СТУДЕНЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

А.С.Шамаев, Т.О.Капустина

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова
Россия, 119899, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

e-mail: shamaev@ipmnet.ru, okapustin@mtu-net.ru

Кафедра Дифференциальных уравнений Механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова представляет опыт проведения математических олимпиад по дифференциальным уравнениям для студентов 2–3 курсов.

Ключевые слова: курс дифференциальных уравнений с частными производными, олимпиада.

Цель настоящей статьи — поделиться опытом сотрудников кафедры Дифференциальных уравнений Механико-математического факультета МГУ в проведении студенческих одимпиад по дифференциальным уравнениям. Они проводятся кафедрой в течение последних пяти лет и пользуются популярностью среди студентов. Победители получают обычно отличные оценки по предмету без экзамена и подарки в виде научных книг.

Вариант олимпиады состоит из большого количества задач (около десяти), оцененных баллами. Задача студента — набрать максимальное количество баллов. Время для решения задач — три астрономических часа. Можно пользоваться любыми материалами и книгами. Все задачи решить практически невозможно, поэтому студентам предлагается забрать варианты с собой и порешать их еще дома в целях подготовки к предстоящему экзамену. Победители приглашаются также на отборочный тур для формирования команды на международную студенческую олимпиаду.

Мы приводим в настоящей статье варианты последних четырех олимпиад по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными. Варианты олимпиад по уравнениям с частными производными приведены в [1]. Некоторые варианты с указаниями к решениям приведены в [2].

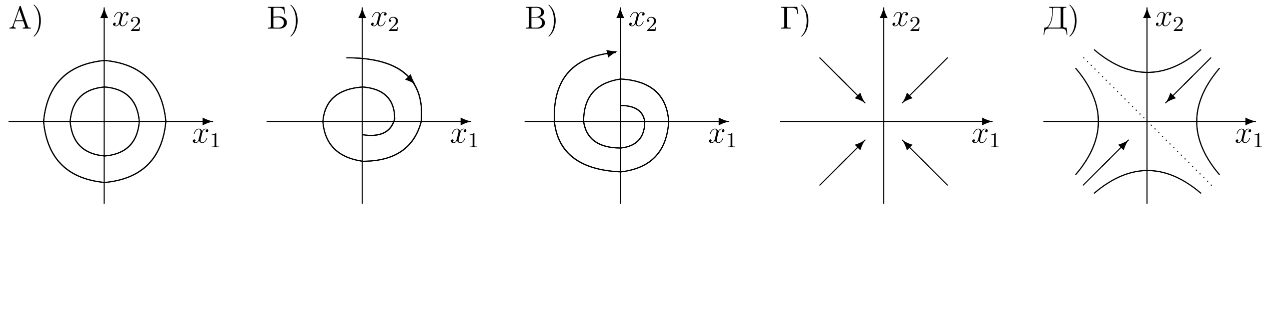
ОЛИМПИАДЫ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2004 г.

1. (2 балла) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = F'_{x_2}(x_1, x_2), \qquad \dot{x}_2 = -F'_{x_1}(x_1, x_2),$$

где $F(x_1, x_2)$ — гладкая функция. Пусть $\nabla_x F(0,0) = 0$. Какое поведение траекторий возможно в окрестности точки $(0,0)$? Ответ обоснуйте.



2. (2 балла) Пусть абсолютно непрерывная функция $u(t)$ удовлетворяет почти всюду уравнению
$$\dot u(t) + u(t-1) = 0 \quad \text{на} \quad [0,3] \qquad \text{и} \quad u(t) \equiv 1 \quad \text{на} \quad [-1,0].$$
Найдите $u(3)$.

3. (3 балла) В долине реки МГАГБЕ приживают два племени — МГАНГО и МУМБО–ЮМБО. Оба они занимаются собирательством и разведением скота, а также совершают набеги друг на друга. Примем, что совокупный ресурс племен составляет соответственно x_1 и x_2 (это имущество, запасы продуктов, скот и пр.) и скорость его прироста пропорциональна его величине с коэффициентами a_1 и a_2 для каждого племени соответственно. Однако с увеличением ресурсов численность племен пропорционально возрастает, жителям становится тесно в долине реки МГАГБЕ, и они начинают конкурировать со своими соплеменниками, мешая друг другу. За счет этого ресурс каждого племени уменьшается на величину $c_1x_1^2$ и $c_2x_2^2$ соответственно. Кроме того, племена враждуют друг с другом и, совершая набеги, наносят друг другу взаимный ущерб, равный $b_1x_1x_2$ для МГАНГО и $b_2x_1x_2$ для МУМБО–ЮМБО, где b_1 и b_2 — коэффициенты "агрессивности". Составьте уравнение динамики ресурсов племен и на основании этих уравнений предскажите, какой из сценариев развития событий в долине реки МГАГБЕ возможен:

   а) одно из племен полностью побеждает другое;

   б) обо племени сосуществуют с ненулевыми совокупными ресурсами;

   в) возможно и то и другое в зависимости от параметров a_i, b_i, c_i.

4. (4 балла) Рассмотрим уравнение
$$\ddot x + (\dot x)^n + x^m = 0,$$
n, m — натуральные числа. (Эта система описывает движение нелинейной колебательной системы с трением, также нелинейно зависящим от скорости.) При каких n и m положение равновесия $(0,0)$ устойчиво по Ляпунову?

5. (4 балла) Рассмотрим уравнение с начальными условиями
$$\ddot x_\varepsilon + a\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)x_\varepsilon = 0, \qquad x_\varepsilon(0) = 0, \quad \dot x_\varepsilon(0) = 1, \qquad a(t) = \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad t \in \big[0,\, \frac12\big], \\ \beta & \text{при} \quad t \in \big[\frac12,\, 1\big], \end{cases}$$
α, β — положительные постоянные, ε — малый параметр. Это уравнение с разрывными коэффициентами, и его решение — это функция, удовлетворяющая уравнению внутри каждого отрезка $\big[\varepsilon k,\, \varepsilon(k+\frac12)\big]$, $\big[\varepsilon(k+\frac12),\, \varepsilon(k+1)\big]$, непрерывная и имеющая равные нулю скачки первых производных в точках разрыва $a\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)$. Существует ли предел $x_\varepsilon(1)$ при $\varepsilon \to 0$?

6. (2 балла) Доказать, что замкнутые фазовые кривые квадратичного векторного поля на плоскости выпуклы.

7. (3 балла) Дано уравнение n–ого порядка с постоянными коэффициентами. Всегда ли существует решение этого уравнения, по которому можно восстановить все коэффициенты уравнения?

8. (4 балла) Известно уравнение движения маятника

$$x'' + bx' + x = 0, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = v.$$

Из–за сопротивления среды b колебания затухают. Чтобы колебания не затухали, в каждый такой момент t_i, что $x(t_i) = 0$, $x'(t_i) > 0$, маятнику сообщается дополнительный импульс, не меняющий $x(t_i)$, но увеличивающий (мгновенно) скорость $x'(t_i)$ в k раз. Каким должно быть k, чтобы движение маятника было периодическим?

9. (5 баллов) Функция $x(t) \in C^2[0, \pi]$ и удовлетворяет условиям

$$\ddot{x} + x \geqslant 0, \qquad x(0) \geqslant 0, \quad x(\pi) \geqslant 0.$$

Доказать, что $x(t) = C \sin t$.

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2005 г.

1. Пусть $x_0 = 0$ — изолированное положение равновесия системы

$$\dot{x} = \nabla f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^2,$$

причем 0 не является точкой максимума для $f(x)$. Может ли это положение равновесия быть устойчивым?

2. Решение уравнения

$$\ddot{x} + (\sin t)\, x = 0$$

удовлетворяет условиям $x(1) = x(2) = 0$. Докажите, что $x(t) \equiv 0$.

3. Известно, что все решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}x \equiv x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ \dots\ + a_n x = 0$$

ограничены на всей прямой. Сохраняется ли это свойство для уравнения $\mathcal{L}x = \varphi(t)$, если

   а) $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$;

   б) $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\quad \big|\varphi(t)\big| \to 0$ при $|t| \to \infty$?

4. Пусть $f, g \in C^3(\mathbb{R})$. Известно, что $W(f, g) \neq 0$ на $[a, b]$, W — определитель Вронского функций f, g. Докажите, что существует функция $h \in C^3(\mathbb{R})$, такая, что $W(f, g, h) \neq 0$ на $[a, b]$.

5. Имеет ли решение задачи Коши

$$\dot{x} = (t^2 + x)^{-1}, \qquad x(1) = 1$$

конечный предел при $t \to \infty$?

6. Устойчиво ли нулевое положение равновесия уравнения
$$x^{(2004)} + (x)^{2005} = 0\,?$$

7. Выяснить, при каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ система
$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\,(y^6 - x^3) - y^2(x + 3y^4), \\ \dot{y} &= a\,(x^8 + y^3) - x^2(y + 3x^6) \end{aligned}$$
имеет периодические решения, отличные от точки равновесия.

8. Найти решение системы
$$\dot{x} = Ax + e^t \sin t\, a_6$$
с начальным условием $x(0) = a_6, \quad x \in \mathbb{R}^6,$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Докажите, что существует значение параметра λ, при котором уравнение
$$\ddot{x} + t\dot{x} - t^2 x = \lambda x$$
имеет решение $x(t)$, стремящееся к нулю при $|t| \to \infty$.

10. Рассмотрим уравнение маятника
$$\ddot{x} + \omega^2 x = u(t),$$
$u(t)$ — управляющая сила, $\bigl|u(t)\bigr| \leqslant 1$. На какое максимальное расстояние можно увести маятник из начального состояния покоя за время T?

11. Множество M точек $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению $F(x, y, p) = 0$, диффеоморфно сфере, причем граница Γ проекции M на плоскость (x, y) является гладкой кривой. Может ли эта кривая быть решением неявного дифференциального уравнения
$$F\Bigl(x, y, \frac{dy}{dx}\Bigr) = 0\,?$$
Тот же вопрос для случая, когда Γ не является гладкой в изолированных точках.

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2006 г.

1. (1 балл) Одно из решений уравнения $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ устойчиво по Ляпунову. Докажите, что любое решение устойчиво по Ляпунову.

2. (2 балла) Найдите производную порядка n по параметру a в точке $a=0$ выражения

$$\det\left(\int\limits_0^a \exp(At)\,dt\right),$$

где A — произвольная обратимая матрица размерности n.

3. (2 балла) Докажите, что у линейной системы $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ не может быть предельных циклов (изолированных периодических решений).

4. (5 баллов) Известно, что $x \equiv 0$ — решение уравнения $\dot{x} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, и что решение $y \equiv 0$ его линеаризации $\dot{y} = f'_x(0,t)y$ асимптотически устойчиво. Покажите на примере, что нулевое решение исходного уравнения может не быть асимптотически устойчивым.

5. Дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, с непрерывной правой частью не удовлетворяет в некоторых точках условиям теоремы о единственности решения. Может ли оно иметь:

   а) (2 балла) множество решений $x_a(t)$, $a \in \mathbb{R}$, для которых $x_a(0) = 0$ и $x_a(1) = a$?

   б) (3 балла) два решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, такие, что $x_1(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, а $x_2(0) = 1$, $x_2(1) = 0$?

   в) (2 балла) такие же вопросы для для уравнения вида $\dot{x} = f(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$.

6. (3 балла) Докажите, что для всякого ненулевого решения $x(t)$ уравнения $\ddot{x} + \omega^2(t^2+1)x = 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся два различных момента времени t_1, t_2, такие, что $x(t_1) = x(t_2) = 0$ и $|t_1 - t_2| < \varepsilon$.

7. (5 баллов) Докажите, что нулевое решение уравнения $\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0$ асимптотически устойчиво, если известно, что $\varphi(0) = f(0) = 0$, и при $x \neq 0$ $x\varphi(x) > 0$, $xf(x) > 0$.

8. (5 баллов) Решить систему уравнений $\dot{x} = Ax$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \sin t \\ 1 & 0 & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}$$

9. а) (2 балла) Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два линейно независимых решения линейного дифференциального уравнения третьего порядка. Может ли определитель Вронского $x_1(t)$ и $x_2(t)$ обращаться в ноль на некотором интервале?

   б) (3 балла) Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ — три линейно независимых решения линейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Может ли определитель Вронского $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ обращаться в ноль на некотором интервале?

10. (3 балла) Нарисовать фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y^2 - x \\ \dot{y} &= 2xy - y \end{cases}$$

11. (4 балла) Оцените отличие от 2π периода решения уравнения физического маятника $\ddot{x} = -\sin x$ с малой амплитудой $x(0) = \mu$ ($\dot{x}(0) = 0$).

12. (5 баллов) Правая часть дифференциального уравнения математического маятника с трением (и внешней силой)
$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$
является гладкой функцией, удовлетворяющей условию $|f(t)| \leqslant (C + |t|)^{-k}$, $k > 0$, α — неотрицательное, β — положительное число. При каких значениях α, β, k можно так выбрать $f(t)$, чтобы раскачать маятник, то есть чтобы для некоторого решения $\sup\limits_{t\in[0,T]} |x(t)| \to \infty$ при $T \to \infty$?

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2007 г.

1. (3) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение матрицы $\exp\begin{pmatrix} B & C \\ A & -B^T \end{pmatrix}$, A, B, C — матрицы размерности $n \times n$, A, C — симметрические. Докажите, что $\overline{\lambda}$, λ^{-1}, $(\overline{\lambda})^{-1}$ — также ее собственные значения.

2. (1) Найдите какое–нибудь отличное от тождественного нуля аналитическое решение уравнения с "отклоняющимся"аргументом:
$$\frac{d}{dt}\,y(t) + y(t - \alpha) = 0, \qquad \alpha = const > 0.$$

3. (1) Найдите замену переменных, приводящую уравнение
$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = 0$$
$\big(f, g \in C(\mathbb{R})\big)$ к системе вида
$$\begin{cases} \dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -g(x). \end{cases}$$

4. (3) Какие значения может принимать величина $\dim X$, где X — пространство ограниченных на всей вещественной прямой решений уравнения
$$\ddot{y} + a(t)\,y = 0$$
$a(t)$ — гладкая периодическая функция, удовлетворяющая оценке $0 < m \leqslant a(t) \leqslant M < \infty$?

5. (2) Пусть $y(t)$ — решение уравнения
$$\ddot{y} + \omega^2\,y = f(t),$$
где $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^1} \big|f(t)\big| = \infty$. Может ли $y(t)$ быть ограниченным на $\mathbb{R}^1$?

6. Рассмотрим уравнение $y^{(n)} + a \cdot y = 0$, $a = const$. Существует ли такое целое n, что

   а) (2) уравнение имеет два линейно независимых решения y_1, y_2, такие, что каждое из решений имеет счетное число корней и множества корней для y_1, y_2 совпадают;

   б) (2) уравнение имеет два линейно независимых решения y_1, y_2, такие, что каждое из них имеет счетное количество корней, и при этом множества корней для y_1 и y_2 пересекаются по счетному множеству, но разность этих двух множеств также счетна.

7. (3) Привести пример такой непрерывной на $(0, +\infty)$ монотонной функции $a(t)$, чтобы все решения $\ddot{y} + a(t)\, y = 0$ стремились при $t \to +\infty$ к нулю.

8. а) (2) Доказать, что при любом значении параметра $\varepsilon > 0$ краевая задача

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y - 15, & x\big|_{t=0} = -1, \\ \varepsilon \dfrac{dy}{dt} = x + y - 3, & y\big|_{t=1} = 3, \end{cases}$$

   имеет единственное решение.

   б) (4) Пусть $x(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ — решение указанной краевой задачи. При каждом фиксированном значении $t \in [0,1]$ найти пределы: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon)$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y(t,\varepsilon)$.

9. (4) Решение с начальным условием $t = 0$, $x = y = 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = u(x,y) \\ \dot{y} = v(x,y) \end{cases}$$

   в момент времени $t = 2\pi$ проходит через точку $x = 1$, $y = 1$, а в момент $t = t_1$ через точку $x = 1$, $y = -1$. Какие значения может принимать t_1, если известно, что фазовый поток системы состоит из преобразований плоскости, сохраняющих элемент площади, и система является овеществлением комплексного уравнения $\dot{z} = f(z)$, где $f(z)$ — дифференцируемая функция, заданная на всей плоскости $z = x + iy$?

10. (2) Функция $\varphi(t,x,y)$ задает концентрацию яда, попавшего в реку, в точке с координатами x, y в момент времени t. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (y - x - t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (t - x - y)\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,.$$

   В начальный момент $t = 0$ функция $\varphi(0,x,y)$ представляла собой выпуклую (вверх) положительную функцию, заданную в области $x^2 + y^2 < 1$, $\varphi(0,x,y) \equiv 0$ при $x^2 + y^2 \geqslant 1$. Оцените число точек локального максимума функции $\varphi(1,x,y)$, площадь и положение зараженного пятна при $t = 1$.

Назовем имена победителей:
1 место – Ефимов (14 баллов), Перепетко (13 баллов);
2 место – Головко (11 баллов), Трепалин (11 баллов), Шаймуратов (10 баллов).

ОЛИМПИАДЫ ПО УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2004 г.

1. (2 балла) Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \qquad \text{где} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

(Шар "взрывается"). Нарисуйте $u(t,r)$ в моменты времени $t = 1$, $t = 3$ (решение, разумеется, зависит только от $r = |x|$).

2. (2 балла) Функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи

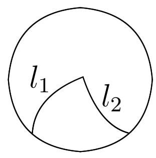
$$\ddot{u} + \dot{u} = u'' \qquad \text{на} \quad [0,\pi] \times [0,\infty),$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t\big|_{t=0} = \psi(x).$$

Верно ли, что $\big|u(x,t)\big| \to 0$ при $t \to \infty$? Ответ обоснуйте.

3. (5 баллов) Пусть $u(x,t)$ – гармоническая функция в цилиндре $Ц = \Omega \times [0,\infty)$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, и $u = 0$ на $\partial\Omega \times [0,\infty)$. Пусть также $\big|u(x,t)\big| \leqslant M$. Докажите, что $\big|u(x,t)\big| \to 0$ при $t \to \infty$.

4. (3+3 балла) Пусть A_1 и A_2 — подмножества функций в $C^\infty(K)$, K — единичный круг на плоскости, такие, что $\varphi\big|_{x_1=0} = 0$ и $\varphi'_{x_1}\big|_{x_1=0} = 0$ соответственно. Найдите коразмерности замыканий $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ этих множеств в пространстве $H^1(K)$.

5. (5 баллов) Пусть K — единичный круг на плоскости (x_1, x_2), l_1 и l_2 — два отрезка гладких кривых, пересекающихся в точке O под ненулевым углом. Может ли кривая $l_1 \cup l_2$ быть линией уровня гармонической функции? Ответ обоснуйте.



6. (5 баллов) Пусть Ω — область на плоскости, M — замкнутое множество в Ω и пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega \setminus M)$ совпадают на $\Omega \setminus M$. Докажите, что $\mu(M) = 0$.

7. (3 балла) Рассмотрим краевую задачу

$$\ddot{u} = u'' + f(x,t) \qquad \text{в} \quad [0,\pi] \times [0,\infty),$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \sin x, \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \qquad \big|f(x,t)\big| \leqslant M.$$

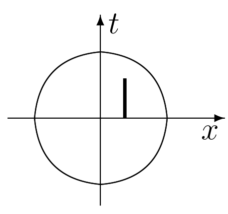
Можно ли выбрать $f(x,t)$ так, чтобы $u(x,t) \equiv 0$ для всех $t > T_0$? Ответ обоснуйте.

8. (3 балла) Пусть $u(x)$ – гармоническая в шаре $Ш \equiv \big\{|x| < 1\big\}$ функция,

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0 \qquad \forall\, x_0 \in \partial Ш \setminus x^*,$$

x^* — некоторая фиксированная точка на $\partial Ш$, и $\big|u(x)\big| < M$ в шаре $Ш$. Верно ли, что $u(x) \equiv 0$ в $Ш$? Ответ обоснуйте.

9. (4 балла) Может ли решение уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ иметь такую линию уровня:



Олимпиада по уравнениям с частными производными 2005 г.

1. (3) Справедлив ли принцип максимума для уравнений (здесь $(t,x)\in\mathbb{R}^2$):

   а) $u_{tt}-u_{xx}+u=0$;

   б) $u_{tt}+u_{xx}+u=0$?

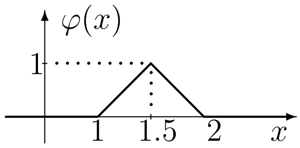
2. (2) Рассмотрим уравнение колебаний неоднородной струны

$$u_{tt}=a(x)\,u_{xx},\qquad a(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 2, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

   с начальными условиями

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\qquad u'_t\big|_{t=0}=0,$$

   график функции $\varphi(x)$ имеет вид



   Нарисуйте график решения в момент $t=5$.

3. (3) Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа в единичном квадрате $\square=[0,1]\times[0,1]$ на плоскости:

$$\Delta u=0\quad \text{в}\quad \square,$$

$$u\big|_{x=0}=\sin y,\qquad u\big|_{x=1}=\cos y,\qquad u'_y\big|_{y=0}=u'_y\big|_{y=1}=0.$$

   Докажите, что $\big|u(x,y)\big|\leqslant 1$.

4. (2) Пусть $u(t,x)$ — решение уравнения

$$u_t-u_x+2u=0$$

   в смысле теории обобщенных функций, равное гладким вплоть до границы функциям в областях $t>\varphi(x)$ и $t<\varphi(x)$ соответственно, и разрывное при $t=\varphi(x)$, $\varphi(x)$ — гладкая функция. Найдите $\varphi(x)$.

5. (5) Рассмотрим краевую задачу

$$u_t=u_{xx},\quad t\in\mathbb{R},\ \ x\geqslant 0,$$

$$u\big|_{x=0}=\varphi(t),\qquad |u|\leqslant M\quad \text{при}\ \ t\in\mathbb{R},\ \ x\geqslant 0,$$

   $\varphi(t)$ — ограниченная непрерывная функция. Единственно ли решение этой задачи?

6. (3) Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t=u_{xx},\qquad u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0,\qquad u\big|_{t=0}=\varphi(x)\in C_0^\infty[0,1].$$

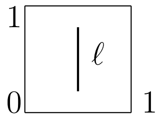
   Нам известна функция

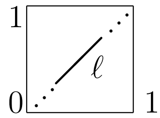
$$\psi(x)=\int\limits_0^T u(t,x)\,dt.$$

   Можно ли восстановить функцию $\varphi(x)$, зная $\psi(x)$?

7. (2+2) Функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad \text{в} \quad \square \setminus \ell,$$

а) 

б) 

$\square = [0,1] \times [0,1]$, ℓ — отрезок строго внутри $\square$. Возможно ли доопределить $u(t,x)$ до решения уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в $\square$ в случаях (а) и (б) соответственно?

8. Пусть функция $u(t,x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ является решением уравнения

$$u_t - u_x = 0$$

в смысле теории обобщенных функций. Верно ли, что существует $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^1)$, такая, что

$$u(t,x) = f(t+x)?$$

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2006 г.

1. (2) Решите краевую задачу

$$u''_{tt} = u''_{xx}, \qquad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u\big|_{t=0} = \sin x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \qquad (u'_x + \alpha u)\big|_{x=0} = 0.$$

2. (3) Отрезок $[-1,1]$ охлаждается в точке $x = 1$, т.е. $u(t,1) = -1$, а через точку $x = -1$ поступает постоянный поток тепла, т.е. $u'_x(t,-1) = 1$. Функция распределения температуры $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $u'_t = u''_{xx}$, начальное распределение температуры $u(0,x) = \varphi(x)$, $x \in (-1,1)$. Что происходит с точкой $x = 0$: нагревается она или остывает?

3. (5) Пусть ограниченная измеримая функция $u(t,x)$ — обобщенное решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что $u(t,x) = f(t-x) + g(t+x)$, где f, g — ограниченные измеримые функции на $\mathbb{R}^1$.

4. (4) Функция $u(t,x)$ является решением краевой задачи

$$u'_t = u''_{xx}, \qquad x \in [0,1], \quad t \in (0,+\infty),$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad u'_x(t,0) = u'_x(t,1) = 0.$$

Докажите, что для $u(t,x)$ имеет место оценка

$$\Big\| u(t,x) - \int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx \Big\|_{H^1(D_t)} \leqslant M e^{-\pi^2 t} \Big\| \varphi(x) \Big\|_{L_2(D_0)},$$

где $D_t = \{t\} \times [0,1]$, постоянная $M > 0$ не зависит от $\varphi(x)$.

5. (4) Справедлива ли теорема Лиувилля для решений в $\mathbb{R}^2$ уравнения

$$\Delta u + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + 2u = 0 \ ?$$

6. (4) Пусть $K = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — единичный круг на плоскости, и A — множество гладких функций на K, удовлетворяющих условию $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=0} = 0$. Найдите замыкание A в пространстве $H^1(K)$.

7. (3) Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши

$$u'_t = u''_{xx} + c\,u'_x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad u(0,x) = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — гладкая функция, такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = b$. Найдите $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,0)$.

8. 1) Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u'_t = u''_{xx}, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — гладкая функция, имеющая n простых нулей $x_1, \ldots, x_n$, $\varphi'(x_j) \neq 0$. Может ли у решения $u(t,x)$ этой задачи количество нулей по переменной x при увеличении t

а) (3) увеличиться?

б) (3) уменьшиться?

2) Хорошо известно, что задачи Коши для "обратного"уравнения теплопроводности

$$u'_t + u''_{xx} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

некорректна. Однако она разрешима, если $\varphi(x)$ — многочлен.

а) (3) Докажите это.

б) (5) Если многочлен $\varphi(x)$ n–й степени имеет n различных вещественных корней, то решение $u(t,x)$ при всех $t > 0$ как функция от переменной x сохраняет те же свойства.

9. Пусть $u(t,x)$ и $v(t,x)$ — решения задач Коши

а) $\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$ б) $\begin{cases} v''_{tt} = v''_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ v\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad v'_t\big|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$

Рассмотрим задачи, которые "заменяют"задачи Коши на краевые задачи в ограниченной области

$$\text{а}')\ \begin{cases} (u^N)'_t \ = \ (u^N)''_{xx} \quad \text{в} \quad [0,T] \times [-N,N], \\ u^N\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ u^N(t,-N) = \varphi(-N), \quad u^N(t,N) = \varphi(N); \end{cases}$$

$$
\text{б}') \quad \begin{cases} (v^N)''_{tt} \;=\; (v^N)''_{xx} \quad \text{в} \;\; [0,T]\times[-N,N], \\ v^N\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad\; (v^N)'_t\big|_{t=0} = \psi(x), \\ v^N(t,-N) = \varphi(-N), \quad\; v^N(t,N) = \varphi(N). \end{cases}
$$

Докажите, что

а) (5) $u^N(t,x) \to u(t,x)$ при $N \to \infty$,

б) (2) $v^N(t,x) \to v(t,x)$ при $N \to \infty$.

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2007 г.

1. (1) Найдите решение уравнения теплопроводности $u'_t = u''_{xx}$ в виде бегущей волны.

2. (4) Найдите явное решение задачи Коши

$$
\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial p}{\partial x} + x^2\,p, \qquad p(0,x) = 1.
$$

3. (3) Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = C(t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x),
$$

$\varphi(x)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = a$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = b$, $C(t)$ — гладкая строго положительная периодическая функция. Существует ли предел $u(t,x)$ при $t \to \infty$?

4. (3) Пусть $u(x) \in H^1(\square)$, где $\square = [0,1]\times[0,1] \in \mathbb{R}^2$. Функция $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, четно продолжается на прямоугольник $\Pi = [-1,1]\times[0,1]$. Докажите, что продолженная функция принадлежит $H^1(\Pi)$.

5. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

   а) (2) Докажите, что продолжение нулем $u(x)$ на $\mathbb{R}^n$ принадлежит $H^1(\mathbb{R}^n)$.

   б) (3) Верно ли обратное утверждение, именно: пусть $u(x)$ — такая функция на Ω, что ее продолжение на $\mathbb{R}^n$ нулем принадлежит $H^1(\mathbb{R}^n)$; можно ли утверждать, что $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$?

6. (3) Пусть $u(x), v(x) \in H^1(\Omega)$. Докажите, что $\max\big\{u(x), v(x)\big\} \in H^1(\Omega)$.

7. (4) Справедлива ли двусторонняя теорема Лиувилля для уравнения $\Delta u + a(x)\,u = 0$ в $\mathbb{R}^n$, где $a(x) < 0$ вне некоторой окрестности начала координат?

8. (3) Пусть $u(t,x)$ — решение краевой задачи

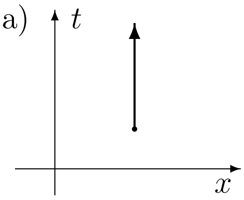
$$
u''_{tt} = u''_{xx} + f(t,x), \qquad u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = u'_t(0,x) = 0.
$$

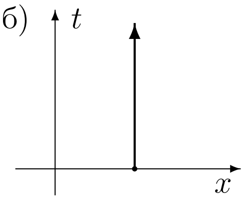
Известно, что $\big|f(t,x)\big|$ — неограниченная функция при $0 \leqslant t < \infty$, $x \in [0,1]$. Может ли $\big|u(t,x)\big|$ быть ограниченной на $[0,\infty)\times[0,1]$ функцией?

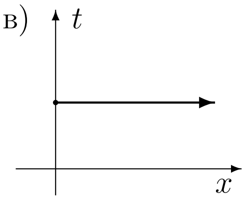
9. (2+2+2+4) Может ли решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

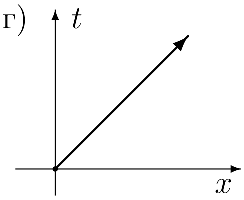
$$u'_t = u''_{xx}, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \big|\varphi(x)\big| \leqslant const, \quad \big|u(t,x)\big| \leqslant const,$$

иметь линию уровня $\big\{u(t,x) = 0\big\}$ следующего вида:

а) 

б) 

в) 

г) 

10. (6) Тот же вопрос о решении задачи Коши для уравнения колебаний струны

$$u''_{tt} = u''_{xx}, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t\big|_{t=0} = \psi(x).$$

Назовем имена победителей:
1 место – Айзенберг (16 баллов);
2 место – Баштанов (14 баллов), Шнурников (13 баллов).

Список литературы

[1] Сборник задач по уравнениям с частными производными под редакцией А.С.Шамаева. М.: Бином, 2005.

[2] Шамаев А.С. Олимпиады по дифференциальным уравнениям для студентов 2, 3 курсов механико–математического факультета МГУ. // Математика в высшем образовании. 2003. С 77–83.