ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Коновалова Александра Юрьевича «Конструктивные семантики логических языков, основанные на обобщенной вычислимости», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — «математическая логика, алгебра и теория чисел»

В диссертационной работе А.Ю. Коновалова рассматриваются некоторые вопросы конструктивной логики. Это направление исследований в нашей стране было начато А.Н. Колмогоровым и впоследствии развито А.А. Марковым и его школой. Оно характеризуется своеобразной трактовкой логических операций, при которой истинность высказывания связывается с наличием подтверждающей конструкции. Например, истинность импликации $A \to B$ означает существование алгоритма, который преобразует всякое обоснование для A в некоторое обоснование для B, а истинность универсального утверждения $\forall x\, A(x)$ означает наличие алгоритма, который для всякого объекта n строит обоснование для $A(n)$. Эта идея в точной математической форме была выражена американским математиком С.К. Клини в виде понятия рекурсивной реализуемости для языка формальной арифметики. При этом в качестве обоснований для импликации и универсального высказывания выступают гёделевы номера частично-рекурсивных функций.

Исследование конструктивной логики привело к рассмотрению понятий, выходящих за рамки узко конструктивной точки зрения. Так, В.Е. Плиско показал, что множество так называемых абсолютно реализуемых предикатных формул является Π^1_1-полным. Π^1_1-множества соответствуют перечислимым множествам в контексте гиперарифметической вычислимости, которая может служить основой для некоторого расширения конструктивной точки зрения. В диссертационной работе А.Ю. Коновалова решается задача разработки и исследования конструктивных семантик типа реализуемости, основанных на гиперарифметической и других видах обобщенной вычислимости.

Глава 1 носит вспомогательный характер. В ней разрабатывается техника обращения с функциями, вычислимыми в обобщенном смысле.

В главе 2 определяется понятие V-реализуемости для утверждений, формулируемых в некотором расширении L языка формальной арифметики, основанное на использовании в роли реализаций для импликации и квантора всеобщности индексов функций из класса V, где V — класс примитивно рекурсивных, частично-рекурсивных, арифметических, гиперарифметических функций (или некоторый промежуточный класс), а L — язык формальной арифметики или некоторое его расширение. Доказывается вполне естественный результат о том, что в случае, когда класс V содержит все функции, определимые в языке L, то V-реализуемость совпадает с обычной классической семантикой для языка L (теорема 2).

В главе 3 исследуются различные варианты семантики предикатных формул, основанные на понятии V-реализуемости. Эти варианты отличаются тем, используются ли для интерпретации предикатных переменных формулы какого-либо языка L (V-реализуемость относительно L-оценок) или же предикатные переменные интерпретируются как так называемые обобщенные предикаты, заданные на некотором множестве натуральных чисел (абсолютная V-реализуемость). Рассматривается вопрос о корректности известных логических систем относительно таких семантик. Сначала этот вопрос исследуется для классического исчисления предикатов CPC. Из результатов главы 2 следует, что если класс V содержит все функции, определимые в языке L, то V-реализуемыми относительно L-оценок оказываются в точности все формулы, выводимые в CPC (теорема 3). В противном случае оказывается нереализуемым предикатный вариант закона исключенного третьего. В этой ситуации оказывается интересным вопрос, является ли классически общезначимой всякая реализуемая предикатная формула. Известный результат В.П. Оревкова говорит, что в случае обычной рекурсивной реализуемости это не так. В диссертационной работе А.Ю. Коновалова аналогичный результат устанавливается для абсолютной V-реализуемости, когда V — класс всех примитивно рекурсивных функций (теорема 5). В то же время, если V – класс всех арифметических функций или какой-либо более широкий из рассматриваемых классов, то всякая абсолютно V-реализуемая формула выводима в CPC (теорема 4). Затем исследуется вопрос о корректности интуиционистского исчисления предикатов IPC относительно абсолютной V-реализуемости. Известно, что это исчисление корректно относительно обычной рекурсивной реализуемости. В диссертационной работе А.Ю. Коновалова строится пример формулы, выводимой в IPC, которая не является абсолютно V-реализуемой, когда V — класс всех арифметических функций или любой более широкий из рассматриваемых классов (теорема 6). Доказывается, что принцип Маркова является абсолютно V-реализуемым (теорема 8), но не равномерно абсолютно V-реализуемым (теорема 9). Наконец, исследуется вопрос о корректности базисного исчисления предикатов BQC, введенного В. Руйтенбургом и основанного на идеях А. Виссера, относительно V-реализуемости. Поскольку исчисление BQC имеет секвенциальную форму, то понятие V-реализуемости распространяется на секвенции. Корректность BQC для V-реализуемости относительно арифметических оценок для случая, когда V — класс всех примитивно рекурсивных функций, была доказана С. Салехи, который впервые ввел понятие примитивно рекурсивной реализуемости для языка базисной арифметики. В диссертационной работе А.Ю. Коновалова доказывается, что всякая формула, выводимая в BQC, является равномерно абсолютно реализуемой для всех других рассматриваемых классов V (теорема 12). Результаты этой главы в некоторой степени основаны на идеях, использовавшихся ранее другими исследователями при изучении примитивно рекурсивной реализуемости, однако для реализации этих идей потребовалось применение новой техники, разработанной в диссертации.

В главе 4 вводится понятие V-реализуемости для языка теории множеств. В интуиционизме вместо понятия множества используется понятие вида как некоторого свойства объектов, сформулированного на подходящем языке. При этом факт принадлежности объекта данному виду должен подтверждаться некоторым «свидетелем». В диссертационной работе А.Ю. Коновалова рассматривается трактовка видов как двухместных гиперарифметических отношений. Фиксируется нумерация таких отношений. Тогда $D_b(a, x)$ понимается так, что натуральное число a является «свидетелем» того, что объект с номером x является членом вида с номером b. Затем определяется универсум Δ как трансфинитная иерархия таких видов по всем не более чем счетным ординалам, так что элементами вида данного уровня могут быть только виды более низкого уровня. Понятие V-реализуемости переносится на язык теории множеств: если a и b — номера видов из универсума Δ, то число e реализует высказывание $a \in b$, если и только если имеет место $D_b(e, a)$. Затем рассматривается вопроос о реализуемости различных аксиом классической и неклассической теории множеств. Оказывается, что аксиома объемности и аксиома степени не являются V-реализуемыми для рассматриваемых классов функций V (теорема 16). В то же время оказываются V-реализуемыми все нелогические аксиомы теории CZF^- — конструктивной теории множеств CZF без аксиомы объемности, когда V — класс всех частично-рекурсивных или любой из рассматриваемых классов, промежуточных между классами всех частично-рекурсивных функций и всех гиперарифметических функций (теорема 17). Отсюда и из результатов главы 3 о корректности базисной логики относительно V-реализуемости следует, что все формулы, выводимые в системе CZF^-, основанной на базисной логике, V-реализуемы (теорема 18). Таким образом, результаты этой главы дают трактовку некоторых неклассических систем теории множеств как конструктивной теории гиперарифметических видов. Эти результаты представляются важными и крайне интересными.

Диссертационная работа А.Ю. Коновалова содержит ряд новых научных результатов, выдвинутых на публичную защиту, и свидетельствует о способности автора к самостоятельной научной работе. Основные научные результаты своевременно опубликованы, в том числе в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Автореферат правильно отражает содержание диссертационной работы. Имеются мелкие неточности, как-то: 1) символ S для функции следования, введенный на стр. 9, затем на стр. 24 используется как метапеременная для произвольных функциональных и предикатных символов; 2) на стр. 33 в 16-й строке сверху должно быть u_m вместо u_n; 3) конец доказательства предложения 18 на стр. 33 не помечен соответствующим символом. Они однако не умаляют общей высокой оценки диссертационной работы.

Считаю, что диссертационная работа Коновалова Александра Юрьевича представляет собой законченное научное исследование на актуальную тему. Она отвечает всем требованиям и критериям, установленным Положением о присуждении ученых степеней в МГУ, утвержденном Ректором МГУ 27 октября 2016 г., а ее автор, А.Ю. Коновалов, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

И.о. главного нучного сотрудника Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (г. Москва, Большой Каретный пер., 19, вебсайт http://iitp.ru, тел. +7 495 650-42-25), доктор физико-математических наук, профессор, тел. служ. +7 495 699-83-54 (внутр.148,149), kanovei@iitp.ru) Владимир Григорьевич Кановей.

24.01.2018 ВКанов Кановей Владимир Григорьевич

Подпись Кановея В.Г. заверяю.

Подпись Кановея В.Г. УДОСТОВЕРЯЮ Зав. канцелярией

Я, Кановей Владимир Григорьевич, даю свое согласие на включение моих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и их дальнейшую обработку.

ВКанов