)y=0$$
с непрерывными в некоторой окрестности точки $x=0$ коэффициентами $a(x)$ и $b(x)$ имеет частные решения
$$y_1=x^3+2x-2,\qquad y_2=1+\operatorname{tg}2x.$$

a) (2 балла) Найти хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

б) (2 балла) Существует ли такое решение y_3, что вронскиан $W(y_1, y_2, y_3) \equiv const \neq 0$?

3. а) (3 балла) Найти вещественное общее решение системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

б) (2 балла) Найти матрицу e^{tA} в вещественной форме.

ЭКЗАМЕНЫ ПО УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Экзамен по уравнениям с частными производными 1994 г., лектор Е.М.Ландис.

1. $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2_{x,t})$ — решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ в $\mathbb{R}^2_{x,t}$. На интервале $\{\alpha < x < \beta,\ t = 0\}$ $u = u_t = 0$. Где на плоскости $\mathbb{R}^2_{x,t}$ $u(x,t)$ необходимо равно нулю?

2. $u(x,t)$ — решение уравнения $u_t = u_{xx}$ в полуполосе $\Pi = \{0 < x < l,\ t > 0\}$, непрерывное в $\overline{\Pi}$, $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$. К чему стремится решение при $t \to \infty$?

3. Найти решение задачи

$$\Delta u = 2 \quad \text{в круге } K = \{(x,y) \,\big|\, x^2 + y^2 < 1\}, \quad u\big|_{\partial K} = \sin 2\varphi.$$

4. $u(x,y)$ — потенциал двойного слоя гладкой замкнутой кривой $L \subset \mathbb{R}^2$. Доказать, что

$$u(x,y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \to \infty.$$

5. $B \subset \mathbb{R}^n$ — открытый шар, $u(x)$ непрерывна в $\overline{B}$ и $\forall x \in B$ $\exists \rho_x > 0$ такое, что шар $B(x, \rho_x)$ радиуса ρ_x с центром в точке x содержится в B и

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,\rho_x)|} \int\limits_{B(x,\rho_x)} u(y)\, dy.$$

Доказать, что $u(x)$ — гармоническая функция.

Экзамен по уравнениям с частными производными 2000 г., лектор А.С.Шамаев.

1. а) (1) Напишите формулу Даламбера для решения уравнения колебаний струны.

б) (3) Пусть $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{R}^2$. Корректна ли задача: найти $u(x,y) \in C^2(K) \cap C(\overline{K})$, такую что

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad \text{в} \quad K, \qquad u\big|_{\partial K} = \varphi(x,y),$$

$\varphi(x,y) \in C(\partial K)$ — произвольная непрерывная функция?

2. а) (1) Дайте определение пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$.

б) (2) Докажите полноту пространства $H^1(Q)$.

в) (3) Пусть $Q = \{|x| < 1, \ x \in \mathbb{R}^3\}$. Справедливо ли следующее утверждение: существует постоянная $C > 0$, такая, что для любой $u(x) \in C^\infty(\overline{Q})$

$$\big|u(0)\big| \leqslant C\big\|u\big\|_{H^1(Q)}?$$

Если "да— докажите, "нет— приведите опровергающий пример.

3. а) (3) Пусть $K = \{1 < |x| < 2\}$ — "кольцевая"область в $\mathbb{R}^2$. Единственно ли решение следующей краевой задачи:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad K, \qquad u \in C^2(K) \cap C^1(\overline{K}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{|x|=1} = \varphi_1(x_1,x_2), \qquad u\big|_{|x|=2} = \varphi_2(x_1,x_2),$$

φ_1, φ_2 — произвольные непрерывные функции на окружностях $\{|x| = 1\}$ и $\{|x| = 2\}$ соответственно? Ответ обоснуйте.

б) (2) Найдите решение поставленной в п. (а) задачи, если

$$\varphi_1 = \cos\theta, \qquad \varphi_2 = \sin\theta$$

(θ — полярный угол на плоскости).

4. а) (1) Сформулируйте принцип максимума для уравнения Лапласа.

б) (3) Справедлив ли принцип максимума для уравнения

$$\Delta u + u_x + u = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

в ограниченной области Q на плоскости в той же форме, как для уравнения Лапласа? Ответ обоснуйте.

5. а) (1) Сформулируйте теорему Лиувилля для уравнения Лапласа.

б) (3) Пусть $u(x)$ — гармоническая в $\mathbb{R}^3$ функция и

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(x)\,dx}{(1+|x|)^3} < \infty.$$

Верно ли, что $u(x) \equiv const$ в $\mathbb{R}^3$? Ответ обоснуйте.

6. а) (1) Дайте определение потенциала двойного слоя.

   б) (3) Докажите, что потенциал двойного слоя, создаваемый замкнутой поверхностью Ляпунова S и имеющий единичную плотность, равен 0 вне S и 4π внутри S.

7. а) (1) Напишите формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

   б) (3) Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения теплопроводности с "потенциалом":

$$u_t = u_{xx} - u, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \sin^2 x.$$

Докажите, что существует постоянная A, такая, что

$$\left|u(t,x) - Ae^{-t}\right| \leqslant \alpha(t)e^{-t},$$

где функция $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Найдите постоянную A.

Критерии оценок: “отлично” — 22 балла; “хорошо” — 15 баллов; “удовлетворительно” — 10 баллов при максимально возможной сумме 31 балл. Время написания — 3 астрономических часа.

Экзамен по уравнениям с частными производными 2002 г., лектор А.С.Шамаев.

Первая часть (1.5 астрономических часа)

1. (2) Решите краевую задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad t < 2x, \quad x > 0,$$

$$u\big|_{t=2x} = \sin x, \quad x > 0, \qquad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 1.$$

2. (2) Решите задачу Дирихле в кольце $K = \big\{1 < |x| < 3\big\}$,

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad K, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial r} + u\right)\bigg|_{r=1} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=3} = 2,$$

   r — радиальная координата.

3. (2) Дана задача Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} = \Delta u(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \left(1 + |x|^2\right)^{-1}, \qquad u_t\big|_{t=0} = \sin|x|.$$

   Найдите величину $u(10,0,0,0)$.

Вторая часть (1.5 астрономических часа)

1. а) (1) Сформулируйте принцип максимума для уравнения теплопроводности.
   б) (1) Сформулируйте теоремы о среднем для гармонических функций.

2. (2) Найдите хотя бы одно решение уравнения

$$u'' + u = \delta_0'$$

   в классе обобщенных функций.

3. (2) Определите потенциал простого слоя и докажите, что он убывает на бесконечности как $\dfrac{C}{|x|}$.

4. (3) Единственно ли решение следующей внешней задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C(\partial\Omega),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega} \big(1 + |x|\big)\, u^2(x)\, dx < \infty?$$

   Ответ обоснуйте.

5. (3) Докажите неравенство Фридрихса. Пусть Ω_1 и Ω_2 — две ограниченные области и объем Ω_1 больше объема Ω_2. Можно ли на основании этого сравнить постоянные в неравенствах Фридрихса для двух областей? Ответ обоснуйте.

Список литературы

[1] Сборник задач по уравнениям с частными производными под редакцией А.С.Шамаева. М.: Бином, 2005.